

Метод аналитической регуляризации в задачах дифракции волн на диэлектрических цилиндрах произвольного поперечного сечения

С. В. Борискина, А. И. Носич*

Радиофизический факультет, Харьковский государственный университет

Украина, 310077, Харьков, пл. Свободы, 4

*Институт радиофизики и электроники НАН Украины,
Украина, Харьков, 310085, ул. Ак. Проскуры, 12

Статья поступила в редакцию 23 марта 1999 г.

Построен эффективный алгоритм решения двумерной задачи рассеяния волн на диэлектрических цилиндрах произвольного поперечного сечения, основанный на концепции аналитической регуляризации. Путем представления полей в виде поверхностных потенциалов по контуру рассеивателя задача сведена к системе интегральных уравнений типа Фредгольма первого рода. С помощью выделения и последующего аналитического обращения части ядра интегрального оператора, соответствующей круговому цилиндру, эти уравнения преобразованы в бесконечномерное матричное уравнение Фредгольма второго рода, которое решалось численно с гарантированной точностью. Изучены свойства разработанного алгоритма и проведено его сравнение с алгоритмом, основанным на обращении статической части интегрального оператора. Приводятся результаты расчетов для цилиндров эллиптического и прямоугольного поперечных сечений и различных углов падения плоских E - и H -поляризованных волн.

Розроблено ефективний алгоритм розв'язання двовимірної задачі розсіяння хвиль на діелектричних циліндрах довільних поперечних перерізів, що базується на концепції аналітичної регуляризації. Використовуючи представлення полів у вигляді поверхневих потенціалів по контуру розсіювача, задачу зведено до системи інтегральних рівнянь типу Фредгольма першого роду. За допомогою вилучення і наступного аналітичного обертання частини ядра інтегрального оператора, яка відповідає круговому циліндру, ці рівняння перетворені у нескінченновимірне матричне рівняння Фредгольма другого роду, яке розв'язувалось чисельно з гарантованою точністю. Вивчено властивості розробленого алгоритму і проведено його порівняння з алгоритмом, що базується на обертанні статичної частини інтегрального оператора. Наведено результати розрахунків для циліндрів еліптичного і прямокутного перерізів та різних кутів падіння плоских E - та H -поляризованих хвиль.

1. Введение

Известно (см., например, [1-7]), что задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрических объектах могут быть сведены к интегральным уравнениям (ИУ) различных размерностей и типов. ИУ дают универсальный математический подход к решению таких задач, поскольку от формы рассеивателя зависит только интервал интегрирования и функциональный класс решения, но не ядра ИУ.

Все теоретические работы, посвященные построению и решению ИУ для различных задач рассеяния на изотропных диэлектрических объектах произвольной формы можно условно разделить на два класса. В первом случае задача сводится к интегральным уравнениям либо по объему тела в трехмерном случае либо по поперечному сечению в двумерном случае [3,4,7-11]; во втором – по границе (в двумерном случае – по контуру поперечного сечения) [1,2,5,6,12-18].

Несмотря на широкую сферу применения, ИУ по области, занятой телом, имеют существенный недостаток – размерность уравнения совпадает с размерностью задачи, что приводит к необходимости аппроксимации интегрального оператора в большом числе узлов и решению получаемых матричных уравнений высокого порядка. Таким образом, резко ограничивается диапазон относительных размеров тел, для которых можно получить численные решения. Поэтому для вычислений более выгодным является сведение задачи к граничным ИУ. Наиболее просто это осуществимо в том случае, когда диэлектрическая проницаемость тела постоянна. Для неоднородного рассеивателя использование контурных ИУ тоже возможно [18], однако ценой значительного усложнения ядер ИУ. Интегральные уравнения по границе однородного рассеивателя могут быть выведены различными методами. Самыми распространенными из них являются:

– Метод представления полей в виде поверхностных потенциалов простого слоя, двойного слоя или их комбинации на границе рассеивателя. При этом получают ИУ первого рода относительно неизвестных плотностей потенциалов полей внутри и вне рассеивателя [2,12,14-16].

– Метод, основанный на применении второй формулы Грина, который приводит к системе ИУ второго рода относительно значений искомой функции поля и ее нормальной производной на контуре поперечного сечения [1,4-6,13].

Впервые задача дифракции на однородном теле с произвольной гладкой поверхностью была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, распространенному на границу области, занятой телом, в работах К. Мюллера [1], поэтому такие уравнения иногда называют уравнениями Мюллера. Им же были сформулированы условия однозначной разрешимости ИУ и доказаны теоремы существования и единственности решения. Численное решение таких ИУ может быть получено с помощью любой разумной схемы дискретизации. Например, это может быть метод коллокаций, использованный в [13], или метод Галеркина. И в том, и в другом случае сходимость алгоритма вытекает из теорем Фредгольма.

Ядра ИУ первого рода, получаемых с помощью метода поверхностных потенциалов, содержат функции Грина с логарифмической особенностью и их нормальные производные. Прямые численные методы решения таких ИУ не имеют универсальной сходимости и малоэффективны. Исключение составляет метод саморегуляризации [19,5], однако область его применимости ограничена ИУ с интегрируемой особенностью. Поэтому возникает необходимость аналитического преобразования сингулярных ИУ к интегральным либо бесконечномерным уравнениям Фредгольма второго рода. Для этого нужно обратить сингулярную часть оператора ИУ, т. е. проделать аналитическую регуляризацию. Выделить сингулярную часть функции Грина можно различными способами. Один из наиболее очевидных – выделение функции G_1 , соответствующей статической задаче [14-16]:

$$G_1(t, t_s) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t - t_s}{2} \right|. \quad (1)$$

Далее, можно воспользоваться тем, что функции $\{e^{imt}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ образуют полную систему ортогональных собственных функций интегральных операторов с ядром (1) и других по-

добных операторов. Для них, в частности, справедливы соотношения:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt_s} \ln \left| \sin \frac{t - t_s}{2} \right| dt_s = -2\pi e^{imt} \begin{cases} \ln 2, & m = 0 \\ 1/2m, & m \neq 0 \end{cases}, \\ m = 0, \pm 1, \dots$$

Используя эту систему в качестве базисных функций в проекционной схеме Галеркина, можно совместить дискретизацию ИУ с процедурой частичного аналитического обращения. При этом элементы матричного уравнения получаются после двойного интегрирования гладкой функции и будут мало отличаться от элементов диагональной матрицы в случае задачи, близкой к статической, т. е. для рассеивателя малых размеров, мало отличающегося от кругового цилиндра. Такой метод выделения особенности ядра был предложен и обоснован в [16] и применялся в [15] для расчета характеристик рассеяния поверхностной волны открытого диэлектрического волновода на диэлектрических цилиндрах, а также в задаче о собственных волнах диэлектрических волноводов с произвольным сечением [17].

Однако для цилиндров не малых волновых размеров более выгодным представляется полуобращение интегрального оператора, основанное на выделении частотно-зависимой сингулярной функции, соответствующей задаче рассеяния на “эталонном” круговом цилиндре некоторого радиуса a :

$$G_2(t, t_s) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(2ka \left| \sin \frac{t - t_s}{2} \right| \right). \quad (2)$$

Далее также можно использовать функции $\{e^{imt}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ в качестве базисных функций в схеме дискретизации Галеркина, поскольку они образуют полную систему ортогональных собственных функций интегральных операторов с ядром (2). При этом имеет место соотношение:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt_s} H_0^{(1)} \left(2ka \left| \sin \frac{t - t_s}{2} \right| \right) dt_s = \\ = 2\pi e^{imt} J_m(ka) H_m^{(1)}(ka), \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Элементы регуляризованного матричного уравнения, полученные после дискретизации ИУ, будут мало отличаться от элементов диагональной матрицы, возникающей в задаче рассеяния на цилиндре с формой поперечного сечения, близкой к кругу радиуса a , ограниченного гладким контуром с кривизной, равномерно близкой к $1/a$. Такой метод использовал-

ся при решении граничных ИУ в задачах рассеяния плоских волн и волноводных мод на металлических и импедансных телах и задачи рассеяния плоской волны на эллиптическом диэлектрическом цилиндре [11,14]. При таком подходе граничная задача сначала сводится к системе сингулярных ИУ первого рода типа Фредгольма, которая затем преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений Фредгольма второго рода путем разложения известных и искомых функций в ряды Фурье по угловым экспонентам. Используемый метод можно охарактеризовать как проекционную схему Галеркина со специальным регуляризирующим базисом. Наиболее трудоемкой частью алгоритма решения, основанного на такой схеме, является эффективное вычисление коэффициентов разложения ядер ИУ в двойные ряды Фурье. При этом роль параметра a оставалась неясной; обычно его выбирали из условия равенства площадей поперечного сечения исследуемого и "эталонного" цилиндров [11]. Скорость сходимости алгоритмов также не была исследована.

В настоящей работе рассмотрена задача рассеяния плоских волн на гладком диэлектрическом цилиндре произвольного поперечного сечения. Для вывода системы сингулярных интегральных уравнений первого рода было использовано представление полей в виде потенциалов простого слоя. Полученные ИУ были затем регуляризованы путем выделения и аналитического обращения "динамической" функции (2), соответствующей задаче рассеяния на эталонном круговом цилиндре. Основной целью данной работы является изучение свойств построенного численного алгоритма и его сравнение с алгоритмом, основанным на обращении статической части ИУ, описываемой функцией (1).

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим двумерную задачу рассеяния плоской электромагнитной волны, падающей под углом γ к оси абсцисс ($U^{inc} = e^{ikx \cos \gamma + iky \sin \gamma}$), на однородном диэлектрическом цилиндре с проницаемостью ϵ_b произвольного поперечного сечения S , ограниченного достаточно гладкой кривой L_s , (рис. 1). Полное поле может быть охарактеризовано одной скалярной функцией U , которая представляет собой E_z или H_z компоненту в зависимости от поляризации, и может быть записано следующим образом:

$$U = \begin{cases} U^{inc} + U^{sc}, & \vec{r} \notin S; \\ U^{res}, & \vec{r} \in S; \end{cases} \quad (3)$$

где U^{inc} – падающее поле; U^{sc} – поле, рассеянное на цилиндре; U^{res} – поле внутри рассеивателя. Полное поле должно удовлетворять уравнению Гельмгольца с соответствующими коэффициентами в каждой среде, условиям сопряжения на контуре L_s , а также условию излучения Зоммерфельда.

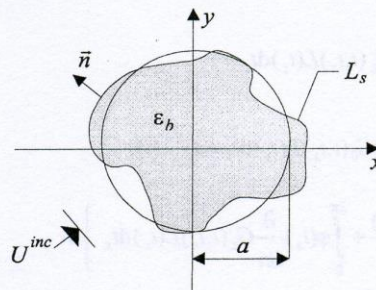


Рис. 1. Геометрия задачи. L_s – произвольный гладкий контур, окружность радиуса a – эталонный контур

Представим поля в виде потенциалов простого слоя на контуре поперечного сечения рассеивателя. Из условий сопряжения на контуре L_s получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & \int_{L_s} \varphi(\vec{r}_s) G_\epsilon(\vec{r}, \vec{r}_s) dl_s - \\ & - \int_{L_s} \psi(\vec{r}_s) G_0(\vec{r}, \vec{r}_s) dl_s = U^{inc}(\vec{r}), \\ & \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial n} \int_{L_s} \varphi(\vec{r}_s) G_\epsilon(\vec{r}, \vec{r}_s) dl_s - \\ & - \int_{L_s} \psi(\vec{r}_s) G_0(\vec{r}, \vec{r}_s) dl_s = \frac{\partial}{\partial n} U^{inc}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к контуру, L_s – замкнутая дважды непрерывно дифференцируемая кривая. Плотности потенциалов φ и ψ являются неизвестными функциями и подлежат определению. Функции G_ϵ , G_0 в ядрах ИУ (4) задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} G_\epsilon(\vec{r}, \vec{r}_s) &= \alpha \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{\epsilon_b}|\vec{r} - \vec{r}_s|), \\ G_0(\vec{r}, \vec{r}_s) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}_s|), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\alpha = \epsilon_b(\vec{r})$ в случае H -поляризации и $\alpha = 1$ в случае E -поляризации. Будем полагать, что

контур L_s однозначно описывается параметрическими уравнениями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, где t – полярный угол. Производя замену переменных в уравнениях (4) и используя свойства предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя [2], преобразуем (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \varphi(t_s) G_\varepsilon(t, t_s) L(t_s) dt_s - \\ & - \int_0^{2\pi} \psi(t_s) G_0(t, t_s) L(t_s) dt_s = U^{inc}(t), \\ & \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\varphi(t)}{2} + \int_0^{2\pi} \varphi(t_s) \frac{\partial}{\partial n} G_\varepsilon(t, t_s) L(t_s) dt_s \right\} + \\ & + \frac{\psi(t)}{2} - \int_0^{2\pi} \psi(t_s) \frac{\partial}{\partial n} G_0(t, t_s) L(t_s) dt_s = \frac{\partial}{\partial n} U^{inc}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Вследствие того, что после параметризации мы переходим к интегрированию по окружности на плоскости (r, t) , в ядрах ИУ появляется коэффициент

$$L(t_s) = \sqrt{\left(\frac{dx_s}{dt_s}\right)^2 + \left(\frac{dy_s}{dt_s}\right)^2}, \quad (7)$$

определяемый формой первоначального контура. Алгоритм, связанный с такой параметризацией, будет пригоден по крайней мере для цилиндров с контуром сечения из класса так называемых “звездных” кривых (т. е. таких, что луч, проведенный из некоторой точки внутренней области, пересекает L_s только в одной точке).

3. Аналитическая регуляризация

Согласно выражениям (5), свойства ядер первого из уравнений в системе (6) определяются свойствами функций Ханкеля $H_0^{(1)}(k\sqrt{\varepsilon_b}|\bar{r} - \bar{r}_s|)$, $H_0^{(1)}(k|\bar{r} - \bar{r}_s|)$. Известно, что такие функции имеют логарифмическую особенность при $\bar{r} \rightarrow \bar{r}_s$, поскольку

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi} \ln z + F(z), \quad (8)$$

где $F(z)$ – регулярная функция z при $z \rightarrow 0$.

Ядрами интегралов во втором из уравнений (6) являются нормальные производные функций Грина на контуре рассеивателя. Можно показать [5], что на контуре с непрерывной

кривизной к эти ядра имеют конечные предельные значения при $\bar{r} \rightarrow \bar{r}_s$, определяемые величиной кривизны контура:

$$\lim_{t \rightarrow t_s} \frac{\partial}{\partial n} G_0(t, t_s) = \frac{2}{i\pi} \kappa(t). \quad (9)$$

Выделим сингулярные (в первом ИУ) и главные (во втором ИУ) при $\bar{r} \rightarrow \bar{r}_s$ части ядер интегральных уравнений (6) следующим образом:

$$G_{\varepsilon(0)}(t, t_s) = G_{\varepsilon(0)}^0(t, t_s) + K_{\varepsilon(0)}(t, t_s), \quad (10)$$

$$K_{\varepsilon(0)}(t, t_s) = G_{\varepsilon(0)}(t, t_s) - G_{\varepsilon(0)}^0(t, t_s);$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G_{\varepsilon(0)}(t, t_s) = \frac{\partial}{\partial n} G_{\varepsilon(0)}^0(t, t_s) + \tilde{K}_{\varepsilon(0)}(t, t_s), \quad (11)$$

$$\tilde{K}_{\varepsilon(0)}(t, t_s) = \frac{\partial}{\partial n} G_{\varepsilon(0)}(t, t_s) - \frac{\partial}{\partial n} G_{\varepsilon(0)}^0(t, t_s);$$

где функции $K_{\varepsilon(0)}(t, t_s)$ и $\tilde{K}_{\varepsilon(0)}(t, t_s)$ не имеют особенностей при $t \rightarrow t_s$, и

$$G_\varepsilon^0(t, t_s) = \alpha \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(2ka\sqrt{\varepsilon_b} \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \right), \quad (12)$$

$$G_0^0(t, t_s) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(2ka \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} G_\varepsilon^0(t, t_s) &= -\alpha \frac{ik\sqrt{\varepsilon_b}}{4} \times \\ & \times \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| H_1^{(1)} \left(2ka\sqrt{\varepsilon_b} \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} G_0^0(t, t_s) &= -\frac{ik}{4} \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \times \\ & \times H_1^{(1)} \left(2ka \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \right) \end{aligned}$$

Интегральные операторы с ядром в виде любой из выделенных сингулярных функций (12), (13) имеют одну и ту же систему ортогональных собственных функций: $\{e^{imt}\}_{m=-\infty}^{\infty}$. Следовательно, использование этих функций в проекционной схеме Галеркина приводит к аналитической регуляризации. Действительно, представим неизвестные функции $\varphi(t_s)$ и $\psi(t_s)$ из (4) и (6) в виде следующих разложений:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}(t_s) \\ \tilde{\psi}(t_s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi(t_s) \\ \psi(t_s) \end{Bmatrix} L(t_s) = \frac{2}{i\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{Bmatrix} e^{int_s}. \quad (14)$$

Раскладывая функции в ядрах и в правых частях ИУ (6) в аналогичные ряды Фурье и производя почленное интегрирование и дифференцирование, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \alpha \varphi_m H_m^{(1)}(ka\sqrt{\epsilon_b}) J_m(ka\sqrt{\epsilon_b}) - \psi_m H_m^{(1)}(ka) J_m(ka) \\ & + \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} \varphi_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{mn} \psi_n = E_m, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_m \left(ka\sqrt{\epsilon_b} H_m^{(1)}(ka\sqrt{\epsilon_b}) J'_m(ka\sqrt{\epsilon_b}) + \frac{i}{\pi\alpha} \right) - \\ & - \psi_m \left(ka H_m^{(1)}(ka) J'_m(ka) - \frac{i}{\pi} \right) + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(ka\sqrt{\epsilon_b} C_{mn} - \frac{i}{\pi} L_{m-n} \right) \frac{\varphi_n}{\alpha} - \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(ka D_{mn} + \frac{i}{\pi} L_{m-n} \right) \psi_n = ka F_m, \\ & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

где

$$A_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A(t, t_s) e^{-imt} e^{int_s} dt dt_s, \quad (16)$$

а матричные элементы B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} определяются с помощью аналогичных формул. Здесь все функции, разлагаемые в двойные ряды Фурье, являются гладкими при $t \rightarrow t_s$. Они и их предельные значения имеют следующий вид:

$$A(t, t_s) = H_0^{(1)}(k\sqrt{\epsilon_b} R) - H_0^{(1)} \left(2ka\sqrt{\epsilon_b} \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \right), \quad (17)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s} A(t, t_s) = \frac{2i}{\pi} \ln \left| \frac{L(t_s)}{a} \right|, \quad (18)$$

$$B(t, t_s) = H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)} \left(2ka \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \right), \quad (19)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s} B(t, t_s) = \frac{2i}{\pi} \ln \left| \frac{L(t_s)}{a} \right| \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C(t, t_s) &= \frac{x'(t)(y-y_s) - y'(t)(x-x_s)}{L(t)} \times \\ & \times \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{\epsilon_b} R)}{R} + \\ & + \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| H_1^{(1)} \left(2ka\sqrt{\epsilon_b} \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s} C(t, t_s) = \frac{2}{i\pi k \sqrt{\epsilon_b}} (\kappa(t_s) - 1/a) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} D(t, t_s) &= \frac{x'(t)(y-y_s) - y'(t)(x-x_s)}{L(t)} \times \\ & \times \frac{H_1^{(1)}(kR)}{R} + \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| H_1^{(1)} \left(2ka \left| \sin \frac{t-t_s}{2} \right| \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s} D(t, t_s) = \frac{2}{i\pi k} (\kappa(t_s) - 1/a), \quad (24)$$

$$L_m = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L(t)} e^{-imt} dt, \quad (25)$$

где $R = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}$; J_m и $H_m^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля, причем штрих означает дифференцирование по всему аргументу.

Правые части (15) представляют собой коэффициенты разложения в ряд Фурье функции падающего поля и ее нормальной производной на контуре рассеивателя и задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(e^{ik(x(t)\cos\gamma + y(t)\sin\gamma)} - e^{ika\cos(t-\gamma)} \right) e^{-imt} dt + \\ & + i^m J_m(ka) e^{-im\gamma}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\gamma \cdot dy/dt - \sin\gamma \cdot dx/dt}{L(t)} \times \right. \\ & \times e^{ik(x(t)\cos\gamma + y(t)\sin\gamma)} - \cos(t-\gamma) \cdot e^{ika\cos(t-\gamma)} \left. \right) \times \\ & \times e^{-imt} dt + i^m J'_m(ka) e^{-im\gamma}. \end{aligned}$$

Видно, что матричные элементы A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} обращаются в нуль, а элементы L_{m-n} становятся равными δ_{mn} в случае кругового контура L_s . Следуя результатам [16], можно показать, что матричные операторы A , B , C , D компактны в пространстве l_2 . Если падающее поле — плоская волна, то коэффициенты в правой части принадлежат тому же пространству l_2 . Заметим, что если контур L_s представляет

собой ломаную кривую, т. е. кривую с изломами или точками с бесконечной кривизной κ , то операторы C и D теряют компактность в l_2 .

4. Изучение свойств алгоритма и результаты расчетов

Для изучения свойств разработанного алгоритма и оценки его эффективности проведем сравнение с алгоритмом, основанным на выделении и аналитическом обращении статической части интегрального оператора. В качестве рассеивателя будем рассматривать диэлектрический цилиндр прямоугольного, со сглаженными углами, поперечного сечения, характеризуемый так называемой функцией "суперпрямоугольника":

$$\left(\frac{x}{l_r \cdot a_r}\right)^{2\nu} + \left(\frac{y}{a_r}\right)^{2\nu} = 1. \tag{27}$$

Контур, описываемый (27), является гладким, однако чем больше величина параметра ν , тем ближе форма контура к ломаному прямоугольнику (рис. 2). При этом, как следует из (27), кривизна контура в "угловых точках" пропорциональна $l_r \cdot \nu$ (рис. 3). Случай $\nu=1$ соответствует эллиптическому контуру (см. рис. 2). Функция (27) может быть параметризована следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a_r l_r \cos t \cdot r(t), \quad y = a_r \sin t \cdot r(t), \\ r(t) &= \left(|\cos t|^{2\nu} + |\sin t|^{2\nu} \right)^{-1/2\nu}, \end{aligned} \tag{28}$$

где $0 \leq t \leq 2\pi$.

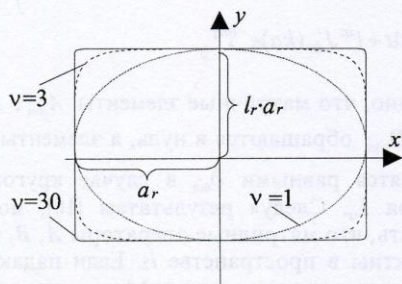


Рис. 2. "Суперпрямоугольник": контур, определяемый функцией (27)

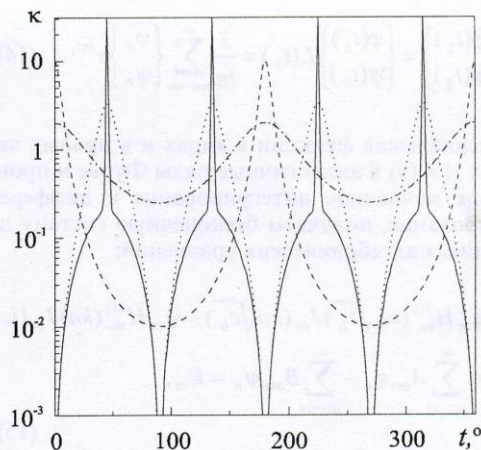


Рис. 3. Изменение кривизны κ вдоль контуров "суперпрямоугольников" с различными значениями параметров ν и l_r ($ka_r=1$):

— $\nu=30, l_r=1$; - - - $\nu=1, l_r=10$;
- · - $\nu=1, l_r=2$; · · · $\nu=3, l_r=1$

Получим формулы для расчета диаграммы рассеяния в дальней зоне. Разложения полей, которые мы использовали при построении алгоритма, приводят нас к следующему выражению для диаграммы:

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Psi_m e^{imt} \right) \cdot e^{-i \cos \varphi k x(t)} e^{-i \sin \varphi k y(t)} dt. \tag{29}$$

Несмотря на то что матричное уравнение (15) гарантирует сходимость алгоритма, оно ничего не говорит о скорости сходимости. Для иллюстрации этой скорости были проведены расчеты зависимости величины ошибки, связанной с усечением матрицы системы, как функции порядка усечения N для коэффициентов разложения поля внутри рассеивателя (рис. 4). Для сравнения на тех же графиках изображены кривые, соответствующие величине ошибки усечения при расчете с помощью алгоритма, основанного на выделении статической части интегрального оператора. В норме пространства l_2 эта ошибка вычисляется следующим образом:

$$e(N) = \left(\frac{\sum_{|n| \leq N} |\varphi_n^{N+1} - \varphi_n^N|^2}{\sum_{|n| \leq N} |\varphi_n^N|^2} \right)^{1/2}. \tag{30}$$

Видно (рис. 4, а), что скорость сходимости как одного, так и второго алгоритма существенно зависит от формы контура поперечного сечения, — чем ближе функция, описывающая этот

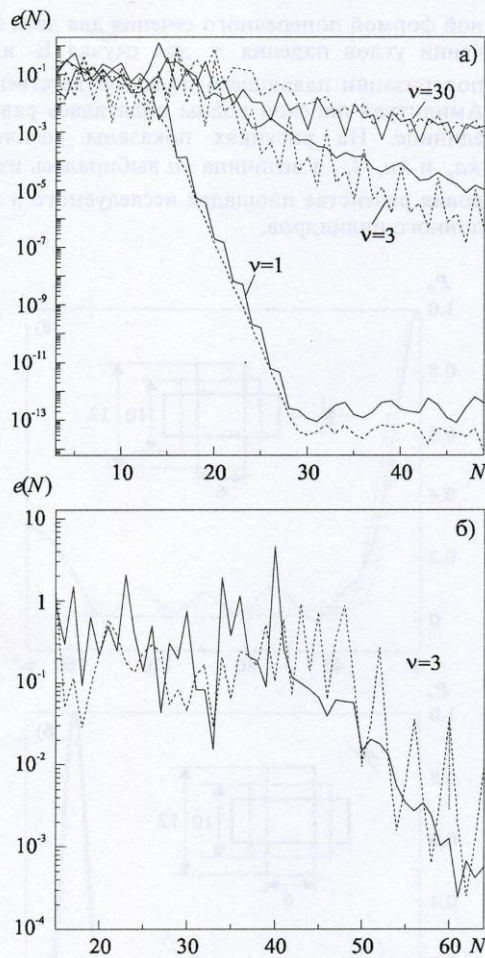


Рис. 4. Ошибка усечения как функция порядка матрицы для рассеяния плоской E-волны: а) на диэлектрических цилиндрах с параметрами: $ka = 4.5$, $ka_r = 4$, $l_r = 1.25$, $\epsilon_b = 10 + 0.0001i$ и разными величинами ν ; б) на цилиндре большого волнового размера: $ka = 20$, $ka_r = 20$, $l_r = 1$, $\epsilon_b = 4 + 0.0001i$, $\nu = 3$.
 ----- – выделение статической части интегрального оператора,
 ————— – выделение динамической части интегрального оператора

контур, к кругу – в смысле как отклонения по радиусу, так и кривизны, тем быстрее величина ошибки стремится к нулю. Кроме того, расчеты показали, что для рассеивателей небольших волновых размеров (до 10 длин волн в диэлектрике) оба алгоритма независимо от формы контура практически равноценны с точки зрения скорости сходимости. Преимущества алгоритма, основанного на аналитическом обращении “динамической” части интегрального оператора, соответствующей круговому кон-

туру, становятся очевидными при увеличении размера рассеивателя (рис. 4, б). Согласно нашим исследованиям, выбор радиуса a “эталонного” цилиндра не играет заметной роли, пока его величина не отличается от радиуса “цилиндра равной площади” примерно в два раза. С точки зрения сходимости, поведение алгоритмов для обеих поляризаций аналогично друг другу. Это не вызывает удивления, поскольку исходные ИУ для E- и H-поляризаций (4) отличаются только коэффициентом α . Можно заключить, что для того чтобы получить решение с заданной точностью, перед расчетами необходимо провести исследование ошибки усечения как функции числа уравнений в усеченном матричном уравнении. Все результаты, приведенные далее в данной работе, были получены с точностью до трех значащих цифр.

Для расчета матричных элементов необходимо вычислить цилиндрические функции и коэффициенты двойных рядов Фурье: A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} и D_{mn} . Цилиндрические функции действительных и комплексных аргументов рассчитывались с помощью рекурсивной процедуры. Вычисление коэффициентов A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} требует двойного численного интегрирования, что является одной из частей алгоритма, требующих наибольших затрат машинного времени. Как известно [20,21], ускорить вычисление интегралов такого вида можно с помощью применения быстрого преобразования Фурье (БПФ). Действительно, разбивая область интегрирования на M^2 подобластей и вводя обозначения: $\Delta = 2\pi/M$, $t_l = l\Delta$, $t_{sj} = j\Delta$, мы можем аппроксимировать интегралы (16) следующими суммами:

$$A_{mn} = \frac{1}{M^2} \sum_{l=1}^M \sum_{j=1}^M A(t_l, t_{sj}) e^{-i \frac{2\pi l}{M} m} e^{i \frac{2\pi j}{M} n}, \quad (31)$$

$-N \leq m, n \leq N.$

Аналогичные выражения могут быть получены и для коэффициентов B_{mn} , C_{mn} и D_{mn} . Видно, что выражение (31) представляет собой двойное дискретное преобразование Фурье, что и предопределяет использование алгоритма БПФ. Кроме того, поскольку интегрируемые функции быстро осциллируют, для повышения точности БПФ проводилась специальная обработка выходных данных. Время вычислений менялось в зависимости от размера рассеивателя. Например, для расчета диаграммы рассеяния на диэлектрическом цилиндре с параметрами: $ka_r=5$, $l_r=1$, $\nu=30$, $\epsilon_b=10+0.0001i$ –

с точностью до трех значащих цифр, необходимо выбрать порядок усечения $N=50$; при расчете на компьютере Pentium-II 333MHz PC с двойной точностью с помощью MS-DOS Fortran-программы для этого потребовалось 30 секунд.

На рис. 5 и 6 представлены нормированные диаграммы рассеяния на цилиндрах с различ-

ной формой поперечного сечения для двух значений углов падения γ для случая E- и H-поляризации падающего поля соответственно. Амплитуда плоской волны полагалась равной единице. На рисунках показаны величины ka_r и $ka_r \cdot l_r$, а величина ka выбиралась из условия равенства площадей исследуемого и эталонного цилиндров.

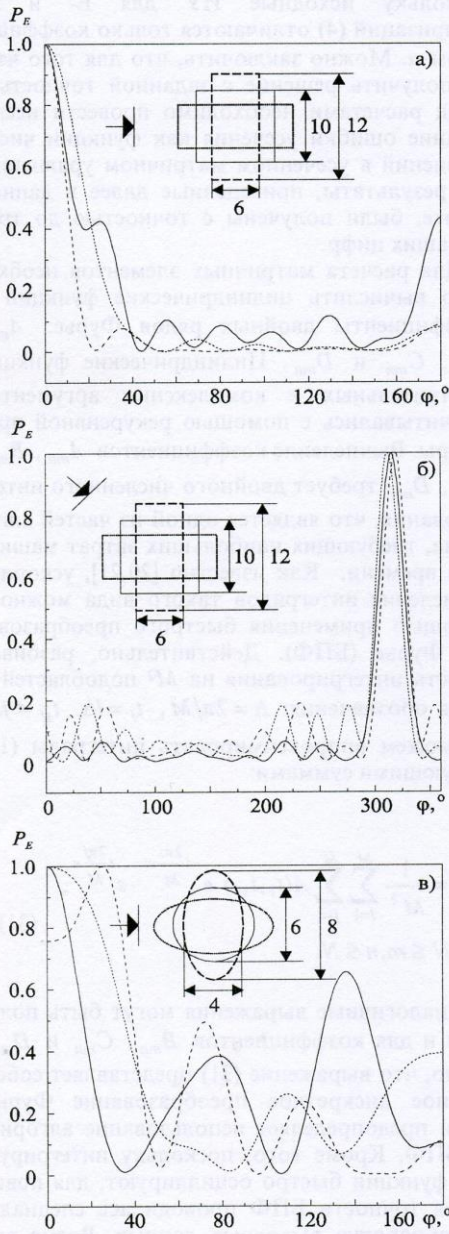


Рис. 5. Нормированные диаграммы рассеяния P_E плоской E-поляризованной волны: а), б) $\epsilon_b = 3 + 0.01i$, $\nu = 30$; в) $\epsilon_b = 10 + 0.01i$, $\nu = 1$

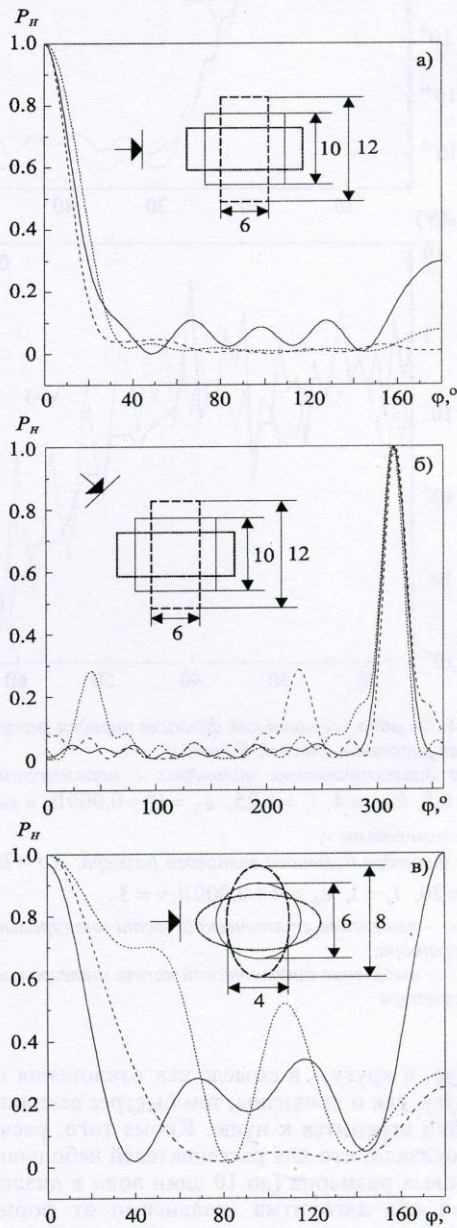


Рис. 6. Нормированные диаграммы рассеяния P_H плоской H-поляризованной волны: а), б) $\epsilon_b = 3 + 0.01i$, $\nu = 30$; в) $\epsilon_b = 10 + 0.01i$, $\nu = 1$

Выводы

Исследован эффективный и численно точный метод решения двумерных задач рассеяния, основанный на аналитической регуляризации контурных ИУ путем обращения "динамической" части, соответствующей круговому цилиндру. Построенный алгоритм был опробован для решения задачи рассеяния плоской волны на диэлектрических цилиндрах различных поперечных сечений, расположенных в свободном пространстве. Предложенный в данной работе подход может быть легко обобщен для решения задач рассеяния на телах, расположенных в слоистых средах, а также для других типов падающего поля (поверхностная волна, волновой пучок, и т. д.). Область его применимости ограничена только возможностями компьютера, но не параметрами задачи – это характерная особенность всех алгоритмов, основанных на аналитической регуляризации.

Литература

1. C. Muller. Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves. Berlin, Springer-Verlag, 1969, secs. 21, 23.
2. D. Colton, R. Kress. Integral equations methods in scattering theory. New York, Wiley, 1983, 280 pp.
3. Н. А. Хижняк. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев, Наукова Думка, 1986, 280 с.
4. В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. Москва, Изд. МГУ, 1987, 168 с.
5. Т. Н. Галишикова, А. С. Ильинский. Численные методы в задачах дифракции. Москва, Изд. МГУ, 1987, 208 с.
6. N. Morita, N. Kumagai, J. R. Mautz. Integral equations methods for electromagnetics. London, Artech House, 1990, 312 pp.
7. А. Б. Самохин. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. Москва, Радио и связь, 1998, 160 с.
8. В. И. Калинин, П. Н. Вадов. РиЭ. 1988, 33, №7, с. 464-471.
9. J. H. Richmond. IEEE Trans. Antennas Propag. 1965, 13, No. 3, pp. 334-341.
10. N. K. Uzunoglu and J. G. Fikioris. J. Opt. Soc. Am. 1982, 72, No. 5, pp. 628-637.
11. A. Lerer, I. Donets, S. Bryzgalo. J. Electromagn. Waves Appl. 1996, 10, No. 6, pp. 765-790.

12. Е. В. Захаров, И. П. Котик, А. Н. Сивов. Вычислительные методы и программирование. Вып. 13. Москва, Изд. МГУ, 1969, с. 177-188.
13. Е. Н. Васильев, В. В. Солодухов. Вычислительные методы и программирование. Вып. 20. Москва, Изд. МГУ, 1973, с. 144-157.
14. А. М. Лерер, И. В. Донец. РиЭ. 1994, 19, №5, с. 718-723.
15. A. G. Yarovoy. IEICE Trans. on Electronics (Japan). 1995, E 78-C, No. 10, pp. 1440-1446.
16. Ю. А. Тучкин. Доповіді Нац. Академії Наук України. 1997, №10, с. 47-51.
17. Е. М. Карчевский. ЖВМ и МФ. 1998, 38, №1, с. 136-140.
18. А. В. Поединчук, Ю. А. Тучкин, В. П. Шестопалов. ЖВМ и МФ. 1996, 36, №7, с. 135-149.
19. Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов. Численный анализ дифракции радиоволн, Москва, Радио и связь, 1982, 184 с.
20. D. F. Elliot, K. R. Rao. Fast Fourier transforms: algorithms. New York, Academic Press, 1982, 320 pp.
21. Numerical recipes in Fortran 77: the art of scientific computing. Cambridge University Press, 1992.

Method of Analytical Regularization for Problems of Wave Scattering from Dielectric Cylinders of Arbitrary Cross-Section

S. V. Boriskina, A. I. Nosich

Efficient algorithm for the solution of the 2-D problem of wave scattering from dielectric cylinders of arbitrary cross-section is developed, based on the concept of analytical regularization. After presenting the fields as surface potentials over the scatterer contour, a set of the Fredholm first-kind integral equations is obtained. On extracting and analytically inverting a circular-cylinder part of the integral operator this equation is reduced to the Fredholm second-kind infinite-matrix equation, which is solved numerically with guaranteed accuracy. Basic properties of the developed algorithm are studied and a comparison to the algorithm based on the inversion of the integral operator static part is done. Sample numerical results are presented for elliptic and rectangular cylinders and various E- and H-polarized plane wave incidence angles.