

## Отражение и преломление остронаправленных Гауссовых пучков

А. В. Бакуменко, Н. А. Хижняк

Харьковский Государственный университет,  
радиофизический факультет  
Украина, 310077, Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 28 апреля 1998 г.

Рассмотрена задача об отражении и преломлении остронаправленного волнового пучка от границы раздела двух изотропных диэлектрических полупространств. Получено асимптотическое выражение для полей в верхнем и нижнем полупространствах. В качестве примера рассмотрен случай падения Гауссова пучка под углом, большим, чем угол полного внутреннего отражения, и найдено поле поверхностной волны, возбуждаемое этим пучком.

Розглянуто задачу про відбиття та заломлення гостроспрямованого пучка на межі розподілу двох діелектриків. Знайдено поле поверхневої хвилі, яка збуджується Гаусовим пучком, у межах теорії інтегрального представлення поля падаючої хвилі. Розглянуто особливості розповсюдження поля поверхневої хвилі. Знайдено глибину проникнення поля поверхневої хвилі у менш щільне середовище та побудовано діаграму поля у цьому середовищі.

Задача об отражении и преломлении волн на границе раздела не является новой. Большое количество работ посвящено особенностям преломления и отражения плоских и сферических волн [1,2,3]. Однако наиболее интересной и важной проблемой с точки зрения практического использования является задача об отражении и преломлении остронаправленных пучков [2,3,4]. Подобные задачи имеют очень широкий спектр применений: акустика земли и океана, электродинамика сплошных и слоистых сред, интегральная оптика, ускорение частиц с использованием лазера и многое другое.

Рассмотрим наклонное падение остронаправленного пучка на плоскую границу раздела двух изотропных диэлектрических сред (см. рис. 1). Будем считать, что  $n$  – относительный показатель преломления, не слишком близкий к единице, и при  $n < 1$  угол падения центрального луча пучка  $\theta_0$  не слишком близок к углу полного внутреннего отражения  $\theta_{cr}$  ( $\theta_{cr} = \arcsin n$ ) и  $\frac{\pi}{2}$ .

Для определенности будем считать остронаправленным пучком такой, для которого выполняется соотношение:

$$kw \gg 1, \quad (1)$$

где  $w$  – характерный размер пучка (его горловины);  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  – длина волны в среде, где находится пучок.

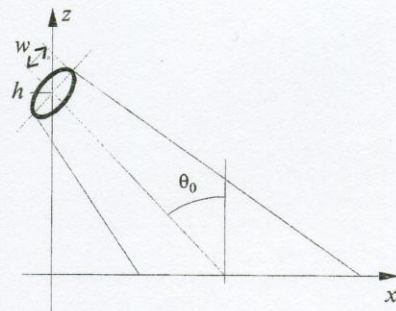


Рис. 1. Схема падения пучка на границу раздела двух сред

Пусть поле падающего пучка задано на некоторой плоскости  $z = h > 0$ . Тогда его можно представить в виде интегрального разложения

$$\psi_{in} = \frac{kw}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) \exp \left[ ikx\xi + ik(h-z)\sqrt{1-\xi^2} \right] d\xi, \quad (2)$$

где  $\xi = \sin\theta$ ,  $\Phi(\xi)$  – угловой спектр падающего пучка по плоским волнам, определенный при  $z = h$ .

Для Гауссова пучка  $\Phi(\xi)$  имеет вид [2,3]:



$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\cos^2 \theta_0} \exp \left[ -\frac{k^2 w^2}{4 \cos^2 \theta_0} (\xi - \xi_0)^2 \right]. \quad (3)$$

Необходимо построить асимптотические формулы для оценки интегралов, подобных (2). Для асимптотической оценки интеграла вида

$$I = \int_C F(\xi) \exp[\rho f(\xi)] d\xi \quad (4)$$

можно использовать метод перевала [5,6]. Если подынтегральная функция выражения (4) не имеет особенностей вблизи изолированной седловой точки первого порядка  $\xi_0$  функции  $f(\xi)$ , где  $f'(\xi_0) = 0$  и  $f''(\xi_0) \neq 0$ , то асимптотическое значение интеграла (4) имеет вид:

$$I \sim \sqrt{\frac{-2\pi}{\rho f''(\xi_0)}} F(\xi_0) \exp[\rho f(\xi_0)], \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (5a)$$

Выражение (5a) можно считать классическим.

В случае, когда функция  $f(\xi)$  в (4) обращается в нуль в точке перевала, асимптотическая оценка (5a) неприменима. Для нахождения новой асимптотической оценки разложим функцию  $f(\xi)$  в ряд по степеням  $\xi - \xi_0$ :

$$f(\xi)_{\xi=\xi_0} \sim \frac{[f'(\xi)_{\xi=\xi_0}]^2}{2f''(\xi)_{\xi=\xi_0}} \left[ 1 + O\left(\frac{f'(\xi)}{f''(\xi)}\right) \right].$$

Таким образом,

$$I \sim \sqrt{\frac{-2\pi}{\rho f''(\xi_0)}} F(\xi_0) \exp \left[ -\frac{[f'(\xi)_{\xi=\xi_0}]^2}{2f''(\xi)_{\xi=\xi_0}} \rho \right], \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (5b)$$

Анализируя показатель экспоненты подынтегральной функции выражения (3), определяем, что точкой перевала является  $\xi = \xi_0$ . Однако асимптотическая оценка значения выражения (2) при использовании формулы (5a) невозможна, так как при подстановке найденного нами значения точки перевала  $\xi = \xi_0$  в показатель экспоненты (3) в полученном после интегрирования выражении для поля пропадает зависимость от параметров пучка.

Пользуясь формулой (5b), определим поле падающего пучка.

$$\psi_{in} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp \left[ -\frac{\cos^2 \theta_0}{\alpha} \left( \frac{x}{w} - \frac{h-z}{w} \operatorname{tg} \theta_0 \right)^2 \right] \times \exp \{ i [kx \sin \theta_0 + k(h-z) \cos \theta_0] \}, \quad (6)$$

$$\text{где } \alpha = 1 + i \frac{2}{\cos \theta_0} \frac{h-z}{kw^2}.$$

Точно такое же выражение было получено в [7] при решении уравнения Шредингера в парааксиальной области.

По сути дела, выражение (2) является разложением пучка в спектр по плоским волнам. Поэтому для нахождения отраженного или преломленного поля необходимо в выражение (2) ввести под интеграл один из дополнительных множителей  $V(\xi)$  или  $T(\xi)$ , которые определяют механизм отражения или преломления плоских волн, соответственно:

$$\psi_r = \frac{kw}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) V(\xi) \exp [ikx\xi + ik(h+z)\sqrt{1-\xi^2}] d\xi, \quad (7)$$

$$\psi_t = \frac{kw}{2\sqrt{\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) T(\xi) \exp [ikx\xi + ikh\sqrt{1-\xi^2} - ik\sqrt{n^2 - \xi^2}] d\xi, \quad (8)$$

где

$$V(\xi) = \frac{m\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{n^2 - \xi^2}}{m\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{n^2 - \xi^2}}, \quad (9a)$$

$$T(\xi) = \frac{2m\sqrt{1-\xi^2}}{m\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{n^2 - \xi^2}}. \quad (9b)$$

коэффициенты отражения и преломления для плоских волн (формулы Френеля). Параметр  $m$  в формулах (9a, 9b) определяет поляризацию волн:  $m=1$  – перпендикулярная поляризация,  $m=n^2$  – параллельная поляризация.

Полагая  $V(\xi)$  и  $T(\xi)$  медленно меняющимися функциями от их аргумента, значение выражений (7,8) можно оценить аналогично тому, как мы оценивали значение выражения (2).

$$\psi_r = V(\theta_0) \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \exp \left[ -\frac{\cos^2 \theta_0}{\alpha_1} \left( \frac{x}{w} - \frac{h+z}{w} \operatorname{tg} \theta_0 \right)^2 \right] \times \exp \{ i [kx \sin \theta_0 + k(h+z) \cos \theta_0] \}, \quad (10)$$



где  $\alpha_1 = 1 + i \frac{2}{\cos \theta_0} \frac{h+z}{kw^2}$ ;

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{\cos^2 \theta_0}{\alpha_2} \left( \frac{x}{w} - \frac{h}{w} \operatorname{tg} \theta_0 + \frac{z}{w \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}} \right)^2 \right] \times \\ &\times T(\theta_0) \exp \left\{ i \left[ kx \sin \theta_0 + kh \cos \theta_0 - kz \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\alpha_2 = 1 + i \frac{2}{\cos \theta_0} \frac{h}{kw^2} - i \frac{z}{kw^2} \frac{2n^2 \cos^2 \theta_0}{(n^2 - \sin^2 \theta_0)^{3/2}}$ .

В случае  $n > 1$  выражение (10) определяет поле отраженного пучка, а выражение (11) – преломленного. Формулы справедливы для любых углов падения  $\theta_0$ , кроме углов, близких к  $\frac{\pi}{2}$ .

В случае когда  $n < 1$ , выражение (10) определяет поле отраженного пучка для любых углов падения  $\theta_0$ , кроме углов, близких к  $\frac{\pi}{2}$ , а выражение (11) будет определять поле преломленного пучка только для углов падения  $\theta_0 < \theta_{cr}$ . При  $\theta_0 > \theta_{cr}$  поле, определяемое выражением (11), будет представлять собой неоднородную затухающую волну. Данная волна является поверхностной волной Гауссова пучка.

Однако при  $\theta_0 > \theta_{cr}$  в случае  $n < 1$  в выражениях (9а), (9б), (10), (11) возникает неоднозначная функции  $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$ , поэтому для выделения однозначной ветви будем полагать:

$$\operatorname{Im} \left[ \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \right] \geq 0 \quad (12)$$

(считая временную зависимость для полей  $\exp(-i\omega t)$ ).

Преобразуем коэффициенты Френеля (9а), (9б) и выражения для полей (10), (11) для случая  $\theta_0 > \theta_{cr}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\xi) &= \frac{m\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{n^2-\xi^2}}{m\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{n^2-\xi^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{n^2-\xi^2} \rightarrow i\sqrt{\xi^2-n^2}}{m\sqrt{1-\xi^2}} = \\ &= \exp \left[ -2i \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\xi^2-n^2}}{m\sqrt{1-\xi^2}} \right], \end{aligned} \quad (13а)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\xi) &= \frac{2m\sqrt{1-\xi^2}}{m\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{n^2-\xi^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{n^2-\xi^2} \rightarrow i\sqrt{\xi^2-n^2}}{\sqrt{m^2(1-\xi^2) + \xi^2 - n^2}} = \\ &= \frac{2m\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{m^2(1-\xi^2) + \xi^2 - n^2}} \exp \left[ -i \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\xi^2-n^2}}{m\sqrt{1-\xi^2}} \right]. \end{aligned} \quad (13б)$$

$$\begin{aligned} \psi_i &= \psi_{s.w.} = \frac{\tilde{T}(\theta_0)}{(a^2 + a'^2)^{1/4}} \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{i}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{a'}{a} \right) + i \cos^2 \theta_0 \frac{a'b + b'a}{a^2 + a'^2} + \right. \\ &+ i [kx \sin \theta_0 + kh \cos \theta_0] - \cos^2 \theta_0 \frac{ab + b'a'}{a^2 + a'^2} + \\ &\left. + kz \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $a = 1 + \frac{z}{kw^2} \frac{2n^2 \cos^2 \theta_0}{(\sin^2 \theta_0 - n^2)^{3/2}}$ ,  $a' = \frac{2}{\cos \theta_0} \frac{h}{kw^2}$ ,

$$b = \left( \frac{x}{w} - \frac{h}{w} \operatorname{tg} \theta_0 \right)^2 - \left( \frac{z}{w} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0 - n^2},$$

$$b' = \left( \frac{x}{w} - \frac{h}{w} \operatorname{tg} \theta_0 \right)^2 - \frac{2z}{w} \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}}.$$

Условия применимости данной теории:

- существование большого параметра в показателе экспоненты интеграла (2);
- функции  $V(\xi)$  и  $T(\xi)$  должны быть медленно меняющимися.



Полученные формулы будут давать неверные результаты в случае  $n < 1$  при приближении  $\theta_0$  к  $\theta_{cr}$ , так как функции  $V(\xi)$  и  $T(\xi)$  перестают быть медленно меняющимися,  $\frac{\partial V, \partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \theta_{cr}} \rightarrow \infty$ , и их значения могут оказать существенное влияние на значения интегралов.

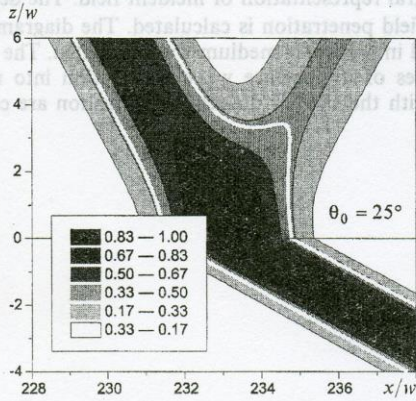


Рис. 2. Нормированная диаграмма интенсивности падающего, отраженного и преломленного поля при падении Гауссова пучка под углом  $\theta_0 < \theta_{cr}$ :

$\theta_0 = 25^\circ$ ,  $kw = 10^3$ ,  $n = 0,5$ ,  $m = 1$ ,  $h = 500 w$

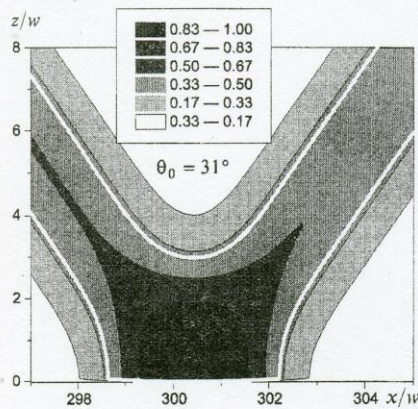


Рис. 3. Нормированная диаграмма интенсивности падающего, отраженного и преломленного поля при падении Гауссова пучка под углом  $\theta_0 > \theta_{cr}$ :

$\theta_0 = 31^\circ$ ,  $kw = 10^3$ ,  $n = 0,5$ ,  $m = 1$ ,  $h = 500 w$

Графический анализ полученных результатов представлен на рисунках 2-5. На рис. 2 показана нормированная диаграмма интенсивности поля падающего, отраженного и прошедшего пучка

при угле падения меньшем, чем угол полного внутреннего отражения. Рис. 3 представляет собой диаграмму при угле падения немного большем, чем угол полного внутреннего отражения. Из него видно, что при падении пучка под углом большим, чем угол полного внутреннего отражения, в нижней среде ( $z < 0$ ) появляется неоднородная волна (в увеличенном виде представленная на рис. 4), которая и является поверхностной волной Гауссова пучка. На рис. 5 представлена зависимость глубины проникновения поля поверхностной волны от угла падения пучка.

Все расчеты, представленные на рис. 2-5, проводились для случая:  $kw = 10^3$ ,  $n = 0,5$ ,  $m = 1$  и  $h = 500 w$ . (Широкая белая линия на рис. 2-5 показывает уровень, на котором поле уменьшается в е раз).

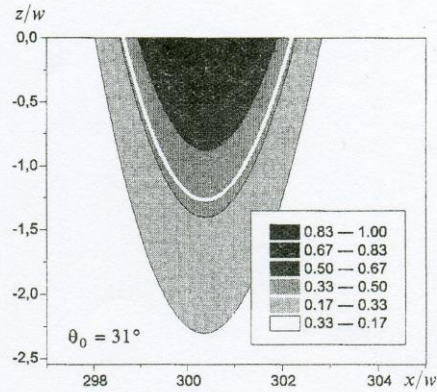


Рис. 4. Поле поверхностной волны при падении Гауссова пучка под углом  $\theta_0 > \theta_{cr}$ :

$\theta_0 = 31^\circ$

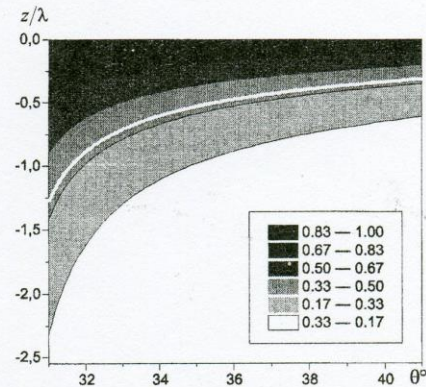


Рис. 5. Зависимость глубины проникновения поля поверхностной волны от угла падения пучка



Литература

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. Москва, Академия наук СССР, 1957, 502 с.
2. О. А. Годин, Л. М. Бреховских. Акустика слоистых сред. Москва, Наука, 1989, 416 с.
3. Н. Kogelnik, Т. Li. Proceeding of the IEEE. 1966, 54, No. 10, pp. 1312-1329.
4. М. В. Федорюк. Метод перевала. Москва, Наука, 1977, 368 с.
5. Л. Фелсен, Н. Маркувиц. Излучение и рассеяние волн. Москва, Мир, 1978, Т. 1, 534 с.
6. Н. К. V. Lotsch. Optik (Stuttgart). 1970, 32, heft 2, No. 11, pp. 116-137.
7. Т. Tamir, В. Horovitz. J. Opt. Soc. Am. A. 1971, 61, No. 5, pp. 586-594.

Reflection and Refraction of a Narrow Gaussian Beam

Alexander V. Bakumenko, Nikolay A. Khizhnyak

The problem of reflection and refraction of a narrow beam on the boundary between two dielectrics is considered. The field of the surface wave excited by Gaussian beam has been found out using the theory of integral representation of incident field. The depth of the field penetration is calculated. The diagram of the field in the lower medium was computed. The peculiarities of the surface wave penetration into medium with the smaller dielectric penetration are considered.

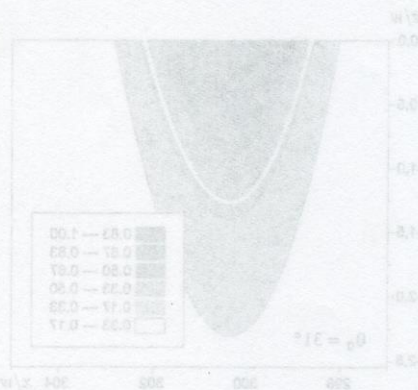


Рис. 4. План проникновения волны при падении Гессе-ва при угле  $\theta_0 > \theta_c$ .

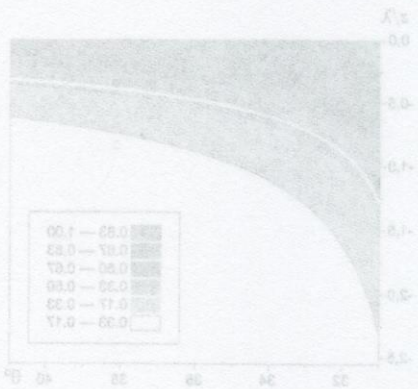


Рис. 5. Зависимость глубины проникновения поля в нижнюю среду от угла падения при  $\theta_0 > \theta_c$ .

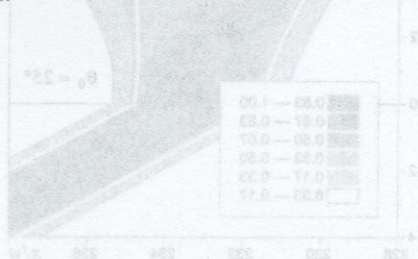


Рис. 2. Нормированная диаграмма интенсивности в области отраженного и прошедшего полей при падении Гессе-ва под углом  $\theta_0 < \theta_c$ .  $\theta_0 = 25^\circ$ ,  $k_0 z = 10^2$ ,  $n = 0.5$ ,  $m = 1$ ,  $\lambda = 200$  н.

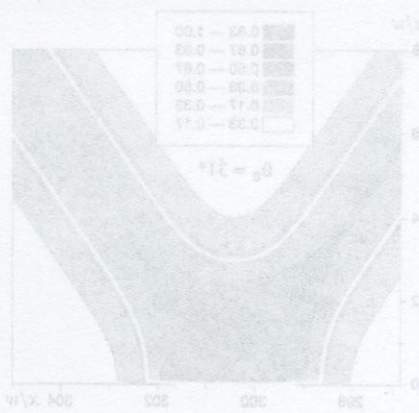


Рис. 3. Нормированная диаграмма интенсивности в области отраженного и прошедшего полей при падении Гессе-ва под углом  $\theta_0 > \theta_c$ .  $\theta_0 = 31^\circ$ ,  $k_0 z = 10^2$ ,  $n = 0.5$ ,  $m = 1$ ,  $\lambda = 200$  н.

Графический анализ полученных результатов представлен на рисунках 2-5. На рис. 2 показана нормированная диаграмма интенсивности поля в области отраженного и прошедшего полей