

Метод моментов в двухмерных задачах электростатики

А. В. Грибовский

Радиоастрономический институт НАН Украины
310002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4

Статья поступила в редакцию 8 апреля 1998 г., после переработки 9 июля 1998 г.

Строгим методом найдено распределение электростатического потенциала в элементарной ячейке из электродов конечной толщины. С помощью метода полуобращения оператора решение задачи сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Приведено доказательство существования и единственности решения системы уравнений. Представлены численные результаты, показывающие быструю сходимость метода редукции.

Точним методом знайдено розподіл електростатичного потенціалу в елементарній ячейці з електродів скінченної товщини. За допомогою методу напівобернення оператора розв'язання задачі зведено до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. Доведено, що розв'язання системи рівнянь існує і єдине. Наведено чисельні результати, що показують швидку збіжність методу редукції.

Электростатические системы из электродов конечной толщины широко применяются в качестве конденсаторов и устройств для формирования пучков заряженных частиц. Существуют различные методы расчета таких систем. Чаще всего используется метод конформных отображений, позволяющий получить решение в аналитическом виде. Однако круг задач, решаемых этим методом, ограничен [1-3] и распространяется в основном на односвязные области. Метод интегральных уравнений [4] и метод конечных разностей [5] позволяют решать задачи электростатики для областей произвольной формы. Но существуют определенные трудности, связанные с численной реализацией этих методов. Подробное описание других методов решения задач электростатики можно найти, например, в [6].

В данной работе предложен метод, позволяющий свести решение двумерной задачи электростатики для проводников конечной толщины к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Матричные элементы системы уравнений быстро убывают с ростом индексов. Вследствие этого для получения результатов с точностью, необходимой для их практического использования, достаточно решать усеченную систему уравнений невысокого порядка. Поэтому метод можно с успехом использовать для расчета поля в электростатических системах, состоящих из электродов конечной толщины. Аналогичный подход был применен в [7] при решении задачи дифракции Т-волны на открытом конце плоского волновода с фланцем.

Рассмотрим структуру, поперечное сечение которой, перпендикулярное оси ОХ, изображено на

рис. 1, и найдем пространственное распределение электростатического потенциала в незаштрихованной области. Структура представляет собой плоский конденсатор, образованный идеально проводящими полубесконечными экранами, заряженными до потенциалов $+V_0$ и $-V_0$. Расстояние между обкладками конденсатора равно $2a$. В каждой обкладке прорезана щель прямоугольной формы шириной $2d$. На рисунке представлены также рассчитанные эквипотенциальные кривые, а цифрами обозначены значения U/V_0 , где $U(y, z)$ – значения потенциала в области, не занятой электродами.

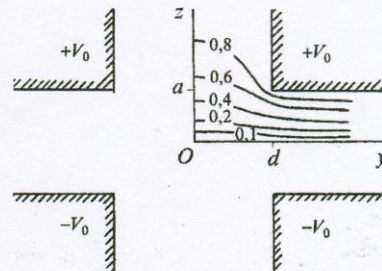


Рис. 1. Модель элементарной ячейки. Сплошные кривые – эквипотенциальные линии

Задача о нахождении пространственного распределения электростатического потенциала в описанной области является ключевой в двумерных задачах электростатики для многосвязных

областей, состоящих из электродов конечной толщины. Модель конденсатора, изображенная на рис. 1, которую мы в дальнейшем будем называть элементарной ячейкой, является частью более сложной структуры, состоящей из конечного числа электродов прямоугольной формы и представляющей собой многосвязную область. Покажем на примере элементарной ячейки эффективность метода моментов для решения двумерных задач электростатики – внешних задач Дирихле для уравнения Лапласа.

Итак, решение в области $|z| \leq a, |y| \leq \infty$, удовлетворяющее уравнению Лапласа и ограниченное на бесконечности, будем искать в виде суммы двух функций, одна из которых есть линейная функция координаты z и описывает распределение потенциала в плоском конденсаторе, а вторая является интегралом Фурье, который описывает возмущения потенциала, вносимые в плоский конденсатор щелями:

$$U(y, z) = V_0 \frac{z}{a} + \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \text{sh}(\lambda|z|) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad |z| \leq a, \quad |y| \leq \infty, \quad (1)$$

где $b(\lambda)$ – неизвестная функция.

В области щелей $z \geq a, z \leq -a, |y| \leq d$ решение ищем также в виде суммы двух функций, одна из которых есть константа, а другая – ряд по полной системе ортогональных функций:

$$U(y, z) = \pm V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_m \\ d_m \end{Bmatrix} e^{\mp \alpha_m \frac{z \mp a}{d}} \cos(\alpha_m \frac{y}{d}), \quad (1a)$$

$$\begin{cases} z \geq a \\ z \leq -a \end{cases}, \quad |y| \leq d,$$

где $\alpha_m = \frac{\pi}{2}(2m-1)$, а a_m, d_m – неизвестные коэффициенты, $m=1, 2, 3, \dots$

Воспользовавшись граничными условиями – непрерывностью потенциала при $z = \pm a$ и непрерывностью нормальной производной потенциала на щелях при $z = \pm a$, получим связь между неизвестными коэффициентами $a_m = -d_m$ и систему функциональных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \text{sh}(\lambda|a|) e^{i\lambda y} d\lambda = \begin{cases} 0, & |y| \geq d, \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(\alpha_m \frac{y}{d}), & |y| \leq d, \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda b(\lambda) \text{ch}(\lambda|a|) e^{i\lambda y} d\lambda = -\frac{V_0}{a} - \frac{1}{d} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m a_m \cos(\alpha_m \frac{y}{d}), \quad |y| \leq d. \quad (3)$$

Для единственности решения задачи требуется, чтобы энергия электростатического поля была конечной в любой ограниченной области пространства, в том числе и в окрестности ребра. В силу первого тождества Грина [8]

$$\int_V (\text{grad}U)^2 dV = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} ds,$$

где V – объем, а S – ограничивающая его поверхность, требование ограниченности энергии электростатического поля эквивалентно условию

$$\int_S U \frac{\partial U}{\partial n} ds < \infty. \text{ Легко показать, что это условие выполняется, если неизвестную функцию } b(\lambda) \text{ искать в классе функций, для которых}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda |b^2(\lambda) \text{sh}(2|\lambda|a)| d\lambda < \infty, \text{ а коэффициенты } \{a_m\}_1^{\infty} -$$

$$\text{в классе последовательностей } \tilde{\ell}_2 = \left\{ \{a_m\}_1^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \alpha_m < \infty \right\}.$$

Известно, что из условия конечности энергии электромагнитного поля, запасенной в любом конечном объеме в окрестности ребра, следует, что ни одна составляющая электромагнитного поля в окрестности ребра не может возрастать быстрее, чем $\rho^{-1+\tau}$ ($\tau > 0$) при $\rho \rightarrow 0$, где ρ – расстояние до ребра. При решении внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа какая-либо конкретная информация о поведении поля вблизи ребра, вообще говоря, не является необходимой. Однако наличие такой информации оказывается весьма полезным [9]. Учитывая это обстоятельство и симметрию структуры, представим функцию (2) при $y \in [-d, d]$ в виде произведения двух функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \text{sh}(\lambda|a|) e^{i\lambda y} d\lambda = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{d}\right)^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_{2n}\left(\frac{y}{d}\right), \quad (4)$$

одна из которых учитывает в главном особенность поведения поля вблизи ребра, а другая – представляет собой ряд по четным полиномам Чебышева второго рода $U_{2n}(x)$ с неизвестными коэффициентами C_n . Воспользовавшись системой

уравнений (2), получим связь между неизвестной функцией $b(\lambda)$ и коэффициентами разложения (4):

$$b(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D_n \frac{J_{2n+1}(\lambda d)}{\lambda \operatorname{sh}(\lambda|a|)}, \quad (5)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя; $D_n = (2n+1)C_n$.

Подставим (4) в (2), умножим обе части на $\cos(\alpha_s \frac{y}{d})$ и проинтегрируем по переменной y на интервале от $-d$ до d . В результате получим:

$$a_m = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D_n \frac{J_{2n+1}(\alpha_m)}{\alpha_m}. \quad (6)$$

В уравнение (3) подставим $b(\lambda)$ и a_m в виде (5) и (6). Разложим функции от $\frac{y}{d}$ в левой и правой частях уравнения (3) по полиномам Чебышева второго рода и приравняем коэффициенты разложения. В итоге получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений первого рода:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^{n+s} D_n \operatorname{cth} \kappa \xi \cdot \xi^{-1} J_{2s+1}(\xi) J_{2n+1}(\xi) d\xi + \pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+s} D_n \frac{J_{2s+1}(\alpha_m) J_{2n+1}(\alpha_m)}{\alpha_m} = \frac{V_0}{2\kappa} \delta_{0s}, \quad (7)$$

$s = 0, 1, 2, \dots$, где $\xi = \lambda d$; $\kappa = a/d$; δ_{0s} – символ Кронекера.

Выделим в операторе системы уравнений (7) ту часть, которая не обращается в нуль при $\kappa \rightarrow \infty$. Для этого с помощью равенства $\frac{\operatorname{cth}(\kappa \xi)}{\xi} = \frac{1}{\xi} + \varepsilon(\xi)$

введем функцию $\varepsilon(\xi) = \frac{2e^{-2\kappa \xi}}{\xi(1 - e^{-2\kappa \xi})}$. Кроме того, воспользуемся ортогональностью функции Бесселя с весом ξ^{-1} на полубесконечном интервале

$$\int_0^{\infty} J_m(\xi) J_n(\xi) \cdot \xi^{-1} d\xi = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2n}, & m = n \neq 0. \end{cases}$$

В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$x_s + \sum_{n=0}^{\infty} S_{sn} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} A_{sn} x_n = -\frac{V_0}{2\kappa} a_{0s}, \quad (8)$$

$s = 0, 1, 2, \dots$,

где

$$x_s = \frac{(-1)^s D_s}{2\sqrt{2s+1}};$$

$$A_{sn} = 2\sqrt{(2S+1)(2n+1)} \int_0^{\infty} J_{2s+1}(\xi) J_{2n+1}(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi;$$

$$S_{sn} = 2\pi\sqrt{(2S+1)(2n+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2s+1}(\alpha_m) J_{2n+1}(\alpha_m)}{\alpha_m}.$$

Выполненные преобразования эквивалентны обращению с помощью метода моментов оператора в левой части системы уравнений (2), (3) при $\kappa \rightarrow \infty$.

Представим систему уравнений (8) в операторном виде:

$$x + Sx + Ax = b, \quad (9)$$

где элементы операторов S , A и столбца b вычисляются по формулам (8). Будем рассматривать систему уравнений (9) в Гильбертовом пространстве ℓ_2 . Легко показать, что $\sum_{s,n=0}^{\infty} |A_{sn}|^2 < \infty$, то

есть A – вполне непрерывный оператор. Действительно,

$$|A_{sn}| < \sqrt{(2s+1)(2n+1)} \left| \int_0^{\infty} J_{2s+1}(\xi) J_{2n+1}(\xi) \cdot \xi^{-3} d\xi \right| < \frac{\sqrt{sn}}{|s^2 - n^2|^3}.$$

Решение системы (9) существует, если существует обратный оператор $R = (I + S)^{-1}$, где I – единичный оператор.

Представим оператор S в виде произведения двух операторов $S = T^* T$, где $T_{ms} = \sqrt{\frac{2S+1}{\alpha_m}} J_{2s+1}(\alpha_m)$. Звездочка означает комплексное сопряжение. Аналогичное представление применено в [10] при обосновании метода частичных областей в задачах дифракции на ступенчатых неоднородностях в волноводах. Воспользовавшись теоремами из [11], можно показать, что в пространстве ℓ_2 оператор

$R=(I+S)^{-1}$ всюду определен и ограничен. Кроме того, оператор R симметричен, положителен и по норме меньше единицы, $\|R\| < 1$. Поэтому матрицу оператора R можно получить методом редукции. Таким образом, решение системы уравнений (9) в пространстве ℓ_2 существует.

Покажем, что система (9) имеет единственное решение. Для этого необходимо доказать, что соответствующая ей однородная система уравнений имеет только тривиальное решение. С помощью уравнений (2), (3) легко получить равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda |b^2(\lambda) \operatorname{sh}(2|\lambda|a) d\lambda + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \alpha_m = \frac{2V_0}{\pi\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{a_m}{\alpha_m} \quad (10)$$

Система уравнений (9) преобразуется в однородную систему при $V_0/\kappa=0$ (или $V_0=0$, или $\kappa=\infty$). Из (10) при $V_0/\kappa=0$ следует, что $b(\lambda) \equiv 0$ и $a_m \equiv 0$, так как сумма двух положительных чисел равна нулю, если равны нулю сами эти числа. Из тождеств $b(\lambda) \equiv 0$ и $a_m \equiv 0$ следует, что $x_s = 0$ и, значит, неоднородная система уравнений (9) имеет единственное решение.

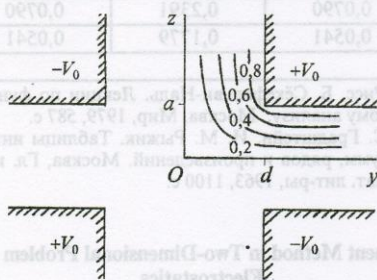


Рис. 2. Элементарная ячейка квадрупольного типа. Сплошные кривые – эквипотенциальные линии

Представим систему уравнений (9) в виде

$$x + RAx = Rb \quad (11)$$

Оператор RA – вполне непрерывный, причем тем меньше по норме, чем больше κ . Поэтому решение системы уравнений (11) можно найти либо с помощью метода редукции (при любых параметрах задачи), либо методом последовательных приближений (при $\kappa \gg 1$).

Аналогичным образом находится пространственное распределение электростатического потен-

циала в модели конденсатора квадрупольного типа, изображенной на рис. 2. Решение, удовлетворяющее уравнению Лапласа, в этом случае ищем в виде:

$$U(y, z) = \begin{cases} V_0 \frac{|y|z}{ya} \\ V_0 \frac{yz}{ad} \end{cases} + \int_{-\infty}^{\infty} b_1(\lambda) \operatorname{sh}(|\lambda|z) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad (12)$$

$$|z| \leq a, \quad \begin{cases} |y| > d \\ |y| < d \end{cases}$$

$$U(y, z) = V_0 \frac{|z|y}{zd} + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} a_m^{(1)} \\ a_m^{(1)} \end{cases} e^{\mp i t_m \frac{z\mp c}{d}} \sin(t_m \frac{y}{d} + 1), \quad (12a)$$

$$\begin{cases} z \geq a \\ z \leq -a \end{cases}, \quad |y| \leq d,$$

где $t_m = \frac{\pi m}{2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Отличие данного решения от решения предыдущей задачи заключается в том, что потенциал в плоскости $z=a$ при $y \in [-d, d]$ следует представить в виде разложения в ряд по нечетным полиномам Чебышева второго рода с неизвестными коэффициентами $C_n^{(1)}$. Соотношения, аналогичные (5) и (6), имеют вид:

$$b_1(\lambda) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D_n^{(1)} \frac{J_{2(n+1)}(\lambda d)}{\lambda \operatorname{sh}(|\lambda|a)},$$

$$a_m^{(1)} = \pi (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D_n^{(1)} \frac{J_{2(n+1)}(\pi m)}{\pi m},$$

$$a_m^{(1)} = -d_m^{(1)}, \quad D_n^{(1)} = 2(n+1)C_n^{(1)},$$

а неизвестные коэффициенты определяются из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$x_s^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} S_{sn}^{(1)} x_n^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{sn}^{(1)} x_n^{(1)} = -\frac{V_0}{8\kappa} \delta_{0s}, \quad (13)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$x_s^{(1)} = \frac{(-1)^s D_s^{(1)}}{4\sqrt{s+1}};$$

$$A_{sn}^{(1)} = 4\sqrt{(s+1)(n+1)} \int_0^{\infty} J_{2(s+1)}(\xi) J_{2(n+1)}(\xi) \epsilon(\xi) d\xi;$$

$$S_{sn}^{(1)} = 4\pi\sqrt{(s+1)(n+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2(s+1)}(\pi m) J_{2(n+1)}(\pi m)}{\pi m}.$$

Доказательство существования и единственности решения системы уравнений (13) в ℓ_2 аналогично приведенному выше. Для решения системы (13) можно использовать метод редукции.

В работе были проведены численные исследования решений систем уравнений (8) и (13) в зависимости от порядка усечения N . В таблице показана зависимость коэффициента x_0 и $x_0^{(1)}$ от порядка усечения при различных значениях κ . На рис. 1 и рис. 2 представлены эквипотенциальные

кривые пространственного распределения электростатического потенциала при $\kappa = 2/3$. Числами обозначены значения отношения U/V_0 . Расчеты показали, что для определения потенциала с точностью до 1% достаточно решать редуцированную систему уравнений, порядок которой для $\kappa = 2/3$ равен 3.

Таким образом, путем полуобращения оператора с помощью метода моментов построено строгое решение двумерной задачи электростатики для элементарной ячейки из электродов конечной толщины. Поскольку для получения результатов с точностью до 1% необходимо решать редуцированную систему уравнений невысокого порядка, метод можно эффективно применять для расчета сложных электростатических систем, содержащих конечное число таких ячеек.

Таблица

κ	$N = 3$		$N = 5$		$N = 10$	
	$ x_0 $	$ x_0^{(1)} $	$ x_0 $	$ x_0^{(1)} $	$ x_0 $	$ x_0^{(1)} $
0,10	0,5026	0,2600	0,5028	0,2602	0,5028	0,2602
0,17	0,4476	0,2098	0,4478	0,2100	0,4478	0,2100
0,20	0,4247	0,1910	0,4248	0,1911	0,4248	0,1911
0,40	0,3217	0,1212	0,3218	0,1213	0,3219	0,1213
0,67	0,2390	0,0790	0,2391	0,0790	0,2391	0,0790
1,0	0,1779	0,0540	0,1779	0,0541	0,1779	0,0541

Литература

1. В. Смайт. Электростатика и электродинамика. Москва, Изд-во иностр. лит., 1954, 604 с.
2. М. Н. Титов. Электричество. 1980, № 8, с. 64-66.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функции комплексного переменного. Москва, Наука, 1973, 736 с.
4. О. В. Тозони, И. Д. Маергойз. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев, Техника, 1974, 352 с.
5. Г. И. Марчук. Методы вычислительной математики. Москва, Наука, 1980, 536 с.
6. Н. Н. Миролубов, М. В. Костенко, М. Л. Левинштейн, Н. Н. Тиходеев. Методы расчета электростатических полей. Москва, Высш. школа, 1963, 415 с.
7. С. Л. Просвирнин. Изв. вузов. Радиофизика. 1985, 28, № 4, с. 486-491.
8. Дж. А. Страттон. Теория электромагнетизма. Москва - Ленинград, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948, 540 с.
9. Я. С. Уфлянд. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Москва - Ленинград, Наука, 1977, 220 с.
10. Г. И. Веселов, В. М. Темнов. ЖВММФ, 1984, 24, №9, с. 1381-1391.

11. Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Москва, Мир, 1979, 587 с.
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Гл. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963, 1100 с.

Moment Method in Two-Dimensional Problem of Electrostatics

A. V. Gribovskiy

A rigorous solution has been obtained for the electrostatics potential distribution in the simple cell consisting of conductors with finite thickness. This solution was obtained in a form of infinite system of linear algebraic equations. Partial inversion of the operator involved by the moment method is used. This paper presents proof existence and the single solution of the system equations and numerical results demonstrating the rapid convergence of the reduction method.