

Развитие пучковой неустойчивости в периодически неоднородной плазме

К. Ю. Блюх

ИНЦ "Харьковский физико-технический институт",

Украина, 310108, г. Харьков, ул. Академическая, 1

Статья поступила в редакцию 22 июля 1998 г., после переработки 11 января 1999 г.

В работе рассмотрена линейная стадия развития пучковой неустойчивости в периодически неоднородной плазме. Показано, что существенную роль в развитии неустойчивости играет наличие точки поворота у основного дифференциального уравнения, описывающего рассматриваемые волны. В приближении плавного изменения плотности плазмы обнаружено и описано возникновение зонной структуры в спектре усиливаемых в результате пучковой неустойчивости волн.

У роботі розглянуто лінійну стадію розвитку пучкової нестійкості у періодично неоднорідній плазмі. Показано, що суттєву роль у розвитку нестійкості відіграє наявність точки повороту у основного диференціального рівняння, яке описує хвилі. У наближенні плавної зміни густини плазми знайдено та описано виникнення зонної структури у спектрі підсилених хвиль.

Введение

Данная статья является продолжением работы [1], где рассматривалось развитие линейной стадии плазменно-пучковой неустойчивости (ППН) в продольно неоднородной стационарной плазме с произвольным плавным профилем неоднородности.

При проведении активных космических экспериментов с инжекцией пучка заряженных частиц с борта космического аппарата или при лабораторном моделировании таких экспериментов, плазма, как правило, неоднородна. Причиной возникновения неоднородности могут служить высокочастотные поля, возбуждаемые пучком в плазме. Механизмами такого воздействия СВЧ-полей на плазму являются либо высокочастотное давление в области с повышенным значением амплитуды возбужденной волны, либо же ВЧ-разряд, приводящий к добавочной ионизации нейтрального газа (пучково-плазменный разряд [2], [3]).

В обоих случаях деформация профиля плазмы происходит в области с максимальной амплитудой возбужденной волны и распространяется в виде собственных низкочастотных плазменных волн: ионно-звуковых, магнито-звуковых, альфвеновских и т. д. Поэтому особый интерес представляет задача о взаимодействии пучка с периодически неоднородной плазмой. Такая неоднородность может возникнуть и как результат развития автомодуляционного режима взаимодействия пучка с создаваемой им плазмой [4], или при независимом возбуждении низкочастотной волны плотности [5]. В последнем случае возможно управление спектральными характеристиками высокочастотной неустойчивости с помощью из-

менения параметров низкочастотной волны. При этом можно считать профиль плотности плазмы стационарным.

Периодичность профиля плазмы приводит к появлению в спектре широкополосного сигнала с зонной структурой, определяемой различными фазовыми соотношениями. Например, при плавной неоднородности большой амплитуды (такой, что резонанс пучка с волной возможен лишь на малых участках) определяющую роль в развитии неустойчивости играет набег фазы волны относительно модулированного пучка на одном периоде неоднородности (такой случай рассмотрен в работе [5]).

В данной работе рассмотрена линейная стадия развития пучково-плазменной неустойчивости в периодически неоднородной плазме. Предполагается, что плотность плазмы меняется достаточно плавно (период неоднородности много больше длины рассматриваемой волны). Показано, что существенную роль в поведении растущих решений играет наличие точки поворота у основного дифференциального уравнения, описывающего рассматриваемые волны [1]. В окрестности точки поворота получены упрощенное уравнение для волн и его аналитические решения. С помощью численного моделирования точных уравнений показано, что область применимости полученного уравнения достаточно широка, и аналитические выражения хорошо описывают поведение решений даже вне строгой области их применимости. Рассмотрены физически различные случаи крупномасштабной и мелкомасштабной (в зависимости от соотношения периода структуры и обратного инкремента неустойчивости) неоднородности. Сделаны оценки для спектральных парамет-

ров широкополосного сигнала при образовании в его спектре зонной структуры.

1. Основные уравнения для волн в области резонанса пучка с неоднородной плазмой

Рассматривается аксиально-симметричная электродинамическая система (среда) с пучком заряженных частиц, летящих со скоростью v_b сквозь неоднородную вдоль оси пучка z плазму. Считается выполненным условие плавности изменения плотности плазмы $n_p(z)$:

$$\frac{1}{L} \left| \frac{1}{n_p(z)} \frac{dn_p(z)}{dz} \right| \ll k, \quad (1.1)$$

где k – характерное волновое число рассматриваемых колебаний. Предполагается, что пучок является источником резонансного возмущения для некоторой собственной квазипотенциальной волны среды. Условия резонанса выполняются, когда дисперсионные характеристики рассматриваемой волны близки к значениям, определяемым условиями пересечения дисперсионных кривых собственной волны среды и пучковых волн:

$$\begin{cases} \varepsilon(\omega_0, k_0, n_p(z_0)) = 0, \\ \omega_0 = k_0 v_b, \end{cases} \quad (1.2)$$

где z_0 – некоторая точка, где точно выполняются условия резонанса (1.2) для рассматриваемой волны, а ω_0, k_0 – соответствующие этой точке параметры волны. Здесь мы пренебрегли малой плазменной частотой частиц пучка.

Линейным уравнением, описывающим волны, дисперсионные характеристики которых близки к резонансным, является [1]

$$\Phi''' - i\chi(\zeta)\Phi'' + \frac{i}{2}\Phi = 0. \quad (1.3)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по безразмерной координате $\zeta = \delta k(z - z_0)$ ($\delta k \ll k_0$ – характерный инкремент плазменно-пучковой неустойчивости), Φ – безразмерная амплитуда возмущений плотности пучка,

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{\delta k} \left[\left(\frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_g} \right) \delta\omega + \frac{k}{v_{ph}} \frac{dv_{ph}}{dn_p} \delta n_p(\zeta) \right], \quad (1.4)$$

где $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$ и $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ – соответственно фазовая и групповая скорости собственной волны среды; $\delta n_p = n_p(z) - n_p(z_0)$, $\delta\omega = \omega - \omega_0$ – отличия плотности плазмы и частоты волны соответственно от их резонансных значений (1.2), причем $|\delta n_p| \ll n_p(z_0)$, $|\delta\omega| \ll \omega_0$.

Три решения уравнения третьего порядка (1.3) соответствуют трем рассматриваемым волнам: двум пучковым и собственной волне среды. Неоднородность среды описывается величиной $\chi(\delta n_p(\zeta))$, которая является расстройкой волнового вектора волны от его резонансного значения при $\chi = 0$. Область значений $|\chi| \leq 1$ будем называть резонансной – в этой области собственная волна среды эффективно взаимодействует с пучком и инкремент неустойчивости одного из решений уравнения (1.3) порядка единицы, что соответствует ППН. Согласно (1.4) большие изменения χ могут достигаться при небольших изменениях плотности плазмы δn_p и поэтому также представляют практический интерес. При $\chi \gg 1$ инкремент неустойчивости много меньше единицы, а при $\chi \leq -\frac{3}{2}$ равен нулю.

Помимо амплитуды (характерной величины изменений $\chi(\zeta)$) неоднородность характеризуется еще и масштабом. При плавных изменениях $\chi(\zeta)$, когда

$$|\chi'(\zeta)| \ll 1, \quad (1.5)$$

можно воспользоваться ВКБ-приближением для решения уравнения (1.3). Нетрудно убедиться, что условие (1.5) сильнее условия (1.1) и с точностью до несущественных множителей соответствует малости характерного градиента неоднородности

$$\frac{1}{L} \text{ по сравнению с } \frac{\delta k^2}{k_0}.$$

Неоднородности, удовлетворяющие условию (1.5), будем называть крупномасштабными, а в случае обратного неравенства – мелкомасштабными. При мелкомасштабных неоднородностях ВКБ-приближение неприменимо, так как волны в резонансной области значений $|\chi| \leq 1$ перестают быть независимыми и взаимодействуют между собой [1]. При крупномасштабных неоднородностях рассматриваемые три волны можно считать независимыми. Исключение составляет поведение решений уравнения (1.3) при

значениях $\chi(\zeta)$ вблизи $\chi = \chi_0 = -\frac{3}{2}$. Действительно, точка $\chi = \chi_0$ является простой точкой поворота для уравнения (1.3). Как известно [6-8], в точке поворота сливаются два корня характеристического (дисперсионного) уравнения и волны перестают быть независимыми даже при сколь угодно плавной неоднородности.

Пусть $\delta\chi = \chi - \chi_0$ и

$$|\delta\chi| \ll 1. \quad (1.6)$$

Тогда волновые числа (определяемые корнями характеристического уравнения) двух волн близки, а волновое число третьей волны отличается от них на величину порядка единицы. В этом случае при крупномасштабных неоднородностях третью волну (устойчивую) можно рассматривать независимо, а задача о ППН сводится к анализу поведения двух волн в окрестности точки поворота. Общее уравнение (1.3) в этом случае может быть упрощено и в приближении условий (1.5), (1.6) сведено к уравнению второго порядка [1]:

$$a'' - \frac{2}{3}[\chi(\zeta) - \chi_0]a = 0. \quad (1.7)$$

Здесь введена новая комплексная величина $a(\zeta)$, которая отличается от $\Phi(\zeta)$ только фазой, т. е. $|a(\zeta)| = |\Phi(\zeta)|$. Область $\chi < \chi_0$ является областью устойчивости уравнений (1.3), (1.7), а область $\chi > \chi_0$ — областью неустойчивости: одно из решений здесь экспоненциально растет в результате ППН. Уравнение (1.7) имеет ВКБ-решения

$$a^+(\zeta) = \left\{ \frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\zeta)] \right\}^{-1/4} \exp \left\{ i \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{\frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\xi)]} d\xi \right\},$$

$$a^-(\zeta) = \left\{ \frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\zeta)] \right\}^{-1/4} \exp \left\{ -i \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{\frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\xi)]} d\xi \right\}, \quad (1.8)$$

которые верны внутри области (1.6) слева и справа от точки поворота, а в самой точке поворота имеют особенность. Здесь и далее берется ветвь корня, для которой $\sqrt{-1} = i$. Общее решение (1.7) имеет вид

$$a(\zeta) = Qa^+(\zeta) + Ra^-(\zeta), \quad (1.9)$$

где Q и R фиксированы слева и справа от точки поворота, но могут изменяться при прохождении через нее. Связь между коэффициентами Q , R при $\chi > \chi_0$ и при $\chi < \chi_0$ можно получить с помощью метода Цвана (см., например, [6], [7]). Идея этого метода заключается в аналитическом продолжении ВКБ-решений в комплексную плоскость ζ и обходе особой точки ζ_0 на достаточном расстоянии. Такая задача неоднократно решалась для уравнений типа (1.7) (см. [6], [7]) и была рассмотрена в контексте данной задачи в [1]. Отметим, что при прохождении точки поворота от $\chi < \chi_0$ к $\chi > \chi_0$, т. е. из области устойчивости в область неустойчивости, амплитуда результирующей растущей волны существенно зависит от фаз приходящих к точке поворота волн. В зависимости от набега фаз в области устойчивости слева от точки поворота, две сливающиеся волны могут подходить к области неустойчивости в фазе или противофазе, т. е. усиливать или ослаблять друг друга.

2. Решения уравнений ППН при периодической неоднородности плазмы

Связь решений вблизи точки поворота с фазами приходящих волн приводит к особым эффектам при периодической зависимости $\chi(\zeta)$. Поскольку решение подобным образом повторяется на каждом периоде неоднородности (рис. 1), эффективный инкремент неустойчивости на всей длине взаимодействия будет сильно зависеть от фазовых соотношений волн на одном периоде.

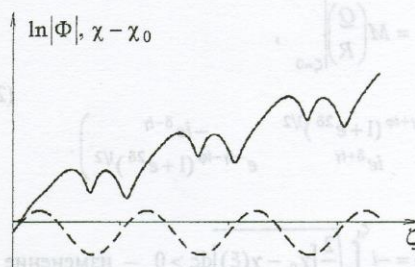


Рис. 1. Характерная зависимость логарифма амплитуды поля волны от координаты ζ (сплошная линия) при периодической расстройке $\chi(\zeta)$. Пунктиром приведена зависимость $\chi(\zeta) - \chi_0$. Интервалы, где $\chi(\zeta) - \chi_0 > 0$, соответствуют областям неустойчивости

Близкая по смыслу задача рассматривалась в работе [5]. Там предполагалось, что периодическая неоднородность плазмы имеет большую ам-

плитуду и эффективно взаимодействует с пучком лишь на небольших участках. При этом определяющую роль играет набег фазы собственной волны системы относительно модулированного пучка в областях, где нет взаимодействия. Максимальный эффективный инкремент достигается, когда волна и пучок приходят к области взаимодействия в фазе.

Исследуемые здесь неоднородности меньших амплитуд можно рассматривать как переход к случаю более мощных пучков, так как увеличение плотности пучка приводит к уменьшению амплитуды неоднородности в безразмерных переменных (см. [1]).

Пусть η – амплитуда неоднородности и среднее значение $\chi(\zeta)$ находится в малой окрестности точки поворота. Тогда условие (1.6) применимости уравнения (1.7) приведет к неравенству

$$\eta \ll 1. \tag{2.1}$$

Предположим, что на периоде неоднородности $L = \frac{2\pi}{v}$ кривая $\chi(\zeta)$ пересекает точку поворота два раза: в точке $\zeta = \zeta_0$ от устойчивых решений к неустойчивым, а в точке $\zeta = \zeta_1$ – в обратном направлении, причем $\zeta_1 > \zeta_0$. Согласно методу Цвана, обходя в комплексной плоскости две особые точки ζ_0 и ζ_1 , получим матрицу перехода коэффициентов решения (1.9) на периоде:

$$\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} \Big|_{\zeta=L} = M \begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} \Big|_{\zeta=0}, \tag{2.2}$$

$$M = \begin{pmatrix} e^{i\gamma+i\varphi}(1+e^{2\delta})^{1/2} & -ie^{\delta-i\gamma} \\ ie^{\delta+i\gamma} & e^{-i\gamma-i\varphi}(1+e^{2\delta})^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\delta = -i \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \sqrt{\frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\xi)]} d\xi > 0$ – изменение показателя экспоненты в области неустойчивости,

$\gamma = \int_{\zeta_1}^{\zeta_0+L} \sqrt{\frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\xi)_0]} d\xi > 0$ – набег фазы в области устойчивости, а φ – постоянная фаза, которую нельзя определить данным методом. При получении (2.2) было учтено, что нижний предел интегрирования в ВКБ-решениях (1.8) также сдвигается на период.

Для применимости метода Цвана в данном случае нужно потребовать, чтобы решения (1.8) совершали большое число осцилляций в области устойчивости [7]:

$$\gamma \gg 1. \tag{2.3}$$

Если размер области устойчивости ($\zeta_1, \zeta_0 + L$) не мал по сравнению с периодом L , то (2.3) эквивалентно условию

$$v^2 \ll \eta. \tag{2.4}$$

Согласно теореме Флоке-Ляпунова (см., например, [9]) собственные числа $\lambda_{1,2}$ матрицы перехода M определяют инкременты $\kappa_{1,2}$ решений уравнения (1.7) с периодическим $\chi(\zeta)$:

$$\kappa_{1,2} = \frac{\text{Re} \ln |\lambda_{1,2}|}{L}. \tag{2.5}$$

Из (2.2) имеем:

$$\lambda_{1,2} = (1+e^{2\delta})^{1/2} \cos(\gamma+\varphi) \pm i\sqrt{1-(1+e^{2\delta})\cos^2(\gamma+\varphi)}. \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что при

$$(1+e^{2\delta})\cos^2(\gamma+\varphi) \leq 1 \tag{2.7}$$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, инкременты (2.5) равны нулю и все решения ограничены. Если же

$$(1+e^{2\delta})\cos^2(\gamma+\varphi) > 1, \tag{2.8}$$

то $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1$, и одно решение растет, а другое затухает.

Таким образом, условия (2.7), (2.8) определяют соответственно зоны устойчивости и неустойчивости решений. При $\delta \gg 1$ зоны устойчивости (2.7) экспоненциально узки, а при $\delta \leq 1$ зоны устойчивости и неустойчивости имеют ширину одного порядка. Нетрудно видеть, что последний случай соответствует $\delta \ll \gamma$, т. е. зоны устойчивости заметны, только когда решение почти все время лежит в области устойчивости и эффективные инкременты малы. Экспоненциально узкие зоны устойчивости при $\delta \gg 1$ отвечают решениям, которые при прохождении точки поворота в сторону неустойчивости попадают точно на затухающую волну. Очевидно, что физически такой случай не реализуется. Экспоненциально узкие зоны

устойчивости не могут наблюдаться на практике, но ввиду непрерывной зависимости инкрементов (2.5) от параметров, на местах зон устойчивости будут заметны более широкие зоны пониженных инкрементов.

Отметим, что чередование зон устойчивости и неустойчивости определяется только набегами фаз волн. Так, при фиксированном δ максимальный инкремент достигается при $\gamma + \varphi = \pi l$, где l – целое число, а наиболее устойчивое решение при $\gamma + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi l$. Поскольку фазы двух волн (1.8) в области устойчивости отличаются только знаком, разность фаз приходящих к области неустойчивости волн равна $2(\gamma + \varphi)$. Таким образом, как и предполагалось, максимальный инкремент достигается, когда волны приходят к точке поворота в фазе, а когда волны приходят в противофазе, решение устойчиво и инкремент равен нулю.

Приведенные выше аналитические результаты были проверены численным моделированием на примере зависимости

$$\chi(\zeta) = \chi_0 - \sigma_0 - \sigma \cos(v\zeta), \quad \sigma > 0. \quad (2.9)$$

Пусть сначала среднее на периоде значение расстройки лежит в области устойчивости: $\langle \chi(\zeta) \rangle < \chi_0$, $\sigma_0 > 0$. Тогда заменой

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma_0| \zeta, \quad q = \frac{\sigma}{|\sigma_0|}, \quad w = \sqrt{\frac{3}{2|\sigma_0|}} v \quad (2.10)$$

уравнение (1.7) сводится к уравнению типа уравнения Матье:

$$\ddot{a} + [1 + q \cos(w\tau)] a = 0, \quad (2.11)$$

где точками обозначено дифференцирование по τ . Из (2.7), (2.8) следует, что при $q \gg 1$ зоны неустойчивости экспоненциально узки, а при $q \approx 1$ зоны устойчивости и неустойчивости имеют ширину одного порядка. При $q \ll 1$ точка поворота не пересекается и формулы (2.6)-(2.8) не пригодны. В этом случае уравнение (2.11) имеет хорошо известные зоны параметрических резонансов с растущими решениями. Их ширина экспоненциально мала. Это обеспечивает непрерывный переход от случая $q > 1$ к случаю $q < 1$.

Для выполнения исходного условия плавности (1.1), период неоднородности должен быть много больше длины волны. Однако при переходе к безразмерным переменным (см. (1.3), (1.4)) период неоднородности умножается на малый параметр

δk , и поэтому безразмерный период может быть малым. Такие неоднородности, согласно пункту 1, называются мелкомасштабными.

При мелкомасштабных неоднородностях $w \gg 1$ нарушается условие (2.4) и полученные выше результаты не верны. В этом случае, вообще говоря, становится неприменимым упрощенное уравнение (1.7), так как третья волна перестает быть независимой (см. пункт 1). Однако, как будет показано ниже, анализ уравнения (1.7) позволяет получить правильные, по крайней мере качественно, результаты. Решения уравнения (2.11) при $w \gg 1$ можно получить методом усреднения (см., например, [10]). Представим решение в виде

$$a(\tau) = G(\tau) + \tilde{g}(\tau), \quad (2.12)$$

где $G(\tau)$ – медленно меняющаяся функция:

$$\left| \frac{1}{G(\tau)} \frac{dG(\tau)}{d\tau} \right| \ll w, \quad (2.13)$$

а $\tilde{g}(\tau)$ – малые быстрые осцилляции:

$$\left| \frac{1}{\tilde{g}(\tau)} \frac{d\tilde{g}(\tau)}{d\tau} \right| \sim w, \quad |\tilde{g}| \ll |G|. \quad (2.14)$$

Тогда, подставив (2.12) в (2.11), получим после усреднения:

$$\begin{aligned} \ddot{G} + G + q \langle \tilde{g}(\tau) \cos(w\tau) \rangle &= 0, \\ \ddot{\tilde{g}} + \tilde{g} + Gq \cos(w\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\langle \tilde{g}(\tau) \cos(w\tau) \rangle$ – среднее значение по периоду $\frac{2\pi}{w}$. Решая (2.15) с учетом (2.13), (2.14), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &\cong \frac{Gq}{w^2} \cos(w\tau), \\ \ddot{G} - \left(1 + \frac{q^2}{2w^2} \right) G &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из (2.16) видно, что для выполнения условий (2.13), (2.14) необходимо потребовать, чтобы

$$q \ll w^2. \quad (2.17)$$

Нетрудно видеть, что это обратное к (2.4) условие. При выполнении неравенства (2.17) первое уравнение в (2.15), а следовательно и (2.11), имеет устойчивые ограниченные решения. Если условие (2.17) не выполняется, решения неустойчивы.

На рис. 2, а приведены результаты численного решения уравнения (2.11) с различными параметрами. По оси абсцисс отложена амплитуда q в логарифмическом масштабе, а по оси ординат – частота w в логарифмическом масштабе. Каждая точка на плоскости (q, w) соответствует численному решению уравнения (2.11) с соответствующими параметрами. Значение модуля решения $a_1 = \left| a \left(\frac{10\pi}{w} \right) \right|$ через 5 периодов сравнивалось с

начальным значением $a_0 = |a(0)|$. Зоны, соответствующие $a_1 \leq a_0$, являются зонами устойчивости и отмечены на рисунке черным цветом. Зоны с $a_1 > a_0$ – зоны неустойчивости, отмеченные белым цветом*. Отметим, что границы зон устойчивости на рис. 2, б совпадают с известными графиками, которые обычно приводятся для другой ($\tau' = w\tau/2$) нормировки уравнения (2.11). На рис. 2, б приведены результаты аналогичного численного счета исходного уравнения третьего порядка (1.3). Соответствующая предыдущему счету зависимость $\chi(\zeta)$ и отображение плоскости $(q, w) \rightarrow (\sigma, \nu)$ определяются соотношениями (2.9), (2.10). Как видно из сравнения рис. 2, а и 2, б, области устойчивости и неустойчивости уравнений (2.11) и (1.3) практически совпадают даже при больших амплитудах и частотах, когда нарушаются условия (2.1), (2.4) и уравнение (2.11), вообще говоря, неприменимо. Заметим, что из-за ограниченной точности численного счета некоторые зоны, отмеченные черным, могут не являться зонами абсолютной устойчивости. Решения там могут иметь малый инкремент неустойчивости. Так, исходное уравнение (1.3) не имеет области абсолютной высокочастотной устойчивости, определяемой соотношением (2.17), но инкремент неустойчивости решений (1.3) в этой области мал.

Пусть теперь среднее значение расстройки на периоде лежит в области неустойчивых решений: $\langle \chi(\zeta) \rangle > \chi_0$, $\sigma_0 < 0$. В этом случае при плавной зависимости $\chi(\zeta)$, определяемой условиями (2.1), (2.4), показатель экспоненты δ в формулах (2.6)-

(2.8) будет велик, а зоны устойчивости уравнения (1.7) экспоненциально узки. Если выбрать $\chi(\zeta)$ в виде (2.9) с $\sigma_0 < 0$, то заменой (2.10) уравнение (1.7) сводится к уравнению

$$\ddot{a} + [-1 + q \cos(w\tau)] a = 0. \quad (2.18)$$

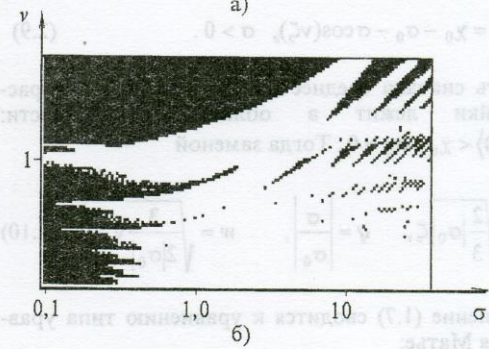
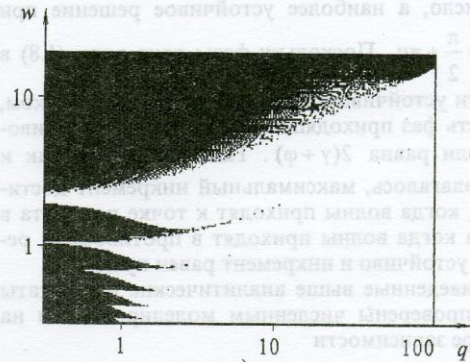


Рис. 2. Зоны устойчивости (черный цвет) при периодической неоднородности со средним значением расстройки, находящимся в области устойчивых решений ($\sigma_0 = 0,3$). По горизонтали отложены значения безразмерных амплитуд, по вертикали – безразмерных обратных периодов неоднородности: а) результаты численного решения упрощенного уравнения (2.11); б) результаты численного решения точного уравнения (1.3) с расстройкой (2.9)

Методом усреднения несложно показать, что при мелкомасштабной неоднородности уравнение (2.18) имеет область высокочастотной устойчивости, определяемую неравенствами

$$1 \ll \sqrt{2}w < q \ll w^2. \quad (2.19)$$

* Вообще говоря, для точного определения устойчивости решения, необходимо находить собственные числа матрицы перехода фундаментальной системы решений. Однако эта процедура сильно затрудняет численный счет, а используемый упрощенный критерий устойчивости практически всегда дает правильный результат и с хорошей точностью описывает структуру зон устойчивости.

Зоны устойчивости, полученные численным решением уравнений (2.18) и (1.3), параметры которых связаны соотношениями (2.9) и (2.10), приведены на рис. 3, а и 3, б соответственно. Экспоненциально узкие зоны устойчивости при этом не заметны. Зона высокочастотной устойчивости, определяемая соотношением (2.19), у исходного уравнения (1.3) не имеет четко выраженного характера, как в случае высокочастотной зоны (2.17), однако инкремент неустойчивости в этой зоне понижен.

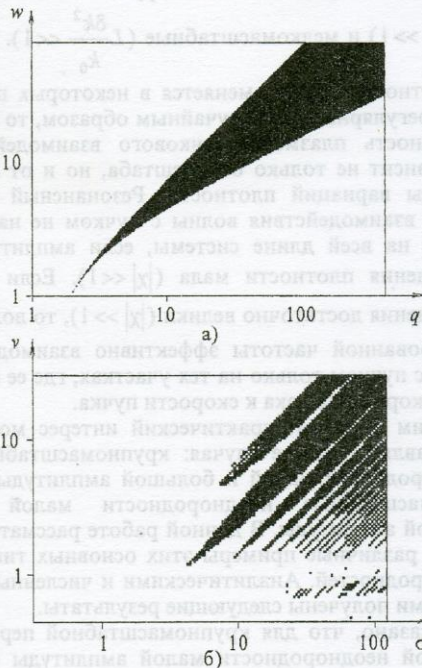


Рис. 3. Зоны устойчивости волн (черный цвет) при периодической неоднородности плазмы в случае, когда среднее значение расстройки находится в области неустойчивых решений ($\sigma_0 = -0,3$). По горизонтали отложены значения безразмерных амплитуд, по вертикали — безразмерных обратных периодов неоднородности: а) результаты численного решения упрощенного уравнения (2.11); б) результаты численного решения точного уравнения (1.3) с расстройкой (2.9)

Отметим, что при больших амплитудах расстройки у уравнения (1.3) появляются зоны устойчивости и неустойчивости, имеющие единичный наклон в логарифмических координатах, т. е.

определяемые только параметром $\frac{\sigma}{w} \sim \frac{q}{w}$ (рис. 2, б; 3, б). Их происхождение связано с разностью фаз собственной волны системы и пучка при выходе из области резонанса $|\chi(\zeta)| \sim 1$. Если волна приходит в фазе с пучком, то она усиливается с максимальным инкрементом. Если фазы волны и пучка сдвинуты на π , то волна имеет минимальный инкремент или даже устойчива. Подробная математическая модель плазменно-пучкового взаимодействия при периодической расстройке с большой амплитудой изложена в работе [5].

Приведем еще одну возможную трактовку полученных результатов. Рассмотрим неоднородность фиксированной амплитуды и устремим пространственный масштаб неоднородности к нулю ($L \rightarrow 0, w \rightarrow \infty$). Как видно из рис. 2, а, б и условия (2.17), при неоднородности со средним значением расстройки, лежащим в области устойчивых решений: $\langle \chi(\zeta) \rangle < \chi_0$, колебания всегда устойчивы, как и в однородном случае с $\chi = \langle \chi(\zeta) \rangle$. Аналогично при неоднородности со средним значением расстройки, лежащим в области неустойчивых решений: $\langle \chi(\zeta) \rangle > \chi_0$, колебания всегда неустойчивы, как и в соответствующем однородном случае (рис. 3, формула (2.19)). Таким образом, на основании этого анализа и соотношений (2.17), (2.19), можно утверждать, что в случае мелкомасштабных неоднородностей их влияние становится малым при устремлении масштаба изменений параметров к нулю. Эта малость обеспечивается малостью параметра $\frac{q}{w}$, т. е. произведением амплитуды неоднородности на ее период.

3. Спектр волн при ПИН в периодически неоднородной плазме

В заключение рассмотрим динамику спектральных характеристик волн, усиливающихся в результате плазменно-пучковой неустойчивости в периодически неоднородной плазме. Предположим, что вначале возбуждаются колебания с широким спектром ω . Если длина рассматриваемой системы L_0 велика по сравнению с характерным обратным инкрементом κ^{-1} , то в конце системы будут заметны лишь волны с теми частотами, для которых эффективный инкремент был максимален. Таким образом, если спектр входного сигнала состоял из волн, для которых точка поворота проходит на каждом периоде неоднородности, то спектр сигнала на выходе будет состоять из

узких полос, отвечающих наиболее усиливаемым волнам. Оценим интервал $\Delta\omega$ между соседними полосами в спектре. Согласно (2.6)-(2.8) соседние максимумы инкремента отличаются сдвигом набега фаз $\gamma + \phi$ на π . Отсюда имеем:

$$\Delta\omega \sim \pi \left(\frac{d(\gamma + \phi)}{d\omega} \right)^{-1} \quad (3.1)$$

Вычислив зависимость $\gamma(\omega)$ с учетом (1.4), из (3.1) получим:

$$\Delta\omega \sim \frac{v_b v_g}{v_b - v_g} \delta k v \sqrt{\eta} \quad (3.2)$$

Здесь предполагалось, что $\delta \sim \gamma$. В этом случае фазой ϕ можно пренебречь. Другой случай $\delta \ll \gamma$ (рассмотрен в [7]) не представляет интереса для данной задачи, так как эффективные инкременты (2.5) малы. Заметим, что благодаря условию (2.4) изменение частоты на $\Delta\omega$ соответствует малой добавке к зависимости $\chi(\zeta)$ (1.4), и рассматриваемый интервал по ω вмещает много полос спектра, когда волна проходит на каждом периоде неоднородности точку поворота.

Рассмотрим наиболее усиливаемые волны вблизи максимума их инкремента κ . Положим

$$\kappa \cong \kappa_{\max} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \omega^2} \right) (\omega - \omega_{\max})^2, \quad (3.3)$$

где ω_{\max} - частота волны, отвечающая локальному максимальному инкременту κ_{\max} . Считая

$$\kappa_{\max} \sim \delta k \sqrt{\eta}, \quad \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \omega^2} \sim \frac{\kappa_{\max}}{\Delta\omega^2}$$

в исходных переменных, получим, что на длине L_0 будут заметны лишь волны с частотами в интервале

$$d\omega \sim \frac{1}{(\delta k \sqrt{\eta} L_0)^{1/2}} \Delta\omega \ll \Delta\omega \quad (3.4)$$

в окрестности частоты ω_{\max} . Формула (3.4) оценивает ширину одной полосы в спектре сигнала на выходе. Соотношения (3.2), (3.4) верны при $\eta \leq 1$ для волн вблизи точки поворота. При неоднородностях больших амплитуд $\eta \gg 1$, рассмотренных в [5], спектральные характеристики оцениваются формулами (3.2), (3.4) с $\eta = 1$.

Заключение

Рассмотрена линейная стадия взаимодействия пучка заряженных частиц с плазмой, плотность которой периодически меняется вдоль пучка. Единственным ограничением является требование достаточно плавного изменения плотности плазмы: характерный пространственный масштаб неоднородности L предполагается большим по сравнению с длиной волны рассматриваемых колебаний $2\pi k_0^{-1}$ (условие (1.1)).

В контексте исследования плазменно-пучковой неустойчивости естественно разделить все виды такой неоднородности на крупномасштабные ($L \frac{\delta k^2}{k_0} \gg 1$) и мелкомасштабные ($L \frac{\delta k^2}{k_0} \ll 1$). Если

плотность плазмы меняется в некоторых пределах регулярным или случайным образом, то эффективность плазменно-пучкового взаимодействия зависит не только от масштаба, но и от амплитуды вариаций плотности. Резонансный характер взаимодействия волны с пучком не нарушается на всей длине системы, если амплитуда возмущения плотности мала ($|\chi| \ll 1$). Если же возмущения достаточно велики ($|\chi| \gg 1$), то волна фиксированной частоты эффективно взаимодействует с пучком только на тех участках, где ее фазовая скорость близка к скорости пучка.

Таким образом, практический интерес могут представлять четыре случая: крупномасштабные неоднородности малой и большой амплитуды, и мелкомасштабные неоднородности малой и большой амплитуды. В данной работе рассматривались различные примеры этих основных типов неоднородностей. Аналитическими и численными методами получены следующие результаты.

Показано, что для крупномасштабной периодической неоднородности малой амплитуды определяющую роль в развитии неустойчивости играют фазовые соотношения между волнами вблизи точки поворота. В рамках общего рассмотренного был подтвержден результат, полученный в работе [5]: развитие неустойчивости при периодической крупномасштабной неоднородности большой амплитуды определяется набегом фазы волны относительно пучка. Эти результаты определяют зонную структуру спектра возбуждаемых пучком волн. При мелкомасштабных неоднородностях возможно появление зон с пониженным инкрементом неустойчивости, также связанных с поведением решений в окрестности точки поворота и появлением эффективной высокочастотной усредненной силы. Дальнейшее уменьшение масштаба неоднородности при фиксированной амплитуде разрушает зонную структуру спектра и уменьшает влияние неоднородности на развитие плазменно-

пучковой неустойчивости. В случае, когда отношение амплитуды к пространственной частоте неоднородности мало, влиянием неоднородности можно пренебречь.

Рассмотрено усиление сигнала с конечной шириной спектра в периодически неоднородной плазме. Показано, что при прохождении сквозь область неустойчивости спектр приобретает зонную структуру, сделаны оценки для параметров спектра выходного сигнала.

Работа выполнена при поддержке Украинского научно-технического центра (Проект №277).

Литература

1. К. Ю. Блюх. Радиофизика и радиоастрономия. 1998, 3, №1, с. 49-61.
2. I. F. Kharchenko, Ya. B. Fainberg, R. M. Nikolaev, E. A. Kornilov, E. I. Lutsenko, N. S. Pedenko. Proc. of the 4th Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. Uppsala, 17-21 August 1959, Amsterdam, 1960, Vol. 2, pp. 671-680.
3. Е. А. Корнилов, О. Ф. Ковпик, Я. Б. Файнберг, И. Ф. Харченко. ЖТФ. 1965, 35, Вып. 8, с. 1372-1377.
4. Ю. П. Блюх, М. Г. Любарский, В. О. Подобинский. Физика плазмы. 1990, 16, №10, с. 1186-1194.
5. Ю. П. Блюх, М. Г. Любарский, В. О. Подобинский. Физика плазмы. 1994, 20, №10, с. 910-915.

6. Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). Москва, Мир, 1965, 238 с.
7. Г. М. Заславский, В. П. Мейтлис, Н. Н. Филоненко. Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск, Наука, 1982.
8. М. В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1983, 352 с.
9. В. А. Якубович, В. М. Старжинский. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Москва, Наука, 1972, 720 с.
10. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, Физматгиз, 1955.

Development of Beam Instability in Periodically Inhomogeneous Plasma

K. Yu. Bliokh

The linear stage of a beam instability in a periodic inhomogeneous plasma is considered. It is shown that an important role in the development of instability plays the existence of turning points in the main differential equation which describes the wave under consideration. In the approximation of smooth density plasma variation the zone structure in the spectrum of growing waves is found and investigated.