Радиофизика и радиоастрономия, 1998, т. 3, №3, стр. 331-332

УДК 533.951

О влиянии формы плазменного цилиндра на собственные частоты быстрых магнитозвуковых волн

Д. Л. Греков

Институт физики плазмы,
Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт",
Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1

Статья поступила в редакцию 3 сентября 1998 г., после переработки 8 февраля 1999 г.

В работе исследовано влияние отклонения формы плазменного шнура от круга на спектры собственных частот быстрых магнитозвуковых волн. Показано, что при трансформации круглого шнура в эллиптический, равный ему по площади, собственные частоты быстрых магнитозвуковых волн не зависят от эллиптичности.

В роботі розглянуто вплив відхилення форми плазмового шнура від кола на спектри власних частот швидких магнітозвукових хвиль. Доведено, що при незмінній площі перерізу плазмового циліндра трансформація кола в еліпс не змінює власні частоти швидких магнітозвукових хвиль.

Быстрые магнитозвуковые волны (БМЗВ) с частотой ω порядка циклотронной частоты ионов ω_{ci} широко используются для нагрева плазмы в термоядерных установках. В безграничной однородной плазме в магнитном поле они имеют закон дисперсии $\omega = kv_A$ (k – волновой вектор, v_A – альфвеновская скорость). Электрическое поле БМЗВ почти перпендикулярно внешнему магнитному полю: $E_\perp >> E_z$. В работе [1], где были исследованы собственные БМЗ колебания круглого неоднородного плазменного цилиндра в магнитном поле, отмечено, что профиль неоднородности плазмы слабо влияет на значения собственных частот (собственных волновых векторов). Эти значения определяются, в основном, средней по радиусу плотностью плазмы. Поскольку во многих установках плазма имеет эллиптическое сечение, представляется интересным выяснить, как влияет отклонение сечения плазменного шнура от круга на спектры собственных частот БМЗВ. Впервые этот вопрос был затронут в [2], где методом возмущений исследовались спектры собственных колебаний плазменного цилиндра с малой разностью длин осей, отделенного от стенок круглой камеры вакуумным промежутком.

Рассмотрим однородный плазменный цилиндр помещенный в аксиальное магнитное поле $\vec{B}_0 \parallel Oz$, окруженный металлическим кожухом. Используем координаты эллиптического цилиндра (ξ,φ,z). Они состоят из систем конфокальных эллипсов $\xi = \xi_i$ (ξ – аналог радиальной координаты) и гипербол $\varphi = \varphi_i$ (φ – аналог азимутальной координаты). Фокальные расстояния всех эллипсов $(2h)$ равны: $2h = 2a\varepsilon = 2a / ch\xi$, $\varepsilon = \sqrt{1-b^2/a^2}$. Здесь a – большая, а b – малая оси эллипса, ε – эксцентриситет. При $\varepsilon \to 0$ $(\xi \to \infty)$ эллипс переходит в круг, при $\varepsilon \to 1$ $(\xi \to 0)$ – в щель. Предположим, что отношение массы электрона к массе иона равно нулю ($E_z = 0$). Пусть поле волны имеет вид $\vec{B} \sim \vec{B}(\xi,\varphi)e^{ik_\parallel z}$. Тогда для B_z компоненты получаем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{N_\perp^2}\frac{\partial B_z}{\partial\xi}\right) - i\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\varepsilon_2}{N_\perp^2\left(\varepsilon_1 - N_\parallel^2\right)}\right]\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} + \frac{1}{N_\perp^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial\varphi^2} + \frac{\omega^2 h^2}{c^2}\left(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi\right)B_z = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$N_\perp^2 = N_\perp^2(\xi) = \frac{\left(\varepsilon_1 - N_\parallel^2\right)^2 - \varepsilon_2^2}{\left(\varepsilon_1 - N_\parallel^2\right)};$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{\omega}{\omega_{ci}}\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}.$$

ω_{pi}, ω_{pe} – ионная и электронная плазменные частоты; ω_{ce} – электронная циклотронная частота.

В случае однородной плазмы уравнение (1) допускает разделение переменных $B_z(\xi,\varphi) = u(\xi)\cdot v(\varphi)$ и мы получаем для поля в плазме два уравнения Матье

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - (C - 2q\,\mathrm{ch}\,2\xi)u = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + (C - 2q\cos 2\varphi)v = 0\,, \tag{2}$$

где $q = (N_\perp \omega h / 2C)^2 = (h / 2\lambda_\perp)^2$ – основной параметр задачи, C – константа. Пусть металлический кожух расположен при $\xi = \xi_0$. Тогда граничное условие имеет вид

$$-i\varepsilon_2 \frac{\partial B_z}{\partial \varphi}\bigg|_{\xi=\xi_0} + \left(\varepsilon_1 - N_\parallel^2\right)\frac{\partial B_z}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=\xi_0} = 0. \tag{3}$$

Решения уравнений (2) запишем в виде

$$B_z(\xi,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \,\mathrm{Ce_m}(\xi,q)\mathrm{ce_m}(\varphi,q) + \sum_{m=0}^{\infty} S_m \,\mathrm{Se_m}(\xi,q)\mathrm{se_m}(\varphi,q). \tag{4}$$

Здесь $\mathrm{ce_m}$, $\mathrm{se_m}$ – обыкновенные и $\mathrm{Ce_m}$, $\mathrm{Se_m}$ – модифицированные функции Матье [3]. При малых $q/4$ в решении (4) можно выделить одну азимутальную гармонику (соседние гармоники будут порядка $q/4$). Тогда, используя (3), получим дисперсионное уравнение для собственных колебаний эллиптического цилиндра

$$\frac{\varepsilon_2^2 m^2}{\left(\varepsilon_1 - N_\parallel^2\right)^2} \frac{\mathrm{Ce_m}(\xi_0, q_l)}{\mathrm{Ce'_m}(\xi_0, q_l)} = \frac{\mathrm{Se'_m}(\xi_0, q_l)}{\mathrm{Se_m}(\xi_0, q_l)}\,, \tag{5}$$

которое определяет собственные значения q_l. Удерживая три основных члена в разложениях $\mathrm{Ce_m}$, $\mathrm{Se_m}$ по функциям Бесселя, из (5) получим

$$\sqrt{q_l^m} = \frac{\left(k_{\perp l}^m r\right)_{cir}}{2}\varepsilon\left(1 + \varepsilon^2/4\right), \quad \text{или}$$

$$\left(k_{\perp l}^m a\right)_{el} = \left(k_{\perp l}^m r\right)_{cir}\left(1 + \varepsilon^2/4\right), \tag{6}$$

где $\left(k_{\perp l}^m r\right)_{cir}$ – решения уравнения (5) для круглого цилиндра, l – номер радиального корня (l=1,2 …), m – номер "азимутальной" моды ($m = 0, \pm 1, \pm 2$ …). Отметим, что при получении (6) использован традиционный переход от эллипса к кругу (см., например, [3]). При таком переходе круг получается из эллипса путем "растяжения" вдоль малой оси; большая ось эллипса остается равной радиусу круга. Если же круг получать из эллипса путем "сдавливания" вдоль большой оси, сохраняя малую ось равной радиусу круга, то вместо (6) получим

$$\left(k_{\perp l}^m a\right)_{el} = \left(k_{\perp l}^m r\right)_{cir}\left(1 - \varepsilon^2/4\right). \tag{7}$$

В случае, когда эллипс получен путем деформации круга, равного ему по площади, сохраняется число частиц в сечении плазменного цилиндра и собственные векторы (собственные частоты) БМЗ колебаний не изменяются $\left(k_{\perp l}^m a\right)_{el} = \left(k_{\perp l}^m r\right)_{cir}$. Эти результаты совпадают с полученными в [2] по порядку величины.

Таким образом, проведенные расчеты позволяют сделать вывод: при малых значениях параметра $q/4 = (h/4\lambda_\perp)^2$ собственные частоты БМЗВ не зависят от эллиптичности при сохранении числа частиц в сечении плазменного цилиндра. Это утверждение является обобщением результатов, полученных для изотропных мембран, на случай гиротропных сред. Оно, однако, не может быть сделано путем тривиального применения ранее известных выводов. Подтверждением этому служит, например, то, что в прямоугольном плазменном волноводе в магнитном поле из-за гиротропии вообще невозможно возбудить собственные БМЗВ, а спектры собственных колебаний прямоугольной мембраны хорошо известны.

Литература

1. И. А. Гирка, К. Н. Степанов. ДАН Украинской ССР, сер."А". 1988, №7, с. 59-63.
2. И. А. Гирка, К. Н. Степанов. Украинский физический журнал. 1991, **36**, №7, с. 1051-1058.
3. Н. В. Мак-Лахлан. Теория и приложения функций Матье. Москва, ИЛ, 1953, 474 с.

On Effect of Plasma Cylinder Shape on Fast Magnetosonic Wave Eigenfrequencies

D. L. Grekov

The paper deals with analytical study of the fast magnetosonic wave (FMSW) in an elliptic plasma cylinder with axial magnetic field. It is shown that transformation of plasma cylinder cross-section from circle to ellipse with conservation of cross-sectional area does not shift FMSW eigenfrequencies.