Радиофизика и радиоастрономия, 1999, т. 4, №1, стр.49-53

УДК 538.566

Распространение электромагнитной волны в нерегулярном импедансном плоском волноводе

В. Л. Пазынин, Л. А. Пазынин

Институт радиофизики и электроники НАН Украины
61085, Харьков, Ак. Проскуры, 12

Статья поступила в редакцию 9 декабря 1999 г., после переработки 4 мая 2000 г.

Рассмотрена задача распространения электромагнитной ТМ-волны в плоском волноводе с идеально проводящей верхней стенкой и нижней стенкой, конечная проводимость которой изменяется по закону $\mathrm{th}\tau x$. Получено ее аналитическое решение, проанализированы предельные случаи.

Розглянуто задачу розповсюдження електромагнітної ТМ-хвилі у плоскому хвилеводі з ідеально провідною верхнею стінкою та нижньою стінкою, котра має скінченну провідність, яка змінюється як $\mathrm{th}\tau x$. Одержано її аналітичне рішення, проаналізовано граничні випадки.

Исследуется распространение электромагнитной ТМ-волны в плоском волноводе, одна из стенок которого имеет в продольном направлении переменный поверхностный импеданс $Z(x)$. До настоящего времени анализ такого волновода ограничивался только случаем, когда распределение $Z(x)$ (так называемая импедансная ступенька) имеет вид функции Хевисайда [1-3]. Такая модель волновода использовалась для описания прохождения сверхдлинноволнового сигнала через неоднородность земной поверхности типа суша – море или ионосферной неоднородности типа день – ночь [4]. Точное решение соответствующей граничной задачи было получено на основе метода Винера-Хопфа.

В данной работе показано, что и в более общей ситуации (содержащей ранее рассмотренный случай), когда зависимость $Z(x)$ описывается непрерывной функцией вида $\mathrm{th}\tau x$, при $\tau \to \infty$ тоже удается записать аналитическое решение такой задачи.

1. Рассматривается распространение электромагнитной ТМ-волны в плоском волноводе с поперечным размером d, верхняя стенка которого обладает идеальной проводимостью, а нижняя – описывается поверхностным импедансом, непрерывно изменяющимся от значения $Z_1 = Z(-\infty)$ до $Z_2 = Z(+\infty)$. Для простоты полагаем $\mathrm{Re}\, Z_j = 0 \quad (j = 1, 2)$. Все компоненты электромагнитного поля выражаются через поперечную y-составляющую напряженности магнитного поля $H_y^t(x,z) \equiv H^t(x,z)$. Требуется найти решение уравнения Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon\mu\right) H^t = 0 \qquad (1)$$

в полосе $(0 < z < d, -\infty < x < \infty)$ с граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial z} H^t = 0 \qquad \text{при } z = d\,, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} H^t + i\omega\varepsilon Z(\tau x) H^t = 0 \quad \text{при } z = 0\,, \qquad (3)$$

где $Z(\tau x) = \left(Z_2 + Z_1 e^{-\tau x}\right) / \left(1 + e^{-\tau x}\right) \ (\tau > 0)$, параметр τ определяет размеры переходной области в пространственном распределении импеданса. В процессе решения задачи считаем, что мнимая часть волнового числа $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ положительна, а в окончательных соотношениях полагаем ее равной нулю.

Пусть $H^t = H + H^{(n,1)}$, где H – вторичное поле, а

$$H^{(n,1)}(x,z) = a_n^1 \cos \upsilon_n^1 (z - d)\, e^{ih_n^1 x} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \ –$$

собственная n-мода регулярного волновода, при $Z(\tau x) \equiv Z_1$. Индексом n здесь обозначена собственная волна, поперечное волновое число которой υ_n^1 стремится к значению $\pi n/d$ при $Z_1 \to 0$; υ_n^j – корни дисперсионного уравнения

$$\upsilon_n^j \mathrm{tg}\, \upsilon_n^j d + i\omega\varepsilon Z_j = 0 \qquad (j = 1, 2),$$

$h_n^j = \sqrt{k^2 - \left(\upsilon_n^j\right)^2}$, $\operatorname{Im} h_n^j > 0$, ε, μ – проницаемости однородной среды, заполняющей волновод.

2. Вторичное поле ищем в виде интеграла, удовлетворяющего уравнению (1) и граничному условию (2)

$$H(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) \cos \nu(\tilde{z} - \delta) e^{i\eta\tilde{x}} \mathrm{d}\eta\,, \qquad (4)$$

где $\nu = \sqrt{\kappa^2 - \eta^2}$, $\tilde{z} = \tau z$, $\tilde{x} = \tau x$, $\delta = \tau d$, $\kappa = k/\tau$. $F(\eta)$ – подлежащая определению функция. Подставляя (4) в условие (3), получим интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\eta) \cdot \left[e^{2i\delta\nu} - 1 - \frac{\omega\varepsilon Z(\tilde{x})}{\tau\nu} \left(e^{2i\delta\nu} + 1 \right) \right] e^{i\eta\tilde{x}} \mathrm{d}\eta = \sqrt{2\pi}\, g(\tilde{x})$$

$$(-\infty < \tilde{x} < \infty), \qquad (5)$$

где

$$\tilde{F}(\eta) = (\tau\nu / 2i) F(\eta) e^{-i\delta\nu},$$

$$g(\tilde{x}) = \frac{\tau A_n}{\sqrt{2\pi}} \frac{Z_2 - Z_1}{1 + e^{-\tilde{x}}} e^{i\eta_n^1 \tilde{x}},$$

$$A_n = i \frac{\omega\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} a_n^1 \cos \nu_n^1 \delta, \quad \eta_n^j = h_n^j / \tau \ (j = 1, 2).$$

Используя известное представление [5]

$$\frac{2}{\nu} e^{i\delta\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(\kappa\sqrt{t^2 + \delta^2} \right) e^{i\eta t} \mathrm{d}t\,,$$

где $H_0^{(1)}(\kappa)$ – функция Бесселя третьего рода, перейдем от (5) к интегральному уравнению второго рода

$$f(\tilde{x}) + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tilde{x}, t - \tilde{x}) f(t) \mathrm{d}t = g(\tilde{x}) \qquad (-\infty < \tilde{x} < \infty) \qquad (6)$$

относительно новой неизвестной функции

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\eta) e^{i\eta t} \mathrm{d}\eta$$

с ядром

$$K(\tilde{x}, t - \tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ k_1(t - \tilde{x}) + e^{-\tilde{x}} k_2(t - \tilde{x}) \right\} \Big/ \left(1 + e^{-\tilde{x}} \right),$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} k_j(t - \tilde{x}) = \frac{\omega\varepsilon}{2\tau} Z_{3-j} \left[H_0^{(1)}\left(\kappa\sqrt{(t - \tilde{x})^2 + (2\delta)^2} \right) + \right.$$

$$\left. + H_0^{(1)}\left(\kappa |t - \tilde{x}| \right) \right] - \frac{1}{4i} \frac{\partial}{\partial\delta} H_0^{(1)}\left(\kappa\sqrt{(t - \tilde{x})^2 + (2\delta)^2} \right)$$

$$(j = 1, 2).$$

Представляя (6) в виде

$$f(\tilde{x}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t - \tilde{x}) f(t) \mathrm{d}t - g(\tilde{x}) +$$

$$+ e^{-\tilde{x}} \left\{ f(\tilde{x}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t - \tilde{x}) f(t) \mathrm{d}t - g(\tilde{x}) \right\} = 0 \qquad (7)$$

$$(-\infty < \tilde{x} < \infty),$$

приходим к так называемому интегральному уравнению плавного перехода Черского [6]. Для его решения введем новую неизвестную функцию

$$\varphi(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t - \tilde{x}) f(t) \mathrm{d}t - g(\tilde{x}) \qquad (8)$$

$$(-\infty < \tilde{x} < \infty)$$

и, применяя преобразование Фурье

$$\Phi(\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tilde{x}) e^{i\varsigma\tilde{x}} \mathrm{d}\tilde{x}$$

к равенствам (7), (8), приходим для определения $\Phi(\varsigma)$ к граничной задаче Карлемана:

$$\Phi(\eta) = -D(\eta)\Phi(\eta + i) + H(\eta) \quad (-\infty < \eta < \infty)$$

в полосе $0 < \operatorname{Im}\varsigma < 1$ комплексной плоскости $\varsigma = \eta + i\chi$, где

$$D(\eta) = (1 + K_2(\eta)) / (1 + K_1(\eta)),$$

$$H(\eta) = (K_2(\eta) - K_1(\eta)) G(\eta) / (1 + K_1(\eta)),$$

$K_1(\eta), K_2(\eta), G(\eta)$ преобразования Фурье функций $k_1(\tilde{x})$, $k_2(\tilde{x})$, $g(\tilde{x})$ соответственно. С помощью конформного отображения $\zeta = \exp(2\pi\varsigma)$ и введения новой неизвестной функции $\omega(\zeta)=\Phi\left((2\pi)^{-1}\ln\zeta\right)/\sqrt{\zeta}$ задача Карлемана сводится к задаче Римана на вещественной оси ξ [6]

$$\omega^{+}(\xi)=\widetilde{D}(\xi)\omega^{-}(\xi)+\widetilde{H}(\xi)\qquad(-\infty<\xi<\infty)\qquad(9)$$

с непрерывным коэффициентом

$$\widetilde{D}(\xi)=\begin{cases}D\left((2\pi)^{-1}\ln\xi\right) & \text{при }\ \xi>0;\\ 1 & \text{при }\ \xi<0\end{cases}$$

и

$$\widetilde{H}(\xi)=\begin{cases}H\left((2\pi)^{-1}\ln\xi\right)\xi^{-1/2} & \text{при } \xi>0;\\ 0 & \text{при } \xi<0.\end{cases}$$

Решение этой задачи выписывается в замкнутом виде

$$\omega^{+}(\xi)=X(\xi)\Psi^{+}(\xi)\qquad(10)$$
$$(-\infty<\xi<\infty),$$

где каноническая функция $X(\xi)$ есть решение соответствующей однородной граничной задачи Римана (9), а

$$\Psi^{+}(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\frac{[K_2(\eta)-K_1(\eta)]G(\eta)}{[1+K_1(\eta)]X(t)(t-\xi)}e^{-\pi\eta}\mathrm{d}t$$

Здесь $\eta=(2\pi)^{-1}\ln t$, $\operatorname{Im}\xi>0$. Решение неоднородной задачи (9) получаем отсюда в виде

$$e^{\pi\eta}\omega^{+}\left(e^{2\pi\eta}\right)=-4^{-1}A_n\omega\varepsilon(Z_1-Z_2)^2X\left(e^{2\pi\eta}\right)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\left[X\left(e^{2\pi\eta'}\right)\right]^{-1}\left(1+\exp\left(2i\delta\sqrt{\kappa^2-\eta'^2}\right)\right)\times$$
$$\times\left[\sqrt{\kappa^2-\eta'^2}\left(1-\exp\left(2i\delta\sqrt{\kappa^2-\eta'^2}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\omega\varepsilon Z_2\left(1+\exp\left(2i\delta\sqrt{\kappa^2-\eta'^2}\right)\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\frac{\mathrm{d}\eta'}{\operatorname{sh}\pi(\eta_n^1+\eta')\operatorname{sh}\pi(\eta'-\eta)},\qquad(11)$$

где $\eta_n^j=h_n^j/\tau\quad(j=1,2;\ n=0,1,2,\ldots)$.
Индекс задачи Римана (9) равен $\operatorname{Ind}D(\eta)$, где

$$D(\eta)=\frac{\tau\nu\sin\delta\nu+i\omega\varepsilon Z_1\cos\delta\nu}{\tau\nu\sin\delta\nu+i\omega\varepsilon Z_2\cos\delta\nu}\ -$$

мероморфная функция. Ее можно представить в виде бесконечного произведения

$$D(\eta)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\eta_n^1\right)^2-\eta^2}{\left(\eta_n^2\right)^2-\eta^2},\qquad(12)$$

поэтому

$$\operatorname{Ind}D(\eta)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\operatorname{Ind}\frac{\left(\eta_n^1\right)^2-\eta^2}{\left(\eta_n^2\right)^2-\eta^2}=0.$$

При нулевом индексе, как показано в [6], уравнение плавного перехода безусловно разрешимо и его решение выражается через решение задачи (9) следующим образом

$$f(\widetilde{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[G(\eta)+e^{\pi\eta}\omega^{+}\left(e^{2\pi\eta}\right)\right]\frac{e^{-i\widetilde{x}\eta}\,\mathrm{d}\eta}{1+K_2(\eta)}.$$

С использованием соотношения (10), определяющего каноническую функцию $X(\xi)$, интеграл (11) сводится к сумме вычетов в полюсах $\varsigma=\eta$ и $\varsigma=i-\eta_n^1$, поэтому

$$f(\widetilde{x})=\frac{i\tau A_n}{2\sqrt{2\pi}}(Z_2-Z_1)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X\left(e^{2\pi\eta}\right)e^{-i\widetilde{x}\eta}\mathrm{d}\eta}{X\left(\exp\left(2\pi\left(i-\eta_n^1\right)\right)\right)[1+K_2(\eta)]\operatorname{sh}\pi\left(\eta+\eta_n^1\right)},$$

а вторичное поле

$$H(x,z)=\frac{iA_n(Z_2-Z_1)}{X\left(\exp\left(2\pi\left(i-\eta_n^1\right)\right)\right)}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(\eta)\cos\nu(\widetilde{z}-\delta)e^{-i\widetilde{x}\eta}\mathrm{d}\eta}{\operatorname{sh}\pi\left(\eta+\eta_n^1\right)}\qquad(13)$$

где

$$Q(\eta)=\frac{e^{i\delta\nu}X\left(e^{2\pi\eta}\right)}{\nu[1+K_2(\eta)]}.$$

Прямая подстановка этого представления в (1), (2) и (3) показывает, что (13) является искомым решением. Учитывая разложение (12), для канонической функции $X(\xi)$ можно получить следующее представление:

$$X\left(e^{2\pi\eta}\right)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma\left(\eta;\eta_n,\eta_n^2\right)}{\gamma\left(\eta;\eta_n^2,\eta_n^1\right)}$$

где

$$\gamma\left(\eta;\eta_n^1,\eta_n^2\right)=\Gamma\left(1-i\left(\eta_n^1-\eta\right)\right)\Gamma\left(-i\left(\eta_n^2+\eta\right)\right),$$

$\Gamma(\eta)$ – гамма-функция.

3. Рассмотрим выражение для вторичного поля (13) при отрицательных x. В этом случае контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости и интеграл сводится к сумме вычетов в простых полюсах

$$-\eta_n^1+is \quad (s=1,2,\ldots) \quad \text{и} \quad \eta_k^1+im \quad (k,m=0,1,2,\ldots).$$

Вклад этих полюсов в H представляет собой, вообще говоря, волны, экспоненциально убывающие при $x\to-\infty$. Исключением является подпоследовательность этих полюсов, с индексом $m=0$: η_k^1 $(k=0,1,2,\ldots)$, которым соответствуют незатухающие волны, уходящие на $-\infty$. Эта часть вторичного поля представляет наибольший интерес, поэтому далее ограничимся рассмотрением поля вдали от неоднородности в распределении импеданса $(|\tau x|>>1)$, где можно пренебречь вкладом затухающих волн. Учитывая то, что вычет функции $Q(\eta)$ в этих полюсах равен

$$\operatorname*{Res}_{\eta=\eta_k^1} Q(\eta)=$$

$$=\frac{X\left(\exp\left(2\pi\eta_k^1\right)\right)\left(\nu_k^1\right)^2}{2i\eta_k^1\cos\delta\nu_k^1\left[\left(\left(\nu_k^1\right)^2-(\omega\varepsilon Z_1/\tau)^2\right)\delta-i\omega\varepsilon Z_1/\tau\right]},$$

где

$$\nu_n^j=\sqrt{\kappa^2-\left(\eta_n^j\right)^2},$$

для вторичного поля вдали от неоднородности $(|\tau x|>>1)$ при $x<0$ получим выражение

$$H(x,z)=\pi i\frac{\omega\varepsilon}{\tau}(Z_1-Z_2)a_n^1\cos\delta\nu_n^1 X\left(\exp\left(2\pi\eta_n^1\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}X\left(\exp\left(2\pi\eta_k^1\right)\right)\left(\nu_k^1\right)^2\exp\left(-i\eta_k^1\tilde{x}\right)\cos\nu_k^1(\tilde{z}-\delta)\times$$

$$\times\left[\eta_k^1\cos\delta\nu_k^1\left[\left(\left(\nu_k^1\right)^2-(\omega\varepsilon Z_1/\tau)^2\right)\delta-\frac{i\omega\varepsilon Z_1}{\tau}\right]\operatorname{sh}\pi\left(\eta_k^1+\eta_n^1\right)\right]^{-1}, \tag{14}$$

при выводе которого было использовано следующее свойство канонической функции

$$X\left(\exp(2\pi(i-\eta))\right)X\left(\exp(2\pi\eta)\right)=1.$$

Аналогично, для положительных x контур интегрирования в (13) замыкается в нижней полуплоскости переменной ς и интеграл для $H(x,y)$ сводится к сумме вычетов в простых полюсах $-\eta_k^2-im$ $(k,m=0,1,2,\ldots)$ и $-\eta_n^1$, поэтому полное поле вдали от неоднородности $(\tau x>>1)$ равно

$$H^t(x,z)=\pi i\frac{\omega\varepsilon}{\tau}(Z_1-Z_2)a_n^1\cos\delta\nu_n^1 X\left(\exp\left(2\pi\eta_n^1\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[X\left(\exp\left(2\pi\eta_k^2\right)\right)\right]^{-1}\left(\nu_k^2\right)^2\exp\left(i\eta_k^2\tilde{x}\right)\cos\nu_k^2(\tilde{z}-\delta)}{\eta_k^2\cos\delta\nu_k^2\left[\left(\left(\nu_k^2\right)^2-(\omega\varepsilon Z_2/\tau)^2\right)\delta-i\omega\varepsilon Z_2/\tau\right]\operatorname{sh}\pi\left(\eta_n^1-\eta_k^2\right)}. \tag{15}$$

Выберем амплитуды собственных мод регулярного импедансного волновода равными

$$a_n^j=\frac{\upsilon_n^j}{\sqrt{\eta_n^j}\cos\upsilon_n^j d\cdot\tilde{\gamma}_n^j} \qquad (j=1,2),$$

где $\left(\tilde{\gamma}_n^j\right)^2=\left(\left(\nu_n^j\right)^2-(\omega\varepsilon Z_j/\tau)^2\right)\delta-i\omega\varepsilon Z_j/\tau$. При таких значениях амплитуды a_n^j поток энергии n-й моды регулярного импедансного волновода не зависит от индекса n и величины импеданса Z_j и для полных полей вдали от импедансной неоднородности $(|\tau x|>>1)$ получаем следующие выражения:

при $x<0$

$$H^t(x,z)=H^{(n,1)}(x,z)+i\pi\frac{\omega\varepsilon}{\tau}(Z_1-Z_2)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X\left(\exp\left(2\pi\eta_n^1\right)\right)X\left(\exp\left(2\pi\eta_k^1\right)\right)\nu_n^1\nu_k^1}{\sqrt{\eta_n^1\eta_k^1}\,\tilde{\gamma}_n^1\tilde{\gamma}_k^1\operatorname{sh}\pi\left(\eta_n^1+\eta_k^1\right)}H^{(-k,1)}(x,z),$$

при $x>0$

$$H^t(x,z)=i\pi\frac{\omega\varepsilon}{\tau}(Z_1-Z_2)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X\left(\exp\left(2\pi\eta_n^1\right)\right)\nu_n^1\nu_k^2}{X\left(\exp\left(2\pi\eta_k^2\right)\right)\sqrt{\eta_n^1\eta_k^2}\,\gamma_n^1\gamma_k^2\operatorname{sh}\pi\left(\eta_n^1-\eta_k^2\right)}\times$$

$$\times H^{(k,2)}(x,z).$$

Знак минус в индексе $(-k,1)$ соответствует обратному направлению распространения собственной k-й моды регулярного волновода, нижняя стенка которого имеет импеданс равный Z_1.

В этих выражениях множители при $H^{(k,j)}(x,z)$ являются коэффициентами отражения (для $x<0$) и трансформации (для $x>0$) n-й волноводной моды:

$$R_{nk}^{12} = i\pi\frac{\omega\varepsilon}{\tau}(Z_1 - Z_2)\times$$
$$\times\frac{\nu_n^1\nu_k^1 X\left(\exp\left(2\pi\eta_n^1\right)\right)X\left(\exp\left(2\pi\eta_k^1\right)\right)}{\sqrt{\eta_n^1\eta_k^1\,\tilde{\gamma}_n^1\tilde{\gamma}_k^1}\,\operatorname{sh}\pi\left(\eta_n^1+\eta_k^1\right)}, \qquad (16)$$

$$T_{nk}^{12} = i\pi\frac{\omega\varepsilon}{\tau}(Z_1 - Z_2)\times$$
$$\times\frac{\nu_n^1\nu_k^2 X\left(\exp\left(2\pi\eta_n^1\right)\right)}{\sqrt{\eta_n^1\eta_k^2\,\tilde{\gamma}_n^1\tilde{\gamma}_k^2}\,X\left(\exp\left(2\pi\eta_k^2\right)\right)\operatorname{sh}\pi\left(\eta_n^1-\eta_k^2\right)}. \qquad (17)$$

Учитывая то, что замена $Z_1 \leftrightarrow Z_2$ приводит к $X(\exp(2\pi\eta)) \leftrightarrow [X(\exp(2\pi\eta))]^{-1}$, из (16), (17) получаем равенства $R_{nk}^{12} = R_{kn}^{12}$, $T_{nk}^{12} = T_{kn}^{21}$, представляющие собой теорему взаимности для рассматриваемого волновода.

Предельный переход к резкому скачку импеданса $(\tau\to\infty)$ в соотношениях (16), (17) для R_{nk}^{12} и T_{nk}^{12} приводит к выражениям, полученным для этих характеристик в работе Таланова [2].

Квадраты модулей коэффициентов отражения и трансформации выражаются через элементарные функции:

$$\left|R_{nk}^{12}\right|^2 = \frac{\operatorname{sh}2\pi\eta_n^1\,\operatorname{sh}2\pi\eta_k^1}{\operatorname{sh}^2\pi\left(\eta_n^1+\eta_k^1\right)}\times$$
$$\times\prod_{\substack{s=0\\ s\neq n,k}}^{l_1}\frac{\operatorname{sh}\pi\left(\eta_s^1+\eta_n^1\right)\operatorname{sh}\pi\left(\eta_s^1+\eta_k^1\right)}{\operatorname{sh}\pi\left|\eta_s^1-\eta_n^1\right|\operatorname{sh}\pi\left|\eta_s^1-\eta_k^1\right|}\times$$
$$\times\prod_{s=0}^{l_2}\frac{\operatorname{sh}\pi\left|\eta_s^2-\eta_n^1\right|\operatorname{sh}\pi\left|\eta_s^2-\eta_k^1\right|}{\operatorname{sh}\pi\left(\eta_s^2+\eta_n^1\right)\operatorname{sh}\pi\left(\eta_s^2+\eta_k^1\right)},$$

$$\left|T_{nk}^{12}\right|^2 = \frac{\operatorname{sh}2\pi\eta_n^1\,\operatorname{sh}2\pi\eta_k^2}{\operatorname{sh}^2\pi\left(\eta_n^1-\eta_k^2\right)}\prod_{\substack{s=0\\ s\neq n}}^{l_1}\frac{\operatorname{sh}\pi\left(\eta_s^1+\eta_n^1\right)}{\operatorname{sh}\pi\left|\eta_s^1-\eta_n^1\right|}\times$$
$$\times\prod_{s=0}^{l_1}\frac{\operatorname{sh}\pi\left|\eta_s^1-\eta_k^2\right|}{\operatorname{sh}\pi\left(\eta_s^1+\eta_k^2\right)}\times$$
$$\times\prod_{s=0}^{l_2}\frac{\operatorname{sh}\pi\left|\eta_s^2-\eta_n^1\right|}{\operatorname{sh}\pi\left(\eta_s^2+\eta_n^1\right)}\prod_{\substack{s=o\\ s\neq k}}^{l_2}\frac{\operatorname{sh}\pi\left(\eta_s^2+\eta_k^2\right)}{\operatorname{sh}\pi\left|\eta_s^2-\eta_k^2\right|},$$

где l_j – максимальный тип собственной моды, распространяющейся в регулярном волноводе, импеданс нижней стенки которого равен Z_j $(j=1,2)$.

В частности, при одномодовом режиме в левом и правом волноводе, т. е. при $0<\eta_0^1$, $\eta_0^2<\kappa$

$$\left|R_{00}^{12}\right|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2\pi\left|\eta_0^1-\eta_0^2\right|}{\operatorname{sh}^2\pi\left(\eta_0^1+\eta_0^2\right)},$$
$$\left|T_{00}^{12}\right|^2 = \frac{\operatorname{sh}2\pi\eta_0^1\,\operatorname{sh}2\pi\eta_0^2}{\operatorname{sh}^2\pi\left(\eta_0^1+\eta_0^2\right)}.$$

Для случая плавно меняющегося импеданса $\left(\left|\eta_m^j\right| >> 1, m=0,1,\ldots,l_j\right)$, когда масштаб его изменения $\Delta l = 1/\tau$ много больше длины волны каждой из распространяющихся мод в правом и левом волноводе, характерным является наличие, с точностью до экспоненциально малых величин, только одной волноводной моды во вторичном поле. Эта мода того же типа, что и первичная мода. Когда этот волновой тип может распространяться в правом волноводе, именно в него переходит вся энергия первичной волны. В противном случае – вся энергия переходит в моду того же типа, распространяющуюся, после отражения от импедансной неоднородности, в левом волноводе.

Литература

1. A. E. Heins and H. Feshbach. J. Math. Phys. 1947, **26**, pp. 143-155.
2. В. И. Таланов. Изв. вузов. Радиофизика.1958, **1**, №3, с. 64-72.
3. D. S. Karjala and R. Mittra. Can. J. of Physics. 1965, **43**, №5, p. 849-854.
4. О. В. Соловьев. Изв. Вузов. Радиофизика. 1993, **36**, №1, с. 37-50.
5. Л. А. Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации. Москва, Сов. радио. 1966, 432 с.
6. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. Уравнения типа свертки. Москва, Наука, 1978, 296 с.

Electromagnetic Wave Propagation in Planar Impedance Irregular Waveguide

V. L. Pazynin, L. A. Pazynin

The problem is considered of propagation of electromagnetic TH-wave in planar waveguide with perfectly conductive upper wall and with lower wall having finite conductivity changing as thτx. An analytical solution of this problem is derived and the limiting cases are analyzed.