

## О влиянии неоднородности плазмы на развитие пучковой неустойчивости

К. Ю. Блюх

Харьковский государственный университет  
310077, Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 11 февраля 1998 г., после переработки 21 апреля 1998 г.

В работе рассмотрена линейная стадия развития пучковой неустойчивости в продольно неоднородной плазме. Найдены ВКБ-решения для волн в области резонансного плазменно-пучкового взаимодействия при произвольном профиле неоднородности. Исследовано поведение решений при прохождении точки поворота. Рассмотрена линейная трансформация волн при выходе из области резонансного взаимодействия.

У роботі розглянуто лінійну стадію розвитку жмуткової нестійкості в повздовжньо неоднорідній плазмі. Знайдено ВКБ-рішення для хвиль в області резонансної плазмено-жмуткової взаємодії при довільному профілі неоднорідності. Досліджено поведінку рішень при проходженні точки повороту. Розглянуто лінійну трансформацію хвиль при виході з області резонансної взаємодії.

### Введение

В активных космических экспериментах с использованием пучков заряженных частиц, инжектируемых с борта космического аппарата в ионосферную плазму, пучок, как правило, взаимодействует не с естественной плазмой ближнего космического пространства, а с той плазмой, которая создается самим пучком в области его распространения. Это же относится и к лабораторным экспериментам по моделированию взаимодействия пучков с ионосферной плазмой. Плазма создается либо ударной ионизацией нейтральной компоненты частицами пучка, либо СВЧ-разрядом в полях, возбуждаемых пучком. Последний случай – пучково-плазменный разряд [1], [2] – характеризуется наибольшей эффективностью взаимодействия и, как правило, реализуется в экспериментах. Так, например, при инъекции пучка электронов в ионосферную плазму на высоте 100 км в результате развития пучково-плазменного разряда создается плазма, плотность которой на 1-2 порядка выше фоновой. В этом случае можно считать, что источником плазмы являются возбужденные в ней пучком СВЧ-поля, неоднородность которых определяет и неоднородность плазмы.

Вне зависимости от механизма образования плазмы последняя всегда находится под воздействием возбуждаемых в ней пучком СВЧ-полей. Амплитуды возникающих при развитии пучково-плазменной неустойчивости СВЧ-полей характеризуются сильной продольной неоднородностью, что приводит к появлению силы высокочастотного давления, выталкивающей плазму из области с повышенным значением амплитуды поля. Таким

образом, и пучково-плазменный разряд, интенсивность которого зависит от амплитуды поля, и сила высокочастотного давления приводят к появлению продольной неоднородности плотности плазмы, и пучок всегда взаимодействует с неоднородной плазмой.

Неоднородность плотности плазмы может существенно сказаться на эффективности пучково-плазменной неустойчивости. Специальным образом подобранная неоднородность может привести к росту амплитуды насыщения неустойчивости. Для этого необходимо, чтобы фазовая скорость синхронной с пучком волны убывала согласованно с уменьшением скорости пучка, теряющего энергию при возбуждении волны. Этот эффект проявляется на нелинейной стадии взаимодействия, на которой энергия пучка заметно изменяется. В рассматриваемых задачах взаимодействия пучка с создаваемой им плазмой существенной является линейная стадия взаимодействия. Это связано с тем, что деформация профиля плазмы происходит в области с максимальной амплитудой возбужденной волны и распространяется от туда в виде собственных низкочастотных плазменных волн: ионно-звуковых, магнитозвуковых, альфвеновских и т. д. Распространяющиеся навстречу пучку возмущения плотности могут сильно изменить условия возбуждения полей уже на линейной стадии развития неустойчивости, что в конечном итоге скажется на уровне полей в области возникновения исходной неоднородности плотности плазмы. Кроме того, неоднородность плотности, вызванная высокочастотными полями, может быть настолько велика, что насыщение пучковой неустойчивости произойдет раньше, чем



скажется нелинейность движения частиц пучка. В этом случае можно ограничиться рассмотрением только линейной стадии пучковой неустойчивости.

Самосогласованное описание процесса возбуждения пучком собственных волн плазмы, параметры которой (плотность) зависят от амплитуды волны, является сложной задачей. Для ее решения необходимо знать как развивается пучковая неустойчивость в плазме с достаточно произвольным профилем плотности. При этом учитывая то, что характерное время изменения профиля плотности плазмы (определяемое скоростью распространения собственных низкочастотных плазменных волн) много больше времени формирования высокочастотного поля возбуждаемой пучком волны (определяемого скоростью распространения высокочастотной волны), можно решать уравнения пучковой неустойчивости для высокочастотного поля, считая профиль плотности плазмы стационарным.

Качественно влияние неоднородности плазмы на развитие пучковой неустойчивости рассматривалось в работах [3,4]. Диссипативная пучковая неустойчивость в неоднородной плазме исследовалась в [5]. В этих и ряде более поздних работ предполагалось, что плотность плазмы меняется монотонно и не рассматривалось поведение решений в окрестности точки поворота (см. ниже). Кроме того, в этих работах не приведены аналитические выражения для полей волн, возбуждаемых пучком в неоднородной среде и не исследован вопрос о трансформации волн при их выходе из резонанса с пучком.

В данной работе рассмотрена линейная стадия развития пучково-плазменной неустойчивости в предположении, что плотность плазмы стационарна и меняется в пространстве адиабатически, т. е. достаточно плавно. Это приближение, называемое квазиклассическим в квантовой механике, приближением геометрической оптики в теории распространения волн и ВКБ-приближением в теории дифференциальных уравнений, позволяет получить некоторые аналитические результаты.

Для решения самосогласованной задачи имеют ценность именно общие функциональные зависимости высокочастотных полей от произвольного профиля плотности плазмы. Такие зависимости позволяют исключить в каждой конкретной системе уравнения плазменно-пучковой неустойчивости, понизив порядок общей задачи. С этой целью получены общие функциональные ВКБ-решения (раздел 2) и решения в окрестности точки поворота (раздел 3). Знание поведения этих решений также значительно облегчает качественный анализ произвольной самосогласованной задачи.

При проведении активных космических экспериментов диагностическая аппаратура расположена вне области взаимодействия пучка с плаз-

мой. В частности, регистрируются только те высокочастотные колебания, которые покинули область их возбуждения. Для определения связи между колебаниями, возбуждаемыми пучком и колебаниями, регистрируемыми измерительной аппаратурой, рассмотрена задача о трансформации волн, синхронизм которых с пучком нарушается вследствие сильной неоднородности плазмы (раздел 4).

### 1. Основные уравнения для волн в области резонанса пучка с неоднородной плазмой

Рассматривается аксиально-симметричная электродинамическая система (среда) с пучком заряженных частиц, летящих со скоростью  $v_b$  сквозь неоднородную вдоль оси пучка  $z$  плазму. Считается выполненным условие адиабатичности (плавности) изменения плотности плазмы  $n_p(z)$ :

$$\frac{1}{L} = \left| \frac{1}{n_p(z)} \frac{dn_p(z)}{dz} \right| \ll k, \quad (1.1)$$

где  $k$  – характерное волновое число рассматриваемых колебаний. Предполагается также, что наличие пучка слабо возмущает собственные волны среды. Необходимое для этого условие (1.19) будет сформулировано ниже.

Пусть  $\hat{\epsilon}$  – оператор эффективной диэлектрической проницаемости, характеризующий квазипотенциальные собственные колебания среды. Исходными линеаризованными уравнениями, описывающими взаимодействие пучка с собственными волнами среды, являются уравнение Пуассона, уравнения непрерывности и движения для частиц пучка:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\hat{\epsilon} E) &= 4\pi e \tilde{n}_b, \\ \frac{\partial \tilde{n}_b}{\partial t} + v_b \frac{\partial \tilde{n}_b}{\partial z} + n_b \frac{\partial \tilde{v}_b}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{v}_b}{\partial t} + v_b \frac{\partial \tilde{v}_b}{\partial z} &= \frac{e}{m} E. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $E$  – продольная компонента электрического поля возбуждаемой пучком волны;  $n_b$  – плотность частиц пучка;  $\tilde{n}_b$  и  $\tilde{v}_b$  – возмущения плотности и скорости частиц пучка соответственно. В рассматриваемой системе существуют волны двух типов: собственные колебания среды, удовлетворяющие дисперсионному уравнению

$$\epsilon(\omega, k, n_p(z)) \equiv e^{-i\omega t + ikz} \hat{\epsilon} e^{i\omega t - ikz} = 0, \quad (1.3)$$



и плазменные колебания пучка с дисперсией

$$\omega = kv_b \pm \omega_b, \quad (1.4)$$

где  $\omega_b = \sqrt{\frac{4\pi n_b e^2}{m}}$  – плазменная частота частиц пучка. Предполагается, что

$$\omega_b \ll \omega. \quad (1.5)$$

Пучок эффективно взаимодействует с собственными волнами среды вблизи пересечения дисперсионных кривых (1.3) и (1.4), то есть вблизи таких  $\omega_0, k_0$ , что

$$\begin{cases} \varepsilon(\omega_0, k_0, n_p(z_0)) = 0, \\ \omega_0 = k_0 v_b. \end{cases} \quad (1.6)$$

Вообще говоря, радиальные структуры полей пучковой волны (плазменная волна в пучке) и собственной волны среды могут сильно отличаться, так как характерный поперечный размер системы может быть много больше радиуса пучка. Например, в лабораторных установках диаметр волновода ~10 см, а пучка ~1 см. В активных экспериментах в космосе, где сравнительно плотная плазма возникает вследствие плазменно-пучкового разряда, диаметр плазменного образования доходит до десятка метров, а пучок расходится до метрового диаметра. Однако в области резонанса (1.6) пучковая волна возбуждает всю систему, и радиальная структура электрического поля всех волн близка к радиальной структуре собственной волны среды. Поэтому будем искать решения для электрического поля в виде

$$E = E_0(z)\psi_0(r)\exp\left[i\omega t - i\left(k_0 + \frac{\delta\omega}{v_b}\right)z\right], \quad (1.7)$$

где  $\psi_0(r)$  – функция радиальной структуры собственной волны среды;  $\omega$  – частота возбуждаемой волны, близкая к  $\omega_0$ :  $\delta\omega = \omega - \omega_0$ ,  $|\delta\omega| \ll \omega_0$ ; а  $E_0(z)$  – медленно меняющаяся из-за влияния пучка и неоднородности плазмы амплитуда:

$$\left| \frac{1}{E_0(z)} \frac{dE_0(z)}{dz} \right| \ll k_0. \quad (1.8)$$

Для возмущений параметров пучка также введем медленные амплитуды аналогичным образом:

$$\tilde{n}_b = \tilde{n}_{b0}(z)\psi_b(r)\exp\left[i\omega t - i\left(k_0 + \frac{\delta\omega}{v_b}\right)z\right], \quad (1.9)$$

$$\tilde{v}_b = \tilde{v}_{b0}(z)\psi_b(r)\exp\left[i\omega t - i\left(k_0 + \frac{\delta\omega}{v_b}\right)z\right];$$

$$\left| \frac{1}{\tilde{n}_{b0}(z)} \frac{d\tilde{n}_{b0}(z)}{dz} \right| \ll k_0, \quad \left| \frac{1}{\tilde{v}_{b0}(z)} \frac{d\tilde{v}_{b0}(z)}{dz} \right| \ll k_0. \quad (1.10)$$

Эти величины, будучи сосредоточены в пучке, в отличие от поля  $E$  имеют другую радиальную структуру  $\psi_b(r)$ . Пренебрегая их зависимостью от  $r$  в пределах тонкого пучка, можно положить

$$\psi_b(r) = \begin{cases} 1, & r \leq r_b, \\ 0, & r > r_b, \end{cases} \quad (1.11)$$

где  $r_b$  – радиус пучка. Чтобы выделить из  $\psi_b(r)$  резонансную для среды гармонику  $\psi_0(r)$ , скалярно умножим\* первое уравнение (1.2) на  $\psi_0(r)$ . Остальные два уравнения (1.2) написаны для пучка, и мы положим  $\psi_0(r) \equiv const$  в пучке. В результате скалярного домножения и после подстановки (1.7), (1.9) в (1.2) с учетом (1.6), (1.8), (1.10), (1.11) получим:

$$\begin{aligned} & -ik_0 \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \delta\omega + \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \frac{\delta\omega}{v_b} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_p} \delta n_p + i \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \frac{\partial}{\partial z} \right\} \times \\ & \times \int_S \psi_0^2 ds E_0(z) = 4\pi e \int_S \psi_0 \tilde{n}_b ds, \\ & v_b \frac{d\tilde{n}_{b0}}{dz} - ik_0 n_b \tilde{v}_{b0} = 0, \\ & v_b \frac{d\tilde{v}_{b0}}{dz} = \frac{e}{m} E_0 \psi_0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь  $\delta n_p = n_p(z) - n_p(z_0)$ , и было учтено, что

$$\psi_0(r)\exp\left[i\omega t - i\left(k_0 + \frac{\delta\omega}{v_b}\right)z\right] - \text{собственная функция}$$

оператора  $\hat{\varepsilon}$ , отвечающая собственному числу

$$\varepsilon\left(\omega, k_0 + \frac{\delta\omega}{v_b}, n_p(z)\right) \cong \varepsilon(\omega_0, k_0, n_p(z_0)) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \delta\omega + \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \frac{\delta\omega}{v_b} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_p} \delta n_p.$$

\* Для уравнения Пуассона скалярным произведением, в котором собственные функции ортогональны, является интеграл от произведения функций по рассматриваемой в граничной задаче области (в данном случае – по сечению среды).



Отметим, что интеграл  $\int_S \psi_0 \tilde{n}_b ds$  берется фактически только по сечению пучка  $S_b$ . Предположим, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = -v_g \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} < 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_p} = \frac{k_0^2}{\omega_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \frac{dv_{ph}}{dn_p} < 0,$$

где  $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$  и  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  — соответственно фазовая и групповая скорости собственной волны системы. Тогда, введя безразмерные переменные

$$\zeta = \delta k(z - z_0), \quad \delta k = \left( \frac{2\omega_b^2}{v_b^2} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \rho_0 \right)^{1/3}, \quad \Phi = \frac{\tilde{n}_{b0}}{n_b}, \quad (1.13)$$

получим из (1.12) уравнение третьего порядка для  $\Phi(\zeta)$ :

$$\Phi''' - i\chi(\zeta)\Phi'' + \frac{i}{2} \frac{\rho(\zeta)}{\rho_0} \Phi = 0 \quad (1.14)$$

(штрихом обозначено дифференцирование по  $\zeta$ ).  
Здесь

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{\delta k} \left[ \left( \frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_g} \right) \delta \omega + \frac{k}{v_{ph}} \frac{dv_{ph}}{dn_p} \delta n_p(\zeta) \right] \quad (1.15)$$

— расстройка  $\chi(\delta n_p(\zeta))$ , определяющая отличие волнового вектора волны от значения, соответствующего точному резонансу  $\chi = 0$ ;

$$\rho = \frac{\int_S \psi_0^2 ds}{\int_S \psi_0^2 ds} \quad (1.16)$$

— коэффициент связи, зависящий, вообще говоря, от плотности плазмы  $n_p(\zeta)$ :  $\rho = \rho(\zeta)$ ,  $\rho_0 = \rho(0)$ .

Уравнение (1.14) является основным уравнением нашей задачи. Оно получилось третьего порядка, так как достаточно рассмотреть взаимодействие трех волн в области резонанса (две пучковые волны и одна собственная волна системы). Остальные волны системы слабо взаимодействуют с пучком на данной частоте.

Зависимость коэффициента связи от координаты  $\rho = \rho(\zeta)$  может быть существенна, когда среда представляет собой ограниченную по  $r$  структуру (волновод) с характерным сечением  $S_w$ , много большим сечения пучка:

$$S_w \gg S_b. \quad (1.17)$$

В этом случае (1.16) можно оценить как

$$\rho \cong \frac{\psi_0^2(0) S_b}{\langle \psi_0^2(r) \rangle S_w}. \quad (1.18)$$

Тогда  $\psi_0^2(0)$  может меняться в несколько раз при изменении плотности плазмы в области пучка. При этом среднее значение в волноводе  $\langle \psi_0^2(r) \rangle$  остается практически постоянным за счет (1.17), а коэффициент связи (1.18) меняется вместе с  $\psi_0^2(0, n_p(z))$  (см. [6]).

Заметим, однако, что в безграничной среде, как и при  $S_w \cong S_b$ , единственным характерным поперечным размером является сечение пучка, и коэффициент связи (1.16)  $\rho \cong 1$ , так как  $\psi_0(r)$  и  $\psi_b(r)$  сосредоточены в пучке и слабо отличаются друг от друга.

Уравнение (1.14) является основным уравнением рассматриваемой задачи о взаимодействии пучка с неоднородной плазмой. Вблизи точного резонанса  $\chi = 0$  (1.14) имеет экспоненциально растущее решение, отвечающее плазменно-пучковой неустойчивости. Характерный пространственный масштаб изменения  $\Phi$  в этой области  $\zeta \sim 1$  в безразмерных переменных или  $z \sim \delta k^{-1}$  в исходных. Таким образом, величина  $\delta k$  (1.13) является характерным расстоянием между дисперсионными кривыми в резонансе и характерным размером области резонанса в плоскости  $(\omega, k)$ . Для выполнения условий медленности (1.8), (1.10) нужно потребовать:

$$\delta k \ll k_0. \quad (1.19)$$

Для электродинамических систем, в которых поперечная структура волн существенно меняется при выходе из резонанса, уравнение (1.14) верно только в области эффективного взаимодействия плазмы с пучком, где

$$|\chi| \leq 1.$$

Для остальных систем уравнение (1.14) верно, пока его решения удовлетворяют условиям адиабата-



точности (1.8), (1.10). Несложно показать, что в этом случае  $\chi$  может меняться вплоть до большой величины

$$|\chi| \leq \frac{k_0}{\delta k}.$$

Согласно (1.15) большие изменения  $\chi$  могут достигаться при небольших изменениях плотности плазмы  $\delta n_p$  и поэтому представляют практический интерес. Переменный коэффициент связи  $\rho(\zeta)$  как правило меняется при рассматриваемых малых изменениях  $\delta n_p$  не более, чем в несколько раз [6].

Отметим также, что уравнение (1.14) имеет точный первый интеграл

$$|\Phi|^2 + \text{Im}(\Phi^* \Phi) = \text{const}, \quad (1.20)$$

который соответствует сохранению полного потока энергии.

## 2. Дисперсия и ВКБ-решения для волн в области плазменно-пучкового взаимодействия

В пункте 1 было сформулировано условие (1.1) адиабатичности изменений плотности плазмы. Это условие позволяет считать, что волны, которым соответствуют различные дисперсионные кривые  $\epsilon_j(\omega, k, n_p(z)) = 0$ , в приближении геометрической оптики распространяются независимо. Решения дифференциального уравнения для волн в этом случае можно получить в ВКБ-приближении. Однако если дисперсионные кривые двух или более волн близки в некоторой области (как это происходит в области плазменно-пучкового взаимодействия), то ВКБ-приближение (приближение геометрической оптики) может нарушаться. Это связано с тем, что волновые числа и частоты различных типов волн близки в этой области, и волны, которым соответствуют различные дисперсионные кривые, взаимодействуют друг с другом. Таким образом, волны различных типов перестают быть независимыми и могут обмениваться энергией.

Оценим размер области, в которой нарушается ВКБ-приближение. Пусть  $n$  волн описываются линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с неоднородными коэффициентами:

$$y^{(n)} + \sum_{j=1}^n q_j(x) y^{(n-j)} = 0. \quad (2.1)$$

Представив  $y$  в виде  $y \sim \exp\left(\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi\right)$  ( $x_0$  — не-

которая точка, выбор которой определяется в каждой конкретной задаче), получим соответствующее этому уравнению характеристическое (дисперсионное) уравнение:

$$l(x, p) \equiv p^n + \sum_{j=1}^n q_j(x) p^{n-j} = 0. \quad (2.2)$$

ВКБ-решения  $y_j$  уравнения (2.1) имеют вид [7]:

$$y_j = \exp\left\{ \int_{x_0}^x p_j(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x p_j'(\xi) \frac{l_{pp}(\xi, p_j(\xi))}{l_p(\xi, p_j(\xi))} d\xi \right\},$$

$$j = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

При этом второй член в экспоненте (2.3) был получен как поправка к первому, то есть предполагается много меньше первого члена. Пусть теперь  $m$  корней (2.2) близки друг к другу и отличаются на величину порядка  $\delta p \ll p$ . Чтобы не рассматривать задачу о взаимодействии близких решений (2.3), запишем уравнение (2.2) относительно центра области сближения корней  $p_0$ .

Для этого сделаем замену  $y = \tilde{y} \exp(p_0 x)$  и, представив  $\tilde{y} \sim \exp\left(\int_{x_0}^x \tilde{p}(\xi) d\xi\right)$ , вместо (2.2) получим:

$$\tilde{l}(x, \tilde{p}) \equiv \tilde{p}^n + \sum_{j=1}^n \tilde{q}_j(x) \tilde{p}^{n-j} =$$

$$= \tilde{l}_1(x, \tilde{p}) \prod_{j=1}^m (\tilde{p} - \delta p_j(x)) = 0, \quad (2.4)$$

где  $\delta p_j(x) \sim \delta p$  — малые по величине корни уравнения (2.4). Вместо решений (2.3) запишем

$$\tilde{y}_j = \exp\left\{ \int_{x_0}^x \tilde{p}_j(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \tilde{p}_j'(\xi) \frac{\tilde{l}_{pp}(\xi, \tilde{p}_j(\xi))}{\tilde{l}_p(\xi, \tilde{p}_j(\xi))} d\xi \right\},$$

$$j = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

В решениях (2.5) не нужно учитывать резонансы между разными решениями, так как разности между близкими корнями (2.4) имеют тот же порядок  $\delta p$ , что и сами корни (2.4)  $\delta p_j(x)$ . ВКБ-решения (2.5) перестают быть верными, когда



второй член в показателе экспоненты становится порядка первого. Подставив в (2.5) один из корней  $\tilde{p}_j = \delta p_j(x)$  и (2.4), несложно показать, что основной член в экспоненте (2.5) имеет порядок

$$\int_{x_0}^x \delta p_j(\xi) d\xi,$$

а второй член будет порядка

$$\int_{x_0}^x \frac{\delta p_j'(\xi)}{\delta p} d\xi.$$

Таким образом ВКБ-приближение нарушается в области

$$\delta p \sim \sqrt{|p'(x)|}. \quad (2.6)$$

Здесь было учтено, что  $\delta p_j' = p_j'$ . Условием применимости ВКБ-приближения независимых волн будет

$$|p'| \ll \delta p^2. \quad (2.7)$$

В области плазменно-пучкового взаимодействия расстояние  $\delta k$  между дисперсионными кривыми мало (см. (1.19)) и условия (1.1) недостаточно для использования дисперсионного уравнения волн и ВКБ-решений. Для этого необходимо потребовать, чтобы производные от коэффициентов в безразмерном уравнении (1.14) удовлетворяли условиям:

$$\begin{aligned} |\chi'(\zeta)| &\ll 1, \\ \left| \frac{p'(\zeta)}{\rho_0} \right| &\ll 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Нетрудно убедиться (см. (1.13), (1.15)), что эти условия с точностью до несущественных множителей соответствуют (2.7) и означают, что характерный градиент неоднородности  $1/L$  мал по сравнению с  $\frac{\delta k^2}{k_0}$ . Неоднородности, удовлетворяющие условиям (2.8), будем называть крупномасштабными, а в случае обратных неравенств – мелкомасштабными.

Представив  $\Phi$  в виде  $\Phi \sim \exp \int_0^\zeta p(\xi) d\xi$ , получим из (1.14) характеристическое уравнение:

$$l(p, \zeta) = p^3 - i\chi(\zeta)p^2 + \frac{i}{2} \frac{p(\zeta)}{\rho_0} = 0. \quad (2.9)$$

Его корни  $p_j(\delta n_p(\zeta))$  описывают дисперсию волн. При этом, чтобы получить зависимость  $p_j(\delta n_p(\zeta))$  достаточно учесть зависимость  $p_j$  от расстройки  $\chi(\delta n_p(\zeta))$ . Зависимость же от коэффициента связи  $\rho(\delta n_p(\zeta))$  несущественна, так как  $\rho(\delta n_p)$  может меняться не более, чем в несколько раз, а медленные изменения  $\rho$  приводят лишь к малым изменениям масштаба в  $\sqrt[3]{\rho/\rho_0}$  раз (см. (1.13)).

На рис. 1 показана зависимость  $p_j(\chi)$  при  $\rho = \rho_0 = const$ . При  $|\chi| \gg 1$ , то есть вдали от резонанса, дисперсионные кривые выходят на асимптотические зависимости:  $p_{1,2} \approx \mp \sqrt{1/2\chi}$ , соответствующие пучковым волнам, и  $p_3 \approx i\chi$ , соответствующую собственной волне среды. В области  $\chi \in (-3/2, \infty)$  одна из пучковых волн неустойчива ( $Re p_2 > 0$ ), а другая затухает ( $Re p_1 < 0$ ). Максимальный инкремент неустойчивости достигается при точном резонансе  $\chi = 0$ . В этом случае  $p_j = \sqrt[3]{-i/2}$ . При  $\chi = \chi_0 = -3/2$  две дисперсионные кривые пересекаются – уравнение (2.9) имеет кратный корень.

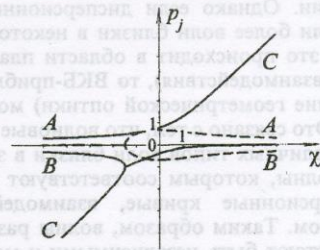


Рис. 1. Зависимость корней характеристического уравнения (2.12) от расстройки  $\chi$ . Сплошными линиями отмечены мнимые, пунктирными – действительные части корней. A, B – пучковые волны, C – собственная волна среды

При выполненных условиях (2.8) решения уравнения (1.14) можно получить в ВКБ-приближении. Используя формулу (2.3), получим три независимых решения:



$$\Phi_j = \exp \left\{ \int_0^{\zeta} p_j d\xi - \int_0^{\zeta} p_j' \frac{3p_j - i\chi}{3p_j^2 - 2i\chi p_j} d\xi \right\}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

ВКБ-приближение неверно в некоторой окрестности точки пересечения дисперсионных кривых – точки поворота уравнения (1.14). Граница применимости ВКБ-приближения оценивается формулой (2.6), где  $\delta p$  – расстояние от корней (2.9) до точки поворота.

Как уже отмечалось, учет зависимости  $p(\delta n_p(\zeta))$  не дает качественно новых эффектов, но существенно усложняет математический анализ задачи. Поэтому мы лишь приведем общие формулы уравнений и ВКБ-решений (1.14), (2.9), (2.10) и в дальнейших задачах положим  $p(\zeta) = p_0 = const$ . Таким образом, основные уравнения (1.14), (2.9) примут вид:

$$\Phi'' - i\chi(\zeta)\Phi' + \frac{i}{2}\Phi = 0, \quad (2.11)$$

$$l(p, \zeta) = p^3 - i\chi(\zeta)p^2 + \frac{i}{2} = 0. \quad (2.12)$$

Подставив (2.12) в (2.10), можно проинтегрировать второе слагаемое в показателе экспоненты:

$$\Phi_j = \sqrt{\frac{p_{j0}(p_{j0}^3 - i)}{p_j(p_j^3 - i)}} \exp \left\{ \int_0^{\zeta} p_j d\xi \right\}, \quad (2.13)$$

где  $p_{j0} = p_j(0)$ . Область неприменимости ВКБ-решений (2.6) теперь оценивается как

$$\delta\chi \leq (\chi')^{2/3} \quad (2.14)$$

вблизи  $\chi = \chi_0 = -3/2$ .

Вдали от резонанса при  $|\chi| \gg 1$ , когда волны разделяются на пучковые и собственную волну среды, несложно получить асимптотику ВКБ-решений (2.12), (2.13) при больших расстройках:

$$p_{1,2} \approx \pm i \sqrt{\frac{1}{-2\chi}}, \quad p_3 \approx i\chi; \quad (2.15)$$

$$\Phi_1 = A(-2\chi)^{1/4} \exp \left\{ i \int_0^{\zeta} \frac{d\xi}{\sqrt{-2\chi}} \right\},$$

$$\Phi_2 = B(-2\chi)^{1/4} \exp \left\{ -i \int_0^{\zeta} \frac{d\xi}{\sqrt{-2\chi}} \right\}, \quad (2.16)$$

$$\Phi_3 = C\chi^{-2} \exp \left\{ i \int_0^{\zeta} \chi d\xi \right\},$$

где  $A, B, C$  – постоянные амплитуды. В формулах (2.15), (2.16) берется ветвь корня, для которой  $\sqrt{-1} = i$ . На рис. 1 показано соответствие этих асимптотик ветвям точного дисперсионного уравнения (2.12). Решения с индексами 1 и 2 описывают пучковые волны, а решения с индексом 3 – собственную волну среды. Подставив сумму выражений (2.16) в уравнение (1.20), описывающее закон сохранения энергии, получим:

$$|C|^2 + 2 \operatorname{Im} AB^* \Big|_{\chi > 0} = |C|^2 + |A|^2 - |B|^2 \Big|_{\chi < 0} = const. \quad (2.17)$$

Различия в выражениях (2.17) при  $\chi > 0$  и при  $\chi < 0$  обусловлена тем, что при больших положительных  $\chi$  пучковые волны устойчивы, а при больших отрицательных – неустойчивы. Квадраты модулей амплитуд (2.16) являются энергиями соответствующих волн. Знак “-” перед квадратом амплитуды  $B$  связан с тем, что медленная пучковая волна является волной отрицательной энергии.

### 3. Уравнения плазменно-пучкового взаимодействия и их решения вблизи точки поворота

Уравнение (2.11) имеет точку поворота первого порядка при  $\chi(\zeta_0) = \chi_0 = -3/2$ . В этой точке происходит слияние двух корней характеристического уравнения (2.12). Поэтому в ее окрестности  $\delta\chi$ , удовлетворяющей условию (2.14), ВКБ-приближение (2.13) неприменимо для решений, соответствующих близким корням уравнения (2.12) (обозначим их индексами 1 и 2). Вместе с тем, в окрестности точки поворота

$$\delta\chi \ll 1 \quad (3.1)$$

расстояние между ветвями 1 и 2 много меньше расстояния до ветви 3 (рис. 1), и ее можно рассматривать независимо. Благодаря условию (2.8)



область неприменимости ВКБ-приближения (2.14) удовлетворяет условию (3.1), и для волны, соответствующей ветви 3, остается верным решение (2.13). Ниже будут получены решения для волн, соответствующих ветвям 1 и 2, в окрестности точки поворота (3.1).

В точке  $\chi = -3/2$  уравнение (2.12) имеет следующие корни:  $p_{10} = p_{20} = -i$ ,  $p_{30} = i/2$ . Чтобы написать уравнение для двух волн в окрестности точки поворота, подставим в уравнение (2.11)  $\Phi$  в виде

$$\Phi = a(\zeta)e^{p_{10}(\zeta-\zeta_0)} = a(\zeta)e^{-i(\zeta-\zeta_0)}$$

и пренебрежем членом  $a''(\zeta)$ , который описывает третью волну. В результате получим:

$$a'' - \frac{2}{3}[\chi(\zeta) - \chi_0]a = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) имеет ВКБ-решения

$$a^+(\zeta) = \left\{ \frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\zeta)] \right\}^{-1/4} \exp \left\{ i \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{\frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\xi)]} d\xi \right\}, \quad (3.3)$$

$$a^-(\zeta) = \left\{ \frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\zeta)] \right\}^{-1/4} \exp \left\{ -i \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{\frac{2}{3}[\chi_0 - \chi(\xi)]} d\xi \right\},$$

которые верны вне области (2.14), но внутри области (3.1), слева и справа от точки поворота. В формулах (3.3) берется ветвь корня, для которой  $\sqrt{-1} = i$ . Общее решение (3.2) имеет вид

$$a(\zeta) = Qa^+(\zeta) + Ra^-(\zeta), \quad (3.4)$$

где  $Q$  и  $R$  фиксированы слева и справа от области (2.8), но могут изменяться при прохождении через нее. Уравнение (3.2) допускает точный первый интеграл – закон сохранения потока энергии:

$$\text{Im}(a'a^*) = \text{const.}$$

При подстановке ВКБ-решений (3.3) он принимает вид

$$2 \text{Im}(QR^*) \Big|_{\chi > \chi_0} = |R|^2 - |Q|^2 \Big|_{\chi < \chi_0}. \quad (3.5)$$

Связь между коэффициентами  $Q$ ,  $R$  при  $\chi > \chi_0$  и при  $\chi < \chi_0$  можно получить с помощью метода Цвана (см., например, [8], [9]). Идея этого метода заключается в аналитическом продолжении ВКБ-решений в комплексную плоскость  $\zeta$  и обходе особой точки  $\zeta_0$  на достаточном расстоянии. При этом нужно учитывать явление Стокса: на линиях Стокса –  $\text{Re} \left\{ \frac{2}{3} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{\chi_0 - \chi(\xi)} d\xi \right\} = 0$  – ко-

эффициент при экспоненциально малом решении меняется скачком. Эта задача неоднократно решалась для уравнений типа (3.2) (см. [8], [9]).

Будем считать, что волна распространяется в положительном направлении оси  $\zeta$ . Пусть сначала плотность плазмы монотонно убывает с ростом  $\zeta$ , то есть волна переходит из области  $\chi > \chi_0$  через точку поворота в область  $\chi < \chi_0$  (см. (1.21)). Можно считать, что вначале есть только растущая в направлении движения волна  $a^-$  (волна  $a^+$  экспоненциально мала):

$$Q|_{\chi > \chi_0} = 0, \quad R|_{\chi > \chi_0} = R_0. \quad (3.6)$$

Тогда после прохождения точки поворота волны будут иметь амплитуды

$$Q|_{\chi < \chi_0} = -iR_0, \quad R|_{\chi < \chi_0} = R_0. \quad (3.7)$$

Это означает, что энергия неустойчивой волны делится поровну между двумя волнами слева от точки поворота на рис. 1. Отметим, что равенство энергий этих двух волн можно было сразу получить из закона сохранения энергии (3.5).

При изменении параметра от  $\chi < \chi_0$  к  $\chi > \chi_0$ , то есть в сторону нарастания плотности плазмы, после прохождения точки поворота достаточно учитывать только растущую в направлении движения волну  $a^-$ . Если вначале волны имели амплитуды

$$Q|_{\chi < \chi_0} = Q_0, \quad R|_{\chi < \chi_0} = R_0, \quad (3.8)$$

то справа волна  $a^-$  будет иметь амплитуду

$$R|_{\chi > \chi_0} = R_0 - iQ_0. \quad (3.9)$$

Амплитуду экспоненциально малой волны  $a^+$  используемым методом определить нельзя. Согласно (3.8), (3.9) энергия неустойчивой волны  $a^-$



будет существенно зависеть от фаз приходящих слева волн. Действительно, пусть

$$Q_0 = |Q_0|e^{i\varphi_1}, \quad R_0 = |R_0|e^{i\varphi_2}.$$

Тогда из (3.9) получим

$$|R|^2 \Big|_{\chi > \chi_0} = (|Q_0| + |R_0| \sin \delta\varphi)^2 + |R_0|^2 \cos^2 \delta\varphi, \quad (3.10)$$

где  $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

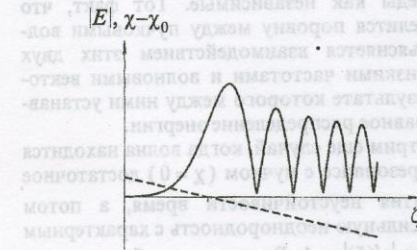


Рис. 2. Характерная зависимость поля волны от координаты (сплошная линия) вблизи точки поворота при линейной зависимости  $\chi(\zeta)$ . Пунктиром показана зависимость  $\chi(\zeta) - \chi_0$ . Область, где кривая  $\chi(\zeta) - \chi_0$  лежит выше оси  $\zeta$  соответствует области неустойчивости, а область, где  $\chi(\zeta) - \chi_0$  лежит ниже оси  $\zeta$  - области устойчивости. Модуль поля ведет себя как модуль функции Эйри  $Ai(\tau)$

Формулы (3.3) - (3.10) описывают и связывают решения уравнения (3.2) вне окрестности (2.14) по разные стороны точки поворота. Чтобы найти решения в области (2.14), положим в (3.2)

$$\chi(\zeta) - \chi(\zeta_0) \cong \chi'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0).$$

Тогда заменой переменной

$$\tau = \left( \frac{2}{3} \chi'(\zeta_0) \right)^{1/3} (\zeta - \zeta_0)$$

уравнение (3.2) сводится к стандартному уравнению Эйри:

$$\ddot{a}(\tau) - \tau a(\tau) = 0, \quad (3.11)$$

где точками обозначено дифференцирование по  $\tau$ . Точными решениями уравнения (3.11) являются функции Эйри:

$$Ai(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi\tau\right) d\xi,$$

$$Bi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{\xi^3}{3} + \xi\tau\right) + \sin\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi\tau\right) \right\} d\xi.$$

Их асимптотика является ВКБ-решениями (3.3), (3.4), (3.6)-(3.9). При прохождении точки поворота от  $\chi > \chi_0$  к  $\chi < \chi_0$  решением в окрестности точки поворота является функция  $Ai(\tau)$ . Характерный вид решения в этом случае показан на рис. 2. Отметим, что несмотря на обращение инкремента неустойчивости в ноль в точке поворота, решение растет еще какое-то время линейным образом. Экспериментально биения амплитуды волны после прохождения точки поворота наблюдались в работе [10].

#### 4. Выход волн из области плазменно-пучкового взаимодействия. Линейная трансформация

При сильных неоднородностях плазмы с характерным значением расстройки  $|\chi(\zeta)| \gg 1$  плазменно-пучковая неустойчивость развивается только на небольших интервалах, где выполнено условие резонанса  $|\chi(\zeta)| \leq 1$ . Наблюдаются же при этом, как правило, волны вдали от области плазменно-пучковой неустойчивости (например, при активных космических экспериментах). В связи с этим возникает вопрос: в какой тип волны (собственной волны среды или плазменных волн пучка) трансформируется усиленная в области резонанса волна.

Рассмотрим исходное уравнение для волн (2.11) в окрестности резонанса. Пусть на рассматриваемом участке плотность плазмы меняется линейно:

$$\chi(\zeta) \cong \chi'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0), \quad \chi(\zeta_0) = 0.$$

Тогда пространственный размер  $\delta\zeta$  области резонанса

$$\delta\zeta \sim \frac{1}{|\chi'(\zeta_0)|}.$$

Поскольку инкремент неустойчивости в условиях резонанса порядка единицы, коэффициент усиления  $K$  для амплитуды волны  $\Phi$  порядка

$$K \sim \exp \frac{1}{|\chi'(\zeta_0)|}. \quad (4.1)$$

При выполненном условии адиабатичности (2.8), то есть при крупномасштабной неоднородности,



дисперсионные характеристики волн согласно ВКБ-приближению связаны характеристическим уравнением (2.12). Поэтому изображающая точка волны  $(p, \chi)$  движется вдоль дисперсионной кривой (рис. 1). При движении от  $\chi > 0$  к  $\chi < 0$ , то есть в сторону уменьшения плотности плазмы, усиливается одна из пучковых волн. Остальные волны по сравнению с ней имеют экспоненциально малые амплитуды, и ими можно пренебречь. После прохождения точки поворота энергия усиленной волны делится пополам между собственной волной среды и одной из пучковых волн (см. пункт 3). Однако равенство энергий не означает равенства амплитуд полей. Согласно исходным уравнениям (1.12), (1.13)  $E \sim \tilde{h}_p^n \sim \Phi^n$ . Из асимптотических ВКБ-решений (2.15), (2.16) следует, что при равных энергиях пучковой и собственной волн амплитуды их электрических полей вдали от резонанса относятся как

$$\frac{|E_b|}{|E_s|} = \frac{|p_2^2 \Phi_2|}{|p_3^2 \Phi_3|} = \frac{1}{(2|\chi|)^{3/4}} \ll 1, \quad (4.2)$$

где  $E_b$  – амплитуда поля пучковой волны;  $E_s$  – амплитуда поля собственной волны структуры. Таким образом, вдали от резонанса электрическое поле почти полностью сосредоточено в собственных колебаниях среды.

При медленном  $(|\chi'(\zeta)| \ll 1)$  движении от  $\chi < 0$  к  $\chi > 0$  усиленная пучковая волна остается на своей дисперсионной кривой и не переходит на дисперсионную ветвь собственной волны среды. В этом случае, если отсутствуют эффекты трансформации волн, вся энергия будет сосредоточена в пучковых колебаниях. Однако, как будет показано ниже, даже слабого эффекта передачи энергии пучковых волн собственной волне достаточно, чтобы основная часть электрического поля на выходе была сосредоточена в собственной волне среды.

При нарушении условия адиабатичности (2.8), то есть при мелкомасштабной неоднородности

$$|\chi'(\zeta)| \gg 1 \quad (4.3)$$

ВКБ-приближение неприменимо во всей области резонанса  $|\chi(\zeta)| \sim 1$ . Волны в этом случае перестают быть независимыми. Их распространение описывается в приближении линейной трансформации (см. [11] и приведенные там ссылки).

Если при  $|\chi| \gg 1$  была одна пучковая неустойчивая волна, то при быстром  $(|\chi'(\zeta)| \gg 1)$  прохождении

через узкую область резонанса она не успевает поменять поляризацию и остается пучковой. Методом шивки решений по разные стороны от области резонанса несложно показать, что энергия и поле в этом случае делятся пополам между двумя пучковыми волнами:

$$|A|^2 \cong |B|^2 \gg |C|^2, \quad |E_b|^2 \gg |E_s|^2. \quad (4.4)$$

Однако в этом случае согласно (4.1) коэффициент усиления будет близок к единице:  $K \cong 1$ . Неустойчивостью при такой неоднородности можно пренебречь и рассматривать пучковые и собственные волны среды как независимые. Тот факт, что энергия делится поровну между пучковыми волнами, объясняется взаимодействием этих двух волн с близкими частотами и волновыми векторами, в результате которого между ними устанавливается равное распределение энергии.

Рассмотрим еще случай, когда волна находится в точном резонансе с пучком ( $\chi = 0$ ) достаточно для развития неустойчивости время, а потом встречает сильную неоднородность с характерным градиентом  $|\chi'(\zeta)| \gg 1$ . В этом случае будет происходить линейная трансформация волн. Однако исследовать эту задачу с помощью уравнений трансформации сложно, так как обычно в таких задачах рассматривается переход с одной асимптотики на другую, не конкретизируя вид решения в области трансформации. В нашем случае мы будем считать, что волна не меняет свою поляризацию, как это имеет место при трансформации на резкой неоднородности, и сошьем решение при  $\chi = 0$  с решениями при  $|\chi| \gg 1$ .

Можно считать, что при  $\chi = 0$  есть только растущая волна. Вектор ее поляризации

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \\ \Phi'' \end{pmatrix}_{\chi=0} = \tilde{\Phi}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \\ p_0^2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где  $\tilde{\Phi}_0$  – амплитуда волны, а  $p_0$  – корень характеристического уравнения (2.12) при  $\chi = 0$ , отвечающий растущему решению:

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{-i}{2}} = \frac{\sqrt{3}-i}{2^{4/3}}$$

Разложим (4.5) по векторам поляризации трех волн (2.16) при  $|\chi| \gg 1$ :

$$\vec{e} = \tilde{\Phi}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \\ p_0^2 \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_1^2 \end{pmatrix} + \tilde{\Phi}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ p_2 \\ p_2^2 \end{pmatrix} + \tilde{\Phi}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ p_3 \\ p_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$



Здесь  $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3$  – неизвестные амплитуды, а  $p_1, p_2, p_3$  – асимптотические решения (2.15). Решая (4.6) с учетом (2.15) и  $|\chi| \gg 1$ , получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &\equiv \frac{p_0 \tilde{\Phi}_0}{p_1 - p_2} \equiv -i \frac{p_0 \tilde{\Phi}_0}{2} \sqrt{-2\chi}, \\ \tilde{\Phi}_2 &\equiv -\frac{p_0 \tilde{\Phi}_0}{p_1 - p_2} \equiv i \frac{p_0 \tilde{\Phi}_0}{2} \sqrt{-2\chi}, \\ \tilde{\Phi}_3 &\equiv \frac{p_0^2 \tilde{\Phi}_0}{p_3^2} \equiv p_0 \tilde{\Phi}_0 \frac{i - \sqrt{3}}{2^{4/3} \chi^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Сравнивая (4.7) с (2.15), (2.16), найдем энергии волн:

$$\begin{aligned} |A|^2 &\equiv |B|^2 \equiv \frac{|p_0 \tilde{\Phi}_0|^2}{4} |2\chi|^{1/2}, \\ |C|^2 &\equiv \frac{|p_0 \tilde{\Phi}_0|^2}{2^{2/3}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

то есть  $|A|^2 \equiv |B|^2 \gg |C|^2$  и почти вся энергия сосредоточена в пучковых волнах. Однако амплитуды электрических полей пучковых и собственной волны среды будут относиться как

$$\frac{|E_b|}{|E_s|} = \frac{|2\tilde{\Phi}_1 p_1^2|}{|\tilde{\Phi}_3 p_3^2|} = \frac{2^{1/3}}{\sqrt{2|\chi|}} \ll 1.$$

Здесь мы учли, что максимальная амплитуда поля в пучке равна сумме амплитуд полей двух пучковых волн. Таким образом, несмотря на то, что почти вся энергия сосредоточена в пучковых волнах, электрическое поле будет почти полностью сосредоточено в собственных колебаниях среды.

В заключение отметим, что для волноводов, в которых поперечная структура пучковых и собственных волн сильно отличается, полученные в этом пункте выводы качественно сохраняются, но могут иметь другие границы применимости. В таких системах возможны процессы трансформации волн, связанные с изменением поперечной структуры пучковой волны при выходе из резонанса. Поскольку, как отмечалось в пункте 1, поперечная структура электрических полей всех волн в области резонанса близка к поперечной структуре собственной волны, при достаточно сильных неоднородностях волны будут выходить из этой области в виде собственной волны. В этом смысле выводы, полученные в этом пункте при рассмотрении одномерной трансформации волн, остаются верными. Так же и при сильно-адиабатическом изменении плотности плазмы трансформация на попе-

речной структуре не существенна, и полученные в этом случае результаты правильны. Может лишь стать более слабым условие (4.3) нарушения адиабатичности.

#### Заключение

Выше рассмотрена линейная стадия взаимодействия пучка заряженных частиц с плазмой, имеющей произвольный продольный профиль плотности. Единственным ограничением являлось требование достаточно плавного изменения плотности плазмы: характерный пространственный масштаб неоднородности  $L$  предполагался большим по сравнению с характерной длиной волны рассматриваемых колебаний  $k^{-1}$  (условие (1.1)). В контексте исследования плазменно-пучковой неустойчивости естественно разделить все виды такой неоднородности на крупномасштабные

( $L \frac{\delta k^2}{k_0} \gg 1$ , условия (2.8)) и мелкомасштабные

( $L \frac{\delta k^2}{k_0} \ll 1$ , условие (4.3)). Если плотность плазмы

меняется в некоторых пределах регулярным или случайным образом, то эффективность плазменно-пучкового взаимодействия зависит не только от масштаба, но и от амплитуды вариаций плотности. Резонансный характер взаимодействия волн с пучком не нарушается на всей длине, если амплитуда возмущения плотности невелика ( $|\chi| \ll 1$ ).

Если же возмущения достаточно велики ( $|\chi| \gg 1$ ), то волна фиксированной частоты эффективно взаимодействует с пучком только на тех участках, где ее фазовая скорость достаточно близка к скорости пучка.

Таким образом, практический интерес могут представлять четыре различных случая: крупномасштабные неоднородности малой и большой амплитуды, и мелкомасштабные неоднородности малой и большой амплитуды. В данной работе рассматривались различные примеры этих основных типов неоднородностей. Аналитическими и численными методами получены следующие результаты:

1. Показано, что неоднородность плазмы влияет на развитие неустойчивости, в основном, через изменение расстройки (1.15). Изменения коэффициента связи (1.16) малосущественны и не могут вызвать срыв неустойчивости.

2. В ВКБ-приближении получены общие функциональные зависимости полей возбуждаемых пучком волн от произвольного продольного профиля плотности плазмы  $n_p(z)$  при крупномасштабных неоднородностях.



3. Решена задача о прохождении точки поворота в оптически активной среде, какой является плазма, пронизываемая пучком заряженных частиц.

4. Решена задача о выходе и трансформации волн из области резонанса при скачке плотности большой амплитуды с произвольным градиентом. Показано, что за счет разной поляризации волн, колебания электрического поля вдали от области резонанса в большинстве случаев почти полностью сосредоточены в собственных волнах среды.

Работа выполнена при поддержке Украинского научно-технологического центра (Проект №277).

**Литература**

1. I. F. Kharchenko, Ya. B. Fainberg, R. M. Nikolaev, E. A. Komilov, E. I. Lutsenko, N. S. Pedenko. Proc. of the 4th Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. Uppsala, 17-21 August 1959. Amsterdam, 1960, 2, pp. 671-680.
2. Е. А. Корнилов, О. Ф. Ковпик, Я. Б. Файнберг, И. Ф. Харченко. ЖТФ. 1965, 35, Вып. 8. с. 1372-1377.
3. А. К. Березин, Г. Р. Березина, Н. Г. Матсиборко et al. Nucl. Phys. 1973, 13, No. 6. pp. 925-927.
4. В. Н. Врежман, Д. Д. Ржутюв. Nucl. Phys. 1974. 14, No. 16. pp. 873-907.
5. Ю. П. Блюх, И. Н. Онищенко, И. П. Панченко. УФЖ. 1981, 26, №2, с. 271-275.

6. Ю. П. Блюх, Е. А. Корнилов, Л. А. Митин, Я. Б. Файнберг. Физика плазмы. 1994, 20, № 9, с. 767-776.
7. М. В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1983, 352 с.
8. Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). Москва, Мир, 1965, 238с.
9. Г. М. Заславский, В. П. Мейтлис, Н. Н. Филоненко. Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск, Наука, 1982.
10. Ю. П. Блюх, М. Г. Любарский и др. Физика плазмы. 1989, 15, №11, с. 1302-1309.
11. В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский. Успехи физ. наук. 1983, 141, с. 257.

**On Influence of Plasma Inhomogeneity on Plasma-Beam Instability**

K. Yu. Bliokh

The linear stage of the plasma-beam instability in the longitudinal inhomogeneous plasma is considered. The WKB-solutions of different modes in the region of resonant plasma-beam interaction are found for arbitrary profile of the plasma density. The behavior of solutions is investigated near the turning point. The linear coupling of waves at the exit from the resonance region is considered.