Радиофизика и радиоастрономия, 1999, т. 4, №1, стр.54-60

УДК 621.371.162

Когерентное электромагнитное поле и эффективный поверхностный импеданс в статистически неровном сферическом волноводе

А. С. Брюховецкий

Институт радиофизики и электроники НАН Украины
61085, Харьков, ул. Ак. Проскуры,12
E-mail: sirenko@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 27 марта 2000 г.

В приближении Бурре определено Фурье-разложение по собственным функциям продольного оператора для среднего электромагнитного поля, рассеянного малыми шероховатостями стенок сферического волновода с малыми поверхностными импедансами η_1 и η_2. В граничных условиях учтены все величины, квадратичные по высоте неровностей, в том числе содержащие множители η_1 и η_2. Вычислены коэффициенты отражения сферических волн в разложении среднего (когерентного) поля, которые выражены в терминах эффективных импедансов сферических мультипольных волн. Исследован переход к случаю уединенной сферы, изученному ранее.

В наближенні Бурре знайдено Фур'є-розкладання за власними функціями повздовжнього оператора для середнього електромагнітного поля, розсіяного малими шорсткостями стінок сферичного хвилеводу з малими поверхневими імпедансами η_1 та η_2. У граничних умовах враховано всі величини, квадратичні по висоті нерівностей, у тому числі ті, що мають множники η_1 та η_2. Обчислено коефіцієнти відбиття сферичних хвиль в розкладанні середнього (когерентного) поля, що виражені в термінах ефективних імпедансів сферичних мультипольних хвиль. Досліджено перехід до випадку відокремленої сфери, вивченого раніше.

Введение

Успехи в развитии теории возмущений для электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой [1-6], позволяют расширить круг подобных исследований на случай сферического волновода, образованного двумя концентрическими статистически неровными сферами с малыми поверхностными импедансами η_1 и η_2. Теоретические исследования этой проблемы представляют собой определенный шаг в развитии теории и достаточно актуальны для практических приложений.

Эквивалентные граничные условия

Будем исходить из граничных условий Леонтовича

$$\vec{N}\times\vec{N}\times\vec{E} = -\eta_1\vec{N}\times\vec{H} \quad \text{при } r = r_1, \tag{1}$$

$$\vec{N}\times\vec{N}\times\vec{E} = +\eta_2\vec{N}\times\vec{H} \quad \text{при } r = r_2 \tag{2}$$

на статистически неровных поверхностях $r = r_1(\varphi,\theta) \equiv a_1 + \zeta_1(\varphi,\theta)$, $r = r_2(\varphi,\theta) \equiv a_2 + \zeta_2(\varphi,\theta)$, причем $a_2 = a_1 + d$, где d – средняя высота волновода, $\zeta_1(\varphi,\theta)$, $\zeta_2(\varphi,\theta)$ – флуктуации r_1 и r_2 относительно средних значений $\langle r_1\rangle = a_1$, $\langle r_2\rangle = a_2$, $\vec{N}$ – внешняя нормаль к поверхности; $\vec{E},\vec{H}$ – векторы электрической и магнитной напряженности. Предполагается, что $|\eta_1|$, $|\eta_2| \ll 1$, неровности считаются малыми и пологими:

$$k|\zeta_1|, \quad k|\zeta_2| \ll 1 \text{ и } |\nabla\zeta_1|, \ |\nabla\zeta_2| \ll 1. \tag{3}$$

В области $r_1 < r < r_2$ диэлектрическая и магнитная проницаемости среды равны ε и μ соответственно, $k = \sqrt{\varepsilon\mu}\dfrac{\omega}{c}$ – волновое число в этой среде, ω – частота; зависимость от времени $\sim e^{-i\omega t}$.

Целью задачи является определение полей $\vec{E},\vec{H}$, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла с особенностями, вызванными наличием источников в области $r_1 < r < r_2$, а также граничным условиям (1), (2).

Если представить поля в виде суммы средних значений $\mathscr{E} = \langle\vec{E}\rangle$, $\mathscr{H} = \langle\vec{H}\rangle$ и флуктуаций

$\vec{e},\ \vec{h},$ то разложение граничного условия (1) в ряд Тейлора и его усреднение приводит к "эквивалентным" граничным условиям на средней поверхности $r=a_1$:

при $r=a_1$

$$\left(1+\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\vec{\mathscr{E}}_\perp-\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\times$$

$$\times\left\{\hat{i}_-\left(\mathscr{H}_\theta-\mathscr{H}_\varphi\right)-\hat{i}_+\left(\mathscr{H}_\theta+\mathscr{H}_\varphi\right)\right\}=$$

$$=-\vec{U}_{11}-\vec{U}_{12}+\vec{U}_{13}+\vec{U}_{14}-\vec{U}_{15}+\vec{U}_{16}\equiv-\vec{U}_1;\quad (4)$$

при $r=a_1$

$$\vec{e}_\perp-\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\left\{\hat{i}_-\left(h_\theta-ih_\varphi\right)-\hat{i}_+\left(h_\theta+ih_\varphi\right)\right\}=$$

$$=-\vec{u}_{11}-\vec{u}_{12}+\vec{u}_{13}+\vec{u}_{14}\equiv-\vec{u}_1,\qquad (5)$$

где

$$\hat{i}_\pm=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{i}_\varphi\pm\hat{i}_\theta\right),\quad \hat{i}_0=\hat{i}_r\qquad (6)$$

– спиральный базис, $\hat{i}_\varphi$, $\hat{i}_\theta$, $\hat{i}_r$ – натуральный сферический базис, а векторы $\vec{U}_{1j}$ определены соотношениями

$$\vec{U}_{11}=\langle\zeta_1\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_\perp\rangle,\qquad \vec{U}_{12}=\langle\vec{\gamma}_1 e_r\rangle,$$

$$\vec{U}_{13}=\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\langle\hat{i}_-\zeta_1\frac{\partial}{\partial r}\left(h_\theta-ih_\varphi\right)-\hat{i}_+\zeta_1\frac{\partial}{\partial r}\left(h_\theta+ih_\varphi\right)\rangle,$$

$$\vec{U}_{14}=\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\langle\hat{i}_-h_r\left(\gamma_{1\theta}-i\gamma_{1\varphi}\right)-\hat{i}_+h_r\left(\gamma_{1\theta}+i\gamma_{1\varphi}\right)\rangle,$$

$$\vec{U}_{15}=\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\langle\{\hat{i}_-\left(\gamma_{1\theta}-i\gamma_{1\varphi}\right)-\hat{i}_+\left(\gamma_{1\theta}+i\gamma_{1\varphi}\right)\}\cdot\{\mathcal{H}_\theta\gamma_{1\theta}+\mathcal{H}_\varphi\gamma_{1\varphi}\}\rangle,$$

$$\vec{U}_{16}=\frac{\gamma_{10}^2}{2}\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\langle\hat{i}_-\left(\mathcal{H}_\theta-i\mathcal{H}_\varphi\right)-\hat{i}_+\left(\mathcal{H}_\theta+i\mathcal{H}_\varphi\right)\rangle,$$

причем

$$\vec{\gamma}_i=\nabla\zeta_i,\ \ \sigma_i^2=\left\langle\zeta_i^2\right\rangle,\ \ \gamma_{i0}^2=\langle\gamma_i^2\rangle,\quad (i=1,2).$$

Значком $\perp$ обозначено направление, перпендикулярное к $\hat{i}_r$, т. е. лежащее в касательной к сфере плоскости.

Выражения $\vec{u}_{1j}$ получаются из $\vec{U}_{1j}$ заменой $\vec{e},\vec{h}$ на $\vec{\mathscr{E}},\vec{\mathscr{H}}$ в правых частях соответствующих выражений без операции усреднения.

"Эквивалентные" граничные условия на границе $r=a_2$ отличаются от (4), (5) заменой $\eta_1\to-\eta_2$ и индексов $1j\to 2j$.

Эффективные коэффициенты отражения сферических волн

Представим поля традиционными разложениями по сферическим векторным гармоникам Ганзена $\vec{m}_{nm}^{(e,o)}$, $\vec{n}_{nm}^{(e,o)}$ ([7], с. 345, 365-369), которые являются решениями уравнений Максвелла:

$$\vec{\mathscr{E}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{nm}^{(e,o)}\vec{m}_{nm}^{(e,o)}+B_{nm}^{(e,o)}\vec{n}_{nm}^{(e,o)}\right),\qquad (7)$$

$$\vec{\mathscr{H}}=\frac{ikc}{\omega\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{nm}^{(e,o)}\vec{n}_{nm}^{(e,o)}+B_{nm}^{(e,o)}\vec{m}_{nm}^{(e,o)}\right)\qquad (8)$$

Здесь $A_{nm}^{(e,o)}$, $B_{nm}^{(e,o)}$ – коэффициенты Фурье. Верхний индекс "e" относится к четной, а "o" – к нечетной по φ части соответствующего разложения в (7), (8).

Коэффициенты Фурье в аналогичных разложениях флуктуаций $\vec{e}$, $\vec{h}$ обозначим $a_{nm}^{(e,o)}$, $b_{nm}^{(e,o)}$. Для эффективного решения задачи необходимо придать разложениям (7), (8) форму, инвариантную относительно группы вращения сферы, для чего следует выразить входящие в них зональные гармоники через обобщенные сферические функции (функции Вигнера) [8]

$$t_{mm'}^{n}(-\varphi,\theta,0)=e^{im\varphi}P_{mm'}^{n}(\cos\theta)e^{im'0}.\qquad (9)$$

При этом гармоники

$$\vec{m}_{nm}^{(e,o)}=\frac{1}{\sqrt{2}}Q_{nm}^{(e,o)}Z_n(kr)\left\{\hat{i}_{nm}^{+}-\hat{i}_{nm}^{-}\right\},\qquad (10)$$

$$\vec{n}_{nm}^{(e,o)}=\frac{Z_n(kr)}{2kr}Q_{nm}^{r(e,o)}\cdot\hat{i}_{nm}^{o}+\frac{i}{\sqrt{2}}Q_{nm}^{(e,o)}\times$$

$$\times\frac{1}{kr}\left(krZ_n(kr)\right)'\left[\hat{i}_{nm}^{+}+\hat{i}_{nm}^{-}\right]\qquad (11)$$

представляются линейными комбинациями следующих ортонормированных функций:

$$\begin{cases}\hat{i}_{nm}^{+}=N_{nm}\,t_{m,-1}^{n}(-\varphi,\theta,0)\cdot\hat{i}_+,\\ \hat{i}_{nm}^{-}=N_{nm}\,t_{m,+1}^{n}(-\varphi,\theta,0)\cdot\hat{i}_-,\\ \hat{i}_{nm}^{o}=N_{nm}\,t_{m,0}^{n}(-\varphi,\theta,0)\cdot\hat{i}_0.\end{cases}\qquad (12)$$

Здесь использованы обозначения:

$$N_{nm}=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}};$$

$$Q_{nm}^{(e,0)}=\frac{1}{2}i^{|m|+1}\sqrt{n(n+1)}\sqrt{\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}}\chi_m^{(e,0)};$$

$$Q_{nm}^{r(e,0)}=-2\sqrt{n(n+1)}Q_{nm}^{(e,0)};$$

$$\chi_m^{(e,0)}=\begin{pmatrix}1\\ -im/|m|\end{pmatrix}\quad \text{при } m\neq 0$$

$$\text{или}\quad \chi_m^{(e,0)}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\quad \text{при } m=0;$$

верхняя строка соответствует индексу (e), а нижняя индексу (o); $Z_n(kr)$ — сферические бесселевы функции [7].

Скалярное произведение для этой ортонормированной системы функций определено следующим образом (горизонтальная черта сверху означает комплексное сопряжение) [8,9]:

$$\left(\hat{i}^{\,+}_{nm}*\hat{i}^{\,+}_{n'm'}\right)=\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\hat{i}^{\,+}_{nm}\cdot\bar{\hat{i}}^{\,+}_{n'm'}=\delta_{nn'}\delta_{mm'},$$
$$\left(\hat{i}^{\,-}_{nm}*\hat{i}^{\,-}_{n'm'}\right)=\delta_{nn'}\delta_{mm'}, \tag{13}$$

а остальные комбинации произведений этих функций равны нулю в силу ортогональности спирального базиса (6).

Для однородных случайных полей $\zeta_1(\varphi,\theta)$ и $\zeta_2(\varphi,\theta)$ предполагается существование спектральных разложений

$$\zeta_j(\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\zeta_{jnm}^{(e,o)}P_n^m(\cos\theta)\,{}^{\cos}_{\sin}\,m\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\tilde{\zeta}_{jnm}^{(e,o)}t^n_{m,0}(-\varphi,\theta,0),\quad (j=1,2), \tag{14}$$

где $\tilde{\zeta}_{jnm}^{(e,o)}=i^{|m|}\sqrt{\dfrac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}}\zeta_{jnm}^{(e,o)}$, причем для четной части разложения (индекс (e)) берется множитель $\cos m\varphi$, для нечетной (индекс (o)) – множитель $\sin m\varphi$.

Сумма и разность скалярных произведений "эквивалентных" граничных условий (4), (5) на базисные функции (12) приводят к следующей бесконечной системе линейных уравнений для коэффициентов Фурье-разложения поля $\tilde{A}_{nm}^{(e,0)}$, $\tilde{B}_{nm}^{(e,0)}$:

$$\Gamma_1^{\pm}(Z_n)\begin{pmatrix}i\tilde{B}_{nm}^{(e,0)}\\ \tilde{A}_{nm}^{(e,0)}\end{pmatrix}=\frac{N_{nm}}{\sqrt{2}}U_{\pm 1nm}\equiv U_{\pm 1}, \tag{15}$$

$$\Omega_1^{\pm}(Z_{n_2})\begin{pmatrix}i\tilde{b}_{n2m2}^{(e,0)}\\ \tilde{a}_{n2m2}^{(e,0)}\end{pmatrix}=\frac{N_{n_2m_2}}{\sqrt{2}}u_{\pm 1n_2m_2}\equiv u_{\pm 1}. \tag{16}$$

Здесь верхнему знаку соответствует верхняя строка в круглых скобках, нижнему – нижняя строка, а

$$\Gamma_1^{\pm}(Z_n)=\left(1+\frac{k^2\sigma_1^2}{2}\frac{d^2}{dx_1^2}\right)\Omega_1^{\pm}(Z_n), \tag{17}$$

$$\Omega_1^{-}(Z_n)=\left(1-i\eta_1\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{x_1}\frac{d}{dx_1}x_1\right)Z_n(x_1), \tag{18}$$

$$\Omega_1^{+}(Z_n)=\left(\frac{1}{x_1}\frac{d}{dx_1}x_1+i\eta_1\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)Z_n(x_1) \tag{19}$$

– линейные дифференциальные операторы, $x_1=ka_1$. Волнистой чертой обозначены перенормированные коэффициенты Фурье

$$(\tilde{A}_{nm}^{(e,o)},\tilde{B}_{nm}^{(e,o)},\ldots)=Q_{nm}^{(e,o)}\cdot(A_{nm}^{(e,o)},B_{nm}^{(e,o)},\ldots).$$

Для суммы и разности скалярных произведений в (15), (16) введено обозначение

$$U_{\pm jnm}=\left(\vec{U}_j*\hat{i}^{\,+}_{nm}\right)\pm\left(\vec{U}_j*\hat{i}^{\,-}_{nm}\right) \tag{20}$$

Напомним, что для j=1 $-\vec{U}_j$ – это сумма, стоящая в правой части уравнения (4) при $r=a_1$, а для j=2 это аналогичная сумма при $r=a_2$. Для получения системы уравнений из граничных условий при $r=a_2$ в формулах (14)-(18) следует заменить нижний индекс 1 на 2 и η_1 на $-\eta_2$.

Заметим, что до определенного этапа решения под выражением типа $A_{nm}^{(e,o)}Z_n(x)$, ... в разложениях (7), (8) следует понимать линейные комбинации $A_{nm}^{(e,o)(1)}\zeta_n^{(1)}(x)$, $A_{nm}^{(e,o)(2)}\zeta_n^{(2)}(x)$ сферических функций Бесселя третьего рода, которые соответствуют волнам, бегущим к началу координат и от него.

Представим среднее поле в виде суммы падающего поля, возбуждаемого заданными источниками в безграничной среде (его коэффициенты пометим дополнительным верхним индексом (i) – $A_{nm}^{(i)(e,o)}$, $B_{nm}^{(i)(e,o)}$), и рассеянного, обусловленного наличием стенок волновода (с коэффициентами, помеченными верхним индексом (s) — $A_{nm}^{(s)(e,o)}$, $B_{nm}^{(s)(e,o)}$). В силу линейности системы уравнений (15), (16)

$$U_{\pm j} = U_{\pm j}^{i} + U_{\pm j}^{s}\,, \tag{21}$$

где $U_{\pm j}^{i}$ зависит от падающего поля, а $U_{\pm j}^{s}$ – от рассеянного. Тогда решение (16) выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} i\tilde{b}_{nm}^{(i,s)(e,o)(\alpha)} \\ \tilde{a}_{nm}^{(i,s)(e,o)(\alpha)} \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\det_{n_2}^{\pm}} \left\{ \Omega_2^{\pm}\left(\zeta_{n_2}^{(\tilde{\alpha})}\right) u_{\pm 1}^{(i,s)} - \Omega_1^{\pm}\left(\zeta_{n_2}^{(\tilde{\alpha})}\right) u_{\pm 2}^{(i,s)} \right\}, \tag{22}$$

причем

$$\det_{n_2}^{\pm} = \Omega_1^{\pm}\left(\zeta_{n_2}^{(1)}\right)\Omega_2^{\pm}\left(\zeta_{n_2}^{(2)}\right) - \Omega_2^{\pm}\left(\zeta_{n_2}^{(1)}\right)\Omega_1^{\pm}\left(\zeta_{n_2}^{(2)}\right).$$

Здесь индексом "α" помечен коэффициент Фурье при сферической функции Бесселя $\zeta_{n_2}^{(\alpha)}(x_{1,2})$, индекс $\tilde{\alpha}$ образует с α перестановку чисел 1, 2, т. е. при $\alpha = 1$, $\tilde{\alpha} = 2$, $\alpha = 2$, $\tilde{\alpha} = 1$.

Таким образом соотношение (22) позволяет выразить коэффициенты Фурье флуктуационного поля через коэффициенты Фурье среднего поля. Подставляя их в выражения $U_{\pm j}$, получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов Фурье среднего поля $\tilde{A}_{nm}^{(s)(e,o)}$, $\tilde{B}_{nm}^{(s)(e,o)}$. Опуская чрезвычайно громоздкие преобразования, аналогичные случаю уединенной сферы [6], приведем систему для случая некоррелированных полей случайных высот ζ_1 и ζ_2, т. е. при $\langle\zeta_1\zeta_2\rangle = 0$:

$$\sum_{\beta=1}^{2} \Lambda_{\pm j}^{(\beta)} \begin{pmatrix} i\tilde{B}_{nm}^{(s)(e,o)(\beta)} \\ \tilde{A}_{nm}^{(s)(e,o)(\beta)} \end{pmatrix} = -\sum_{\beta=1}^{2} \Lambda_{\pm j}^{(\beta)} \begin{pmatrix} i\tilde{B}_{nm}^{(i)(e,o)(\beta)} \\ \tilde{A}_{nm}^{(i)(e,o)(\beta)} \end{pmatrix}, \quad (j = 1, 2) \tag{23}$$

Здесь

$$\Lambda_{\pm j}^{(\beta)} = \Gamma_j^{\pm}\left(\zeta_n^{(\beta)}\right) - U_{\pm jn}^{(2)(\beta)} - \left(O_{\pm 5nj} + O_{\pm 6nj}\right) \begin{pmatrix} \hat{\zeta}_n^{(\beta)}(x_j) \\ \hat{\zeta}_n^{(\beta)\prime}(x_j) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $\Gamma_j^{\pm}$ определено в (17), а остальные слагаемые в (24) приведены ниже:

$$\begin{aligned} O_{\pm 5nj} = {} & -i\pi \frac{(-1)^{j-1}}{2a_j^2 x_j} \eta_j \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\frac{\sigma_j}{a_j}\right)^2 \times \\ & \times \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{l=|n-n_4|}^{n+n_4} (2n_4+1) n_4 (n_4+1) \tilde{W}_j(n_4/a_j) \times \\ & \times \left[(-1)^{n-n_4-l} \sqrt{\frac{l(l+1)}{n_4(n_4+1)}} C(n, n_4, l; 1, 0, 1) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{n(n+1)}{n_4(n_4+1)}} C(n, n_4, l; 0, 0, 0) \right] \times \\ & \times \left[\sqrt{\frac{l(l+1)}{n_4(n_4+1)}} C(n, n_4, l; 1, 0, 1) - \sqrt{\frac{n(n+1)}{n_4(n_4+1)}} C(n, n_4, l; 0, 0, 0) \right] \times \\ & \times \left[1 \mp (-1)^{n-n_4-l} \right], \end{aligned} \tag{25}$$

где $C(l_1, l_2, l; m_1, m_2, m_1 + m_2)$ – стандартное обозначение коэффициентов Клебша-Гордана [9],

$$\begin{aligned} O_{\pm 6nj} = {} & \pm i\pi \frac{(-1)^{j-1}}{2a_j^2 x_j} \eta_j \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\frac{\sigma_j}{a_j}\right)^2 \times \\ & \times \sum_{n_4=0}^{\infty} (2n_4+1)\, n_4 (n_4+1) \cdot \tilde{W}_j(n_4/a_j). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь

$$\tilde{W}_j(n/a_j) = \left(2\pi\sigma_j^2\right)^{-1} a_j^2 \int_0^{\pi} \mathrm{K}(\Theta)\, \mathrm{P}_{0,0}^{n}(\cos\Theta) \sin\Theta\, d\Theta - \tag{27}$$

энергетический спектр [5], а $K(\Theta) = \langle \zeta_j(\varphi_1, \theta_1)\, \zeta_j(\varphi_2, \theta_2) \rangle$ – корреляционная функция однородных и изотропных неровностей на сфере, Θ – угловое расстояние между точками (φ_1, θ_1) и (φ_2, θ_2), $\hat{\zeta}_n^{(\beta)}(x_j) = x_j \zeta_n^{(\beta)}(x_j)$ – функции Риккати-Бесселя в последнем слагаемом правой части (24).

Величину $U_{\pm jn}^{(2)(\beta)}$ из (24) также можно представить суммой слагаемых, содержащих функцию $\hat{\zeta}_n^{(\beta)}(x_j)$ и ее производную $\hat{\zeta}_n^{(\beta)\prime}(x_j)$:

$$U_{\pm jn}^{(2)(\beta)} = O_{\pm jn}^{(1)} \cdot \hat{\zeta}_n^{(\beta)\prime}(x_j) + O_{\pm jn} \cdot \hat{\zeta}_n^{(\beta)\prime}(x_j), \tag{28}$$

причем

$$O_{\pm jn}^{(1)}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{k\sigma_j}{a_j}\right)^2\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\sum_{n_4=0}^{\infty}\sum_{l=|n-n_4|}^{n+n_4}(2n_4+1)\,\widetilde{W}_j(n_4/a_j)\cdot G_{jnn_4l}^{\pm}L_{jnn_4l}^{\pm(1)}. \quad (29)$$

Выражение $O_{\pm jn}$ отличается от $O_{\pm jn}^{(1)}$ заменой множителя $L_{jnn_4l}^{\pm}$ на $L_{jnn_4l}^{\pm(1)}$, т. е.

$$O_{\pm jn}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{k\sigma_j}{a_j}\right)^2\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\sum_{n_4=0}^{\infty}\sum_{l=|n-n_4|}^{n+n_4}(2n_4+1)\,\widetilde{W}_j(n_4/a_j)G_{jnn_4l}^{\pm}L_{jnn_4l}^{\pm}. \quad (30)$$

При этом

$$G_{jnn_4l}^{\pm}=D^{-}M^{\mp}+D^{+}M^{\pm}, \quad (31)$$

где $M^{\pm}=1\pm(-1)^{n-n_4-l}$ – “мигающий множитель”, а $D^{\pm}$ – определитель

$$D^{\pm}=\begin{vmatrix}\delta_{j1}\delta_{j2}\\ D_1^{\pm}D_2^{\pm}\end{vmatrix} \quad (32)$$

с элементами

$$D_j^{\pm}=Q_j\left[L_{jnn_4l}^{\pm(1)}\cdot\ln'\hat{\zeta}_{l(x_j)}^{(\alpha)}+L_{jnn_4l}^{\pm}\right], \quad (33)$$

причем для краткости обозначим:

$$Q_j=\hat{\zeta}_l^{(\alpha)}(x_j)\Omega_{\tilde{j}}^{\pm}\left(\zeta_l^{(\tilde{\alpha})}\right)/\det{}_l^{\pm}, \quad (34)$$

а индексы j, $\tilde{j}$, образуют перестановку чисел 1, 2. В выражениях (29), (30), (33) использованы следующие обозначения:

$$L_{jnn_4l}^{+(1)}=\frac{1}{x_j}g_{2j}C(n,n_4,l;1,0,1),$$

$$L_{jnn_4l}^{+}=-\frac{1}{x_j}g_{1j}C(n,n_4,l;1,0,1)+\frac{1}{x_j}g_{oj}C(n,n_4,l;0,0,0),$$

$$L_{jnn_4l}^{-(1)}=\frac{1}{x_j}g_{1j}C(n,n_4,l;1,0,1),$$

$$L_{jnn_4l}^{-}=\frac{1}{x_j}g_{2j}C(n,n_4,l;1,0,1)-i\eta'(-1)^{j-1}C(n,n_4,l;0,0,0),$$

где

$$\eta'_j=\eta_j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \qquad g_{1j}=1+i\eta'_j(-1)^{j-1}\frac{1}{x_j},$$

$$g_{2j}=-\frac{1}{x_j}+i\eta'_j(-1)^{j-1}, \qquad g_{0j}=\frac{\sqrt{l(l+1)n(n+1)}}{x_j^{\,2}}.$$

При j=1 величины $L_{jnn_4l}^{\pm(1)}$, $L_{jnn_4l}^{\pm}$ с точностью до обозначений совпадают с соответствующими величинами в случае уединенной сферы [5]. Заметим, что система уравнений (23) распадается на две диагональные подсистемы соответственно для коэффициентов $A_{nm}^{s(e,0)(\beta)}$ и для $B_{nm}^{s(e,0)(\beta)}$, как и в случае одиночной сферы [5].

Относительно коэффициентов Фурье падающего поля сделаем следующее уточнение. Наличие источников в области $a_1<r<a_2$ приводит к неравномерности Фурье-разложения падающего поля, так что на границах $r=a_1$ и $r=a_2$ коэффициенты будут разными. Для фиксации этого факта снабдим их дополнительным индексом j, принимающим значения 1 и 2 на границах $r=a_1$ и $r=a_2$ соответственно.

Без ограничения общности можно считать, что $A_{nm1}^{(i)(e,o)(1)}\equiv 0$, $B_{nm2}^{(i)(e,o)(2)}\equiv 0$. С учетом этого решение системы уравнений (23) выглядит следующим образом

$$\widetilde{B}_{nm}^{(s)(e,o)(1)}=-(DET_E)^{-1}\times$$
$$\times\left[\widetilde{B}_{nm1}^{(i)(e,o)(1)}-\left(\widetilde{B}_{nm1}^{(i)(e,o)(2)}+\widetilde{B}_{nm2}^{(i)(e,o)(1)}R_{2n}^{E}\Phi_{2n}\right)R_{1n}^{E}\Phi_{1n}\right], \quad (35)$$

$$\widetilde{B}_{nm}^{(s)(e,o)(2)}=-(DET_E)^{-1}\times$$
$$\times\left[\left(\widetilde{B}_{nm1}^{(i)(e,o)(1)}-\widetilde{B}_{nm2}^{(i)(e,o)(2)}\right)-\widetilde{B}_{nm1}^{(i)(e,o)(2)}R_{1n}^{E}\Phi_{1n}\right]R_{2n}^{E}\Phi_{2n}. \quad (36)$$

Аналогичным образом для искомых коэффициентов $\widetilde{A}_{nm}^{(s)(e,o)}$

$$\widetilde{A}_{nm}^{(s)(e,o)(1)}=-(DET_M)^{-1}\times$$
$$\times\left[-\widetilde{A}_{nm1}^{(i)(e,o)(2)}+\widetilde{A}_{nm2}^{(i)(e,o)(2)}-\widetilde{A}_{nm2}^{(i)(e,o)(1)}R_{2n}^{M}\Phi_{2n}\right]R_{1n}^{M}\Phi_{1n}, \quad (37)$$

$$\widetilde{A}_{nm}^{(s)(e,o)(2)}=-(DET_M)^{-1}\times$$
$$\times\left[\widetilde{A}_{nm2}^{(1)(e,o)(2)}-\left(\widetilde{A}_{nm2}^{(i)(e,o)(1)}+\widetilde{A}_{nm1}^{(i)(e,o)(2)}R_{1n}^{M}\Phi_{1n}\right)R_{2n}^{M}\Phi_{2n}\right]. \quad (38)$$

При этом использованы обозначения

$$\Phi_{1n} = \frac{\zeta_n^{(2)}(x_1)}{\hat{\zeta}_n^{(1)}(x_1)}, \qquad \Phi_{2n} = \frac{\zeta_n^{(1)}(x_2)}{\hat{\zeta}_n^{(2)}(x_2)},$$

$$DET_E = 1 - R_{1n}^E R_{2n}^E \Phi_{1n}\Phi_{2n},$$

$$DET_M = 1 - R_{1n}^M R_{2n}^M \Phi_{1n}\Phi_{2n}.$$

В разложении среднего поля эффективные "коэффициенты" отражения сферических волн электрических и магнитных мультиполей от поверхности $r = a_j$ (j=1, 02) определены следующим образом:

$$\begin{cases} R_{1n}^E = -\dfrac{\ln'\zeta_n^{(2)}(x_1) + i\eta_{1eff}^E\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}}{\ln'\zeta_n^{(1)}(x_1) + i\eta_{1eff}^E\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}}, \\ R_{2n}^E = -\dfrac{\ln'\hat{\zeta}_n^{(1)}(x_2) - i\eta_{2eff}^E\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}}{\ln'\hat{\zeta}_n^{(2)}(x_2) - i\eta_{2eff}^E\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}}, \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} R_{1n}^M = -\dfrac{1 - i\eta_{1eff}^M\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\ln'\hat{\zeta}_n^{(2)}(x_1)}{1 - i\eta_{1eff}^M\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\ln'\hat{\zeta}_n^{(1)}(x_1)}, \\ R_{2n}^M = -\dfrac{1 + i\eta_{2eff}^M\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\ln'\hat{\zeta}_n^{(1)}(x_2)}{1 + i\eta_{2eff}^M\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\ln'\hat{\zeta}_n^{(2)}(x_2)}. \end{cases} \tag{40}$$

Эффективные поверхностные импедансы волновода

Выражения для эффективных импедансов $\eta_{jeff}^{E.M}$ можно представить в виде трех слагаемых:

$$i\eta_{jeff}^{E.M}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \approx i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\Delta_o\eta_j^{E.M} + \Delta_1\eta_j^{E.M} + \Delta_2\eta_j^{E.M}\right), \tag{41}$$

где

$$\begin{cases} i\Delta_o\eta_j^E\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} = (-1)^{j-1}\dfrac{k^2\sigma_j^2}{2}\dfrac{2}{x_j}\left[1 - \dfrac{2n(n+1)}{x_j^2}\right], \\ i\Delta_o\eta_j^M\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} = (-1)^{j-1}\dfrac{k^2\sigma_j^2}{2}\dfrac{2}{x_j}, \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} i\Delta_1\eta_j^E\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} = (-1)^{j-1}x_j\left(O_{+5nj} + O_{+6nj}\right), \\ i\Delta_1\eta_j^M\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} = (-1)^{j-1}x_j\left(O_{-5nj} + O_{-6nj}\right), \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} i\Delta_2\eta_j^E\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} = x_j\left[i\eta_j\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}O_{+jn}^{(1)} - (1)^{j-1}O_{+jn}\right], \\ i\Delta_2\eta_j^M\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} = x_j\left[i\eta_j\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}O_{-jn} + (-1)^{j-1}O_{-jn}^{(1)}\right]. \end{cases} \tag{44}$$

Обозначение $x_j = ka_j$ было введено ранее после формул (17)-(20). Если предположить наличие бесконечно малого затухания в среде, то предельный переход $x_2 \to \infty$ приводит к $\zeta_n^{(1)}(x_2) \to 0$, $\zeta_n^{(2)}(x_2) \to \infty$, $\Phi_{2n} \to 0$ и соответственно

$$\begin{cases} \widetilde{B}_{nm}^{(S)(e,o)(1)} \to -\left[\widetilde{B}_{nm1}^{(i)(e,o)(1)} - \widetilde{B}_{nm1}^{(i)(e,o)(2)} R_{1n}^E \Phi_{1n}\right], \\ \widetilde{B}_{nm}^{(S)(e,o)(2)} \to 0, \end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases} \widetilde{A}_{nm}^{(S)(e,o)(1)} \to -\left[\widetilde{A}_{nm1}^{(i)(e,o)(1)} - \widetilde{A}_{nm1}^{(i)(e,o)(2)} R_{1n}^M \Phi_{1n}\right], \\ \widetilde{A}_{nm}^{(S)(e,o)(2)} \to 0, \end{cases} \tag{46}$$

где R_{1n}^E, R_{1n}^M – предельные значения при $x_2 \to \infty$.

Таким образом, при $x_2 \to \infty$ в когерентно рассеянном поле остаются лишь волны, уходящие от сферы $r = a_1$. Поскольку $\Delta_0\eta_1^{E.M}$, $\Delta_1\eta_1^{E.M}$ от x_2 не зависят, то предельные значения $R_{1n}^{E.M}$ определяются предельными значениями $\Delta_2\eta_1^{E.M}$. Величина Q_j в (34) может быть представлена в виде:

$$Q_j = x_j\left[\widetilde{\Omega}_{\tilde{j}}^{\pm}\left(\hat{\zeta}_l^{(\tilde{\alpha})}\right) / \,\mathrm{d}\widetilde{\mathrm{e}}\mathrm{t}_l^{\pm}\right]\left(\delta_{\alpha j} + \delta_{\tilde{\alpha} j}\Phi_{1l}\Phi_{2l}\right), \tag{47}$$

где

$$\widetilde{\Omega}_{\tilde{j}}^{+}(\hat{\zeta}_l^{(\tilde{\alpha})}) = \ln'\hat{\zeta}_l^{(\tilde{\alpha})}\left(x_{\tilde{j}}\right) + i\eta_{\tilde{j}}(-1)^{\tilde{j}-1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}},$$

$$\widetilde{\Omega}_{\tilde{j}}^{-}(\hat{\zeta}_l^{(\tilde{\alpha})}) = 1 - i\eta_{\tilde{j}}(-1)^{\tilde{j}-1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ln'\hat{\zeta}_l^{(\tilde{\alpha})}\left(x_{\tilde{j}}\right),$$

$$\mathrm{d}\widetilde{\mathrm{e}}\mathrm{t}_l^{\pm} = \widetilde{\Omega}_1^{\pm}\left(\hat{\zeta}_l^{(1)}\right)\widetilde{\Omega}_2^{\pm}\left(\hat{\zeta}_l^{(2)}\right) - \Phi_{1l}\Phi_{2l}\widetilde{\Omega}_1^{\pm}\left(\hat{\zeta}_l^{(2)}\right)\widetilde{\Omega}_2^{\pm}\left(\hat{\zeta}_l^{(1)}\right)$$

В пределе $x_2 \to \infty$ получаем $Q_1 \to \delta_{1\alpha} / \widetilde{\Omega}_1^{\pm}\left(\hat{\zeta}_l^{(1)}\right)$, т. е. и в некогерентном рассеянном поле остаются лишь уходящие от $r = a_1$ волны (α=1). При этом выражения $O_{\pm jn}^{(1)}$, $O_{\pm jn}$ совпадают с $O_{\pm n}^{(1)}$ и $O_{\pm n}$ из [5] (формулы (31),(32)).

Для больших, но конечных значений $x_1, x_2, n_4 >> 1$ в зависимостях (25), (26), (29), (30) возможен переход от суммирования к интегрированию, как это сделано в [5].

Литература

1. R. Schiffer. J. Opt. Soc. Am. 1989, **A6**, No. 2, pp. 385-402.
2. H. Ogura, N. Takahashi. J. Math. Phys. 1990, **31**, No. 1, pp. 61-75.
3. A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin. IEE Proc. 1991, **H-138**, pp. 147-150.
4. A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin. Journ. Electr. Wav. Appl. (JEWA). 1991, No. 8, pp. 897-907.
5. A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin. Радиофиз. и Радиоастр. 1997, **2**, No. 2, с. 120-126.
6. A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin. Радиофиз. и Радиоастр. 1997, **2**, No. 2, с. 127-136.
7. Y. A. Stratton. Electromagnetism Theory. New York, Mc Grav-Hill, 1941, 453 pp.
8. N. Ya. Vilenkin. Special Functions and the Theory of Group Repvesentations. English translation. American Mathematical Society, Providence, 1968, 588 pp.
9. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. А. Херсонский. Квантовая теория углового момента, Наука, Ленинград, 1975, 439 с.

Coherent Electromagnetic Field and Effective Surface Impedance in Statistically Rough Spherical Waveguide

A. S. Bryukhovetski

Using Bourret's approximation, the Fourier expansion in the longitudinal operator eigenfunctions of the mean electromagnetic field is determined for a spherical waveguide. The statistically rough waveguide walls have small impedances η_1 and η_2. All the terms quadratic in the roughness height are taken into account in boundary conditions including those proportional to η_1 and η_2.

The reflection coefficients are calculated for spherical waves in the mean (coherent) field expansion. They are expressed by means of the effective impedance for spherical multipole waves. The transition to the case of solitary sphere studied earlier is investigated.