

Рассеяние Н-поляризованной волны на системе лент

Г. И. Кошевой

*Государственный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
Украина, 61070, Харьков, ул. Чкалова, 17*

Статья поступила в редакцию 26 апреля 1999 г.

Рассматривается задача о рассеянии Н-поляризованной плоской волны на системе N некомпланарных лент. Полученная система псевдоинтегральных уравнений первого рода преобразована к системе интегральных уравнений, удобной как для применения прямых численных методов, так и для получения асимптотик. В случае когда длина волны велика по сравнению с поперечными размерами лент, предлагается подход основанный на явном решении простейших сингулярных интегральных уравнений, который приводит к полному математическому решению поставленной задачи.

Приведены асимптотические выражения для плотности поверхностного поперечного тока на лентах, допускающие, в частности, предельный переход к одной полоске, что позволяет провести сравнение с известными классическими результатами. Полученные формулы могут быть непосредственно использованы для исследования взаимовлияния отдельных лент в системе и расчета других характеристик.

Розглядається задача про розсіяння Н-поляризованої плоскої хвилі на системі N некомпланарних стрічок. Одержано систему псевдоінтегральних рівнянь першого роду, що зводиться до системи інтегральних рівнянь, досить зручних як для застосування прямих числових методів, так і для отримання асимптотик. У випадку коли довжина хвилі велика у порівнянні з поперечними розмірами стрічок, пропонується підхід на основі явних розв'язків найпростіших сингулярних інтегральних рівнянь, що приводить до повного математичного розв'язання поставленої задачі.

Наведено асимптотичні вирази для густини поверхневого поперечного струму на стрічках, які допускають зокрема граничні переходи до однієї стрічки, що дозволяє провести порівняння з відомими класичними результатами. Одержані формули можуть бути безпосередньо використані для вивчення взаємовпливу окремих стрічок в системі і для розрахунку інших характеристик розсіяння.

Задачи дифракции на ленточных структурах занимают особое место в теории дифракции, поскольку позволяют получить обоснованное строгое решение и выявить те общие закономерности, которые имеют место при взаимодействии электромагнитной волны с рассеивающим объектом. Количество публикаций, посвященных таким структурам, весьма велико и труднообозримо. Отметим здесь лишь монографии [1-3], где, в частности, приведены необходимые ссылки на первоисточники и оригинальные работы. Методы, применяемые для решения задач дифракции условно разделяются на три группы: асимптотические, численно-аналитические, и прямые численные. К последней группе относится метод дискретных особенностей [4]. Этот метод успешно применяется к сингулярным интегральным уравнениям, к которым приводятся краевые задачи математической физики и, в частности, задачи дифракции. Асимптотические методы тоже получают свое дальнейшее развитие в связи с появлением новых программных продуктов для ЭВМ, позволяющих проводить аналитические

выкладки. В предлагаемой работе для некомпланарной ленточной системы (ленты расположены в пересекающихся плоскостях) получены сингулярные интегральные уравнения, к которым может быть применен метод дискретных особенностей, и приведена длинноволновая асимптотика.

Формулируя краевую задачу, исходим из метода поверхностных токов, идея которого принадлежит Пуанкаре [1]. Суть ее состоит в следующем: падающая волна индуцирует на поверхности дифрагирующего тела поверхностные токи, которые со своей стороны обуславливают возникновение вторичного дифракционного поля. При этом распределение токов определяется как падающей волной, так и вторичным полем. Такой подход приводит к интегральному уравнению для нахождения распределения поверхностных токов. Если известно это распределение, то суммарное поле может быть представлено, согласно принципу Гюйгенса, интегралом по поверхности дифрагирующего тела. Таким образом, задача состоит в определении поверхностных токов.

Постановка задачи

Рассмотрим систему конечного числа абсолютно тонких, идеально проводящих лент с краями, параллельными оси Oy , так что в плоскости xOz ленты будут соответствовать отрезкам S_k , расположенным произвольным образом (см. рис.).

Если на систему из бесконечности набегают Н-поляризованная плоская волна, то полное поле, возникающее в результате рассеяния на лентах, определяется единственной отличной от нуля составляющей магнитного поля $H_y(x, z) = \vartheta(x, z) = \vartheta_0(x, z) + \vartheta_p(x, z)$, при этом

$E_y = 0$, $E_x = -\frac{1}{ik} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$, $E_z = \frac{1}{ik} \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $\vartheta_0(x, z)$ – известная функция, соответствующая падающему полю, $\vartheta_p(x, z)$ – искомая функция, связанная с рассеянным полем.

Функция $\vartheta(x, z)$, описывающая полное поле, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_{x,z} \vartheta + k^2 \vartheta = 0, \quad z \neq 0.$$

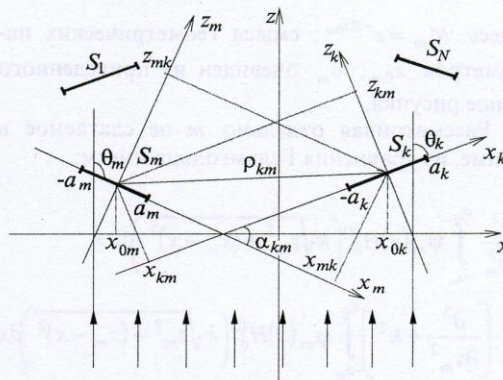
Кроме того, всюду вне отрезков полное поле непрерывно, а на отрезках выполняется краевое условие $\frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{n}_k} = 0$, где \bar{n}_k – вектор, перпендикулярный к отрезку S_k (производная означает дифференцирование в направлении \bar{n}_k). Это вторая внешняя краевая задача для уравнения Гельмгольца на системе отрезков (задача Неймана). Она имеет единственное решение, когда выполняются условия излучения на бесконечности и условия на ребрах лент [1].

Псевдоинтегральные уравнения Релея

Решение поставленной краевой задачи будем искать в виде:

$$\vartheta(\bar{r}) = \vartheta_0(\bar{r}) + \frac{i}{4} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} \psi_k(\bar{r}') \frac{\partial}{\partial \bar{n}_k} H_0^{(1)}(k|\bar{r} - \bar{r}'|) d\bar{r}'.$$

Правая часть для широкого класса функций $\psi_k(\bar{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условиям непрерывности полного поля и условиям излучения. Искомые функции $\psi_k(\bar{r})$ с электродинамической точки зрения имеют смысл поверхностного электрического тока, текущего перпендикулярно краям лент. Для их определения используем краевые условия на отрезках, выписывая их в локальных координатных системах, привязанных к соответствующим отрезкам.



Поперечное сечение рассматриваемой структуры

Так, на отрезке S_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_k} H_0^{(1)}(k|\bar{r} - \bar{r}'|) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial z'_k} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(z_k - z'_k)^2 + (x_k - x'_k)^2}\right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z_k} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(z_k - z'_k)^2 + (x_k - x'_k)^2}\right), \end{aligned}$$

следовательно, при $z'_k \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{S_k} \psi_k(\bar{r}') \frac{\partial}{\partial \bar{n}_k} H_0^{(1)}(k|\bar{r} - \bar{r}'|) d\bar{r}' &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial z_k} \int_{-a_k}^{a_k} \psi_k(x) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{z_k^2 + (x_k - x)^2}\right) dx, \end{aligned}$$

где a_k – полуширина k -го отрезка, система $x_k Oz_k$ привязана к середине этого отрезка так, что ось Ox_k идет вдоль него, а ось Oz_k перпендикулярна ему.

Краевое условие для функции ϑ на m -том отрезке имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z_m} \right|_{z_m=0} = 0 \quad \text{при } |x_m| < a_m$$

и приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \lim_{z_m \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial z_m \partial z_k} \int_{-a_m}^{a_m} \psi_k(x) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{z_k^2 + (x_k - x)^2}\right) dx &= \\ &= 4kM_m \sin \theta_m e^{ikx_m \cos \theta_m}, \\ |x_m| < a_m, \quad m = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь $M_m = e^{-ikx_{0m}}$; смысл геометрических параметров x_{0m} , θ_m очевиден из приведенного выше рисунка.

Рассматривая отдельно m -ое слагаемое в сумме, из уравнения Гельмгольца имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \int_{-a_m}^{a_m} \Psi_m(x) H_0^{(1)} \left(k \sqrt{z_m^2 + (x_m - x)^2} \right) dx = \\ & = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + k^2 \right) \int_{-a_m}^{a_m} \Psi_m(x) H_0^{(1)} \left(k \sqrt{z_m^2 + (x_m - x)^2} \right) dx, \end{aligned}$$

или, осуществляя предельный переход при $z_m \rightarrow 0$, получаем

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + k^2 \right) \int_{-a_m}^{a_m} \Psi_m(x) H_0^{(1)} (k|x_m - x|) dx.$$

Оставшиеся слагаемые допускают возможность дифференцирования и предельного перехода под знаком интеграла. Используя дифференциальные соотношения между цилиндрическими функциями, выполняем дифференцирование, а затем и предельный переход. Получаем:

$$\begin{aligned} & \lim_{z_m \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z_m \partial z_k} H_0^{(1)} \left(k \sqrt{z_k^2 + (x_k - x)^2} \right) = \\ & = k^2 \left[H_0^{(1)}(kq) - 2 \frac{H_1^{(1)}(kq)}{kq} \right] \times \\ & \times \frac{(z_{km} + x_m \sin \alpha_{km})(z_{mk} + x \sin \alpha_{mk})}{q} - \\ & - k^2 \cos \alpha_{mk} \frac{H_1^{(1)}(kq)}{kq}. \end{aligned}$$

Здесь

$$q = \sqrt{(z_{km} - x \sin \alpha_{mk})^2 + (x_{km} + x_m \cos \alpha_{mk} - x)^2};$$

геометрические параметры x_{km} , z_{km} , α_{km} указаны на рисунке.

Обозначим выражение, полученное после предельного перехода, через $R(k; x_m, x)$; оно является регулярной функцией переменных x_m и x , поскольку $q \neq 0$ (отрезки не могут пересекаться).

Таким образом, краевое условие приводит к системе псевдоинтегральных уравнений. В локальной системе координат $x_m O z_m$ с учетом связи ее с другими системами, переобозначая x_m на x , а x на t , получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \int_{-a_m}^{a_m} \Psi_m(t) H_0^{(1)} (k|x - t|) dt = \\ & = \sum_{k=1, k \neq m}^N \int_{-a_k}^{a_k} \Psi_k(t) R(k; x, t) dt - 2kM_m \sin \theta_m e^{ikx \cos \theta_m}, \end{aligned}$$

$$|x| < a_m, \quad m = 1, \dots, N.$$

Выпишем общий вид решения дифференциального уравнения, стоящего слева, обозначив его правую часть через $f_m(x)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-a_m}^{a_m} \Psi_m(t) H_0^{(1)} (k|x - t|) dt = A_m \cos kx + B_m \sin kx + \\ & + \frac{1}{k} \int_0^x \sin k(x - t) f_m(t) dt, \quad |x| < a_m. \end{aligned}$$

Здесь постоянные A_m и B_m определяются условиями на ребрах лент $\Psi_m(\pm a_m) = 0$. Более того, известно, что функции Ψ_m убывают в окрестности ребра как $\rho^{1/2}$, где ρ – расстояние от края. Этот факт должен учитываться в дальнейшем при выборе класса решений как при численной реализации приближенных методов, так и при получении длинноволновой асимптотики.

Длинноволновое приближение

Произведем нормировку переменных на полуширины отрезков в полученных интегральных уравнениях. Тогда они могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \Psi_m(t) H_0^{(1)} (\kappa_m |x - t|) dt = \\ & = A_m \cos \kappa_m x + B_m \sin \kappa_m x + \\ & + \frac{1}{k} \int_0^x \sin \kappa_m(x - t) \left\{ -4a_m M_m \sin \theta_m e^{i\kappa_m x \cos \theta_m} + \right. \\ & + \sum_{k=1, k \neq m}^N \int_{-1}^1 \Psi_k(\xi) \left[H_0^{(1)}(kq) - 2 \frac{H_1^{(1)}(kq)}{kq} \right] \times \\ & \times \frac{(kz_{km} + \kappa_m \sin \alpha_{km})(kz_{mk} + \kappa_k \xi \sin \alpha_{mk})}{k^2 q} - \\ & \left. - \frac{H_1^{(1)}(kq)}{kq} \cos \alpha_{mk} \right\} d\xi dt, \quad |x| < 1; \quad m = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

В предположении, что длина волны велика по сравнению с шириной лент, то есть $\kappa_m = 2\pi \frac{a_m}{\lambda} \ll 1$, подставим в уравнения, выписанные выше, асимптотические разложения известных и искомых величин по возрастающим степеням κ_m . При этом заметим, что слабо изменяющийся множитель $\ln \kappa_m$ не выделен:

$$\Psi_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_m^k \Psi_{mk}(t), \quad A_m = \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \kappa_m^k,$$

$$B_m = \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk} \kappa_m^k.$$

Приравнявая далее “коэффициенты” при соответствующих степенях κ_m , получаем интегральные уравнения для определения искомых коэффициентов разложений. Так, в главном приближении имеем уравнение

$$\int_{-1}^1 \Psi_{m1}(t) \ln \frac{\gamma \kappa_m |x-t|}{2i} dt = \frac{\pi}{2i} [A_{m1} + B_{m0}x - M_m a_m \sin \theta_m x^2],$$

(здесь $\ln \gamma = 0.5772$ – постоянная Эйлера) которое после дифференцирования по переменной x приводится к интегральному уравнению с разностным ядром, имеющим более “сильную” особенность при совпадении аргументов:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_{m1}(t)}{x-t} dt = ia_m M_m \sin \theta_m 2x - \frac{i}{2} B_{m0}.$$

Учитывая характер поведения решения в окрестности ребер, выделим соответствующий класс решений этого уравнения [5]:

$$\Psi_{m1}(x) = i \cdot 2a_m M_m \sin \theta_m \sqrt{1-x^2}.$$

Таким же будет выражение для главного члена в разложении поперечной составляющей поверхностного тока и в случае одиночной ленты. В монографии [1] исследование дифракции на одной щели в экране в длинноволновом приближении ограничено случаем нормального падения ($\theta_m = \pi/2$).

Определим постоянные B_{m0} и A_{m1} . Для этого подставим полученное решение в уравнение с логарифмическим ядром. Имеем:

$$2a_m M_m \sin \theta_m \left[\ln \frac{\gamma \kappa_m}{4i} + x^2 - \frac{1}{2} \right] = 2a_m M_m \sin \theta_m x^2 - A_{m1} - B_{m0}x,$$

следовательно,

$$B_{m0} = 0, \quad A_{m1} = a_m M_m \sin \theta_m \left(1 - 2 \ln \frac{\gamma \kappa_m}{4i} \right).$$

Полученные постоянные понадобятся для отыскания следующих приближений.

Поправки к главному приближению

Выделяя коэффициенты при второй степени κ_m , приходим к уравнению

$$\int_{-1}^1 \Psi_{m2}(t) \ln \frac{\gamma \kappa_m |x-t|}{2i} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2i} \left[A_{m2} + B_{m1}x - ia_m M_m \sin 2\theta_m \frac{x^3}{3} \right],$$

решение которого имеет вид

$$\Psi_{m2}(x) = -\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} a_m M_m \sin 2\theta_m.$$

Эта поправка к главному члену в интегральном смысле ничего не дает, ибо

$$\Psi_{m2} = \int_{-1}^1 \Psi_{m2}(x) dx = 0.$$

Более того, она отсутствует в случае нормального падения плоской волны $\sin 2\theta_m = 0$.

Следующую поправку можно найти, решая уравнение

$$\int_{-1}^1 \Psi_{m3}(t) \ln \frac{\gamma \kappa_m |x-t|}{2i} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2i} \left[A_{m3} + B_{m2}x - \frac{x^2}{2} A_{m1} + a_m M_m \sin \theta_m \frac{x^4}{6} (1 + \cos^2 \theta_m) + \right.$$

$$\left. \sum_{k=1, k \neq m}^N \Psi_{k1} \frac{a_k}{a_m} R_1(k, \rho_{km}) \frac{x^2}{2} \right] -$$

$$- \int_{-1}^1 \Psi_{m1}(t) \frac{(x-t)^2}{4} \left(1 - \ln \frac{\gamma \kappa_m |x-t|}{2i} \right) dt.$$

Здесь ρ_{km} – расстояние между центрами k -го и m -го отрезков,

$$R_1(k, \rho) = \left[H_0^{(1)}(k\rho) - 2 \frac{H_1^{(1)}(k\rho)}{k\rho} \right] \frac{z_{km} z_{mk}}{\rho^2} - \frac{H_1^{(1)}(k\rho)}{k\rho} \cos \alpha_{mk}.$$

После преобразований и вычисления соответствующих несобственных интегралов можно получить следующее выражение для решения:

$$\Psi_{m3}(x) = -i\sqrt{1-x^2} 2a_m M_m \sin 2\theta_m \left[\frac{1}{4} \ln \frac{\gamma \kappa_m}{4i} - \frac{5}{24} - \frac{\cos^2 \theta_m}{12} + i \frac{\pi}{4} \sum_{k=1, k \neq m}^N R_1(k\rho_{km}) \frac{a_k^2 M_k \sin \theta_k}{a_m^2 M_m \sin \theta_m} + \frac{x^2}{12} (1 - 2\cos^2 \theta_m) \right].$$

Это выражение допускает предельный переход $\rho_{km} \rightarrow \infty$: сумма, обусловленная взаимным влиянием соседних лент, при этом исчезает. В частности, когда $\theta_m = \pi/2$, остается выражение

$$\Psi_{m3}(x) = -i\sqrt{1-x^2} 2a_m \left(\frac{1}{4} \ln \frac{\gamma \kappa_m}{4i} - \frac{5}{24} + \frac{x^2}{12} \right),$$

которое полностью совпадает с поправкой для одной ленты, вытекающей из соответствующей формулы, приведенной в [1].

Итак, выражение для плотности поверхностного поперечного тока на m -ой ленте с учетом полученных поправок имеет вид:

$$j_x(x) = i\kappa_m \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_m}\right)^2} M_m \sin \theta_m 2 \times \left\{ 1 + i\kappa_m \frac{x}{a_m} \cos \theta_m - \kappa_m^2 \left[\frac{1}{4} \ln \frac{\gamma \kappa_m}{4i} - \frac{5}{24} + \frac{\cos^2 \theta_m}{12} + i \frac{\pi}{4} \sum_{k=1, k \neq m}^N R_1(k\rho_{km}) \frac{a_k^2 M_k \sin \theta_k}{a_m^2 M_m \sin \theta_m} + \frac{1 + 2\cos^2 \theta_m}{12} \left(\frac{x}{a_m}\right)^2 \right] + \dots \right\},$$

$|x| < a_m$.

Это есть полное математическое решение поставленной задачи в длинноволновом приближении.

Заключение

Таким образом, задача о дифракции плоской Н-поляризованной волны на некопланарной системе из N лент приведена к системе интегральных уравнений с разностными диагональными ядрами, имеющими логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Эта система интегральных уравнений первого рода может быть использована как для непосредственного применения к ней метода дискретных особенностей, так и преобразована к системе интегральных уравнений второго рода

с помощью метода полуобращения. Кроме того, она удобна для нахождения длинноволновой асимптотики решения.

В случае, когда длина падающей волны велика по сравнению с поперечными размерами отдельных лент, в работе получены простые выражения для плотности поверхностного тока на лентах, которые могут быть, в частности, использованы в инженерных радиофизических расчетах других электродинамических характеристик системы. Проведено исследование предельного перехода к отдельной ленте (когда расстояния между лентами возрастают), что свидетельствует о правильности полученного решения. Приведенные в статье выражения удобны также для исследования взаимного влияния лент в системе.

Литература

1. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. Москва, Мир, 1964, 428 с.
2. В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. Дифракция волн на решетках. Харьков, ХГУ, 1973, 287 с.
3. Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев, Наук. думка, 1984, 240 с.
4. Ю. В. Гандель, И. К. Лифанов, Т. С. Полянская. Дифференциальные уравнения. 1995, 31, №9, с. 1536-1541.
5. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Москва, Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962, 599 с.

Scattering of H-polarized Wave on a System of Ribbons

G. I. Koshevoy

The problem of scattering the H-polarized plane wave at the system of N noncoplanar ribbons is considered. The obtained system of the pseudointegral equations is converted to the system of integral equations convenient both for applying the direct numerical methods and obtaining asymptotics. The asymptotical expressions for density of the surface current are adduced in case when the length of the incident wave is large compared to the cross-sectional dimensions of ribbons. These expressions allow, in particular, passing to the limit of the single ribbon, that makes possible matching with known classic outcomes.

The obtained expressions can be directly applied to the calculation of other characteristics as well as to the examination of mutual influence of separate ribbons.