

Биспектральный анализ квадратичного преобразования случайных процессов

В. Г. Галушко

Радиоастрономический институт Национальной Академии наук Украины,
Украина, 310002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4

Статья поступила в редакцию 22 апреля 1998 г.

Предложен метод диагностики слабой квадратичной нелинейности случайных процессов на фоне аддитивного шума, основанный на измерении “ $1\frac{1}{2}D$ – спектров”, $\Gamma(\omega)$. Получены выражения для среднего значения и дисперсии оценки $\hat{\Gamma}(\omega)$. Разработан алгоритм определения крутизны нелинейного преобразования для случая равномерного в полосе анализа спектра шума с неизвестной спектральной плотностью.

Запропоновано метод діагностики слабкої квадратичної нелінійності випадкових процесів на фоні адитивного шуму за допомогою вимірювання “ $1\frac{1}{2}D$ – спектрів”, $\Gamma(\omega)$. Отримані вирази для середнього значення та дисперсії оцінки $\hat{\Gamma}(\omega)$. Запропоновано алгоритм знаходження крутизни нелінійного перетворення у випадку рівномірного у полосі аналізу спектра шуму з невідомою спектральною густиною.

1. Введение

При исследовании различных физических, технических и других систем зачастую требуется решить задачу диагностики возникающих в них нелинейных эффектов. Это могут быть, например, нелинейные искажения сигналов в радиотехнических устройствах, взаимодействие процессов различной природы в нелинейных средах или нелинейные механизмы генерации таких процессов. Если входное воздействие системы является случайным процессом, то при ее анализе приходится вычислять статистические моменты более высокого, чем второй, порядка. Поэтому весьма удобно использовать кумулянты или их спектральные представления – полиспектры [1,2], так как для нормального случайного процесса с нулевым средним кумулянты третьего и более высоких порядков равны нулю. В случае наличия нелинейных эффектов это условие нарушается, что может быть использовано для их диагностики. Однако определение кумулянтов (или полиспектров) реальных процессов, особенно для достаточно длинных реализаций, требует значительных вычислительных ресурсов, в частности, больших объемов оперативной памяти, что не всегда реализуемо на практике.

В работе исследуется возможность решения задачи диагностики слабой квадратичной нелинейности случайных процессов на фоне аддитивного шума с использованием так называемых “ $1\frac{1}{2}D$ – спектров” [2]. Такой подход является частным случаем биспектрального анализа, но значительно

проще реализуется. Получены выражения для среднего значения и дисперсии оценки “ $1\frac{1}{2}D$ – спектра”. Предложен метод определения коэффициента квадратичного преобразования на фоне аддитивного шума с неизвестной спектральной плотностью, равномерной в полосе анализа.

2. Постановка задачи и основные соотношения

Отклик $u_0(t)$ нелинейного элемента с квадратичной передаточной функцией на входное воздействие $u_c(t)$ можно представить как

$$u_0(t) = u_c(t) + k \cdot u_c^2(t),$$

где k – коэффициент нелинейного преобразования размерности $[u_c(t)]^{-1}$. На вход анализатора, задачей которого является обнаружение такого типа нелинейности и оценка параметра k , поступает сигнал

$$u(t) = u_0(t) + n(t), \quad (1)$$

где $n(t)$ – случайный шум. Для построения алгоритма диагностики квадратичного преобразования процесса $u_c(t)$ воспользуемся “ $1\frac{1}{2}D$ – преобразованием” $\Gamma(\omega)$ [1], которое является частным случаем биспектрального анализа. Действительно,

можно показать, что для стационарного случайного процесса $y(t)$

$$\Gamma_y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' B_y(\omega, \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C_y(\tau, \tau) e^{-i\omega\tau}.$$

Здесь $B_y(\omega, \omega')$ и $C_y(\tau, \tau)$ – биспектр и кумулянт 3-го порядка процесса $y(t)$ соответственно. Поскольку $C_y(\tau, \tau) = \langle y(t) \cdot y^2(t + \tau) \rangle$ (“ $\langle \rangle$ ” означает операцию статистического усреднения), то $\Gamma_y(\omega)$ можно рассматривать как взаимный спектр процессов $y(t)$ и $y^2(t)$. Пусть $\Gamma(\omega)$ вычисляется по алгоритму, блок-схема которого представлена на рис. 1.



Рис. 1. Блок-схема алгоритма вычисления $\Gamma(\omega)$: $\Pi_A(\omega)$, $\Pi_1(\omega)$ и $\Pi_2(\omega)$ – передаточные характеристики входного устройства анализатора и фильтров

Тогда, если $u_c(t)$ и $n(t)$ статистически независимые стационарные нормальные случайные процессы с нулевым средним, $\Gamma(\omega)$ можно представить как

$$\Gamma(\omega) = 2k \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |\Pi_1(\omega/2 + \xi) \Pi_2(\omega/2 - \xi)| \cdot Q(\omega, \xi) e^{i\Phi(\omega, \xi)} + 8k^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta |\Pi_1(\omega/2 + \xi) \Pi_2(\omega/2 - \xi)| \langle |S_c(\eta)|^2 \rangle \times \langle |S_c(\omega - \eta)|^2 \rangle \langle |S_c(\omega/2 + \xi - \eta)|^2 \rangle e^{i\Phi(\omega, \xi)}. \quad (2)$$

Здесь знак “ $|\cdot|$ ” означает модуль соответствующей комплексной функции;

$$\Phi(\omega, \xi) = \varphi_A(\omega/2 + \xi) + \varphi_A(\omega/2 - \xi) - \varphi_A(\omega) + \varphi_1(\omega/2 + \xi) + \varphi_2(\omega/2 - \xi);$$

$$Q(\omega, \xi) = |\Pi_A(\omega) \Pi_A(\omega/2 + \xi) \Pi_A(\omega/2 - \xi)| \times \langle |S_c(\omega)|^2 \rangle \langle |S_c(\omega/2 + \xi)|^2 \rangle \langle |S_c(\omega/2 - \xi)|^2 \rangle + \langle |S_c(\omega/2 + \xi)|^2 \rangle \langle |S_c(\omega/2 - \xi)|^2 \rangle;$$

$\langle |S_c(\omega)|^2 \rangle$ – энергетический спектр процесса $u_c(t)$; $\varphi_A(\omega)$, $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ – фазовые характеристики входного устройства анализатора и фильтров соответственно, а $\Pi_A(\omega)$, $\Pi_1(\omega)$ и $\Pi_2(\omega)$ – их передаточные функции.

При получении выражения (2) не учитывались слагаемые, которые дают вклад только в постоянную составляющую, а также полагалось, что $|\Pi_A(0)| = 0$. Видно, что при $k = 0$ (нет нелинейного преобразования) $\Gamma(\omega) = 0$, что может быть использовано для обнаружения квадратичной нелинейности в исследуемом процессе. Кроме того, если известен энергетический спектр сигнала $\langle |S_c(\omega)|^2 \rangle$, то выражение (2) позволяет оценить и крутизну нелинейного преобразования k . Однако при этом имеется ряд сложностей, которые будут рассмотрены ниже.

3. Определение крутизны нелинейного преобразования

Наиболее часто встречающимся на практике является случай анализа нелинейных систем с достаточно малым коэффициентом нелинейного преобразования. Это обусловлено тем, что большинство естественных объектов исследований характеризуются слабой нелинейностью, обнаружение которой само по себе требует разработки специальных методов. Запишем дисперсию σ_0^2 процесса $u_0(t)$ в виде суммы дисперсий его линейной σ_c^2 и квадратичной σ_2^2 частей

$$\sigma_0^2 = \sigma_c^2 + \sigma_2^2 = \sigma_c^2 + 3k^2 \sigma_c^4.$$

Введем параметр q , характеризующий отношение энергии квадратичной составляющей процесса к его полной энергии

$$q = \frac{3k^2 \sigma_c^2}{1 + 3k^2 \sigma_c^2}.$$

Критерием слабой нелинейности может служить условие $q \ll 1$, которое удовлетворяется, если

$$3k^2\sigma_c^2 \ll 1. \quad (3)$$

При выполнении неравенства (3) вторым слагаемым в (2) можно пренебречь и записать

$$\Gamma(\omega) = 2k \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \Pi_1(\omega/2 + \xi) \Pi_2(\omega/2 - \xi) \cdot Q(\omega, \xi) e^{i\Phi(\omega, \xi)}. \quad (4)$$

Полученное выражение, кроме индикации квадратичной нелинейности, можно использовать для определения k . Однако при этом имеются следующие сложности:

1. Интегрировать в (4) нужно с учетом фазовых характеристик $\varphi_A(\omega)$, $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$, которые не всегда достаточно точно известны.

2. Реально $\Gamma(\omega)$ определяется с погрешностью, обусловленной конечным временем усреднения анализируемого процесса $u(t)$ и наличием шума $n(t)$.

3. Как правило, энергетический спектр сигнала неизвестен. Непосредственное применение спектрального анализа к соотношению (1) позволяет оценить только совокупный энергетический спектр $\langle |S_u(\omega)|^2 \rangle$ процесса $u(t)$, который при выполнении условия (3) можно представить в виде

$$\langle |S_u(\omega)|^2 \rangle \approx \langle |S_c(\omega)|^2 \rangle + \langle |S_{in}(\omega)|^2 \rangle, \quad (5)$$

где $\langle |S_{in}(\omega)|^2 \rangle$ – энергетический спектр шума. В то время, как для определения k необходимо знать $\langle |S_c(\omega)|^2 \rangle$.

Что касается первой трудности, то ее можно преодолеть, используя достаточно узкополосные фильтры. Наиболее удобным является применение прямоугольных фильтров, которые можно реализовать цифровыми методами. Если их полосы пропускания значительно уже характерной ширины $\Pi_A(\omega)$, то можно записать

$$|\Gamma(\omega)| = 2k \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \Pi_1(\omega/2 + \xi) \Pi_2(\omega/2 - \xi) \cdot Q(\omega, \xi), \quad (6)$$

т. е. можно вычислить модуль $\Gamma(\omega)$.

Сложнее обстоит дело с двумя другими проблемами. Выберем в качестве оценки $\Gamma(\omega)$ следующую функцию

$$\hat{\Gamma}(\omega) = \frac{1}{N} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \hat{S}_j(\omega) \hat{S}_j(\omega') \hat{S}_j^*(\omega + \omega'), \quad (7)$$

где $\hat{S}_j(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T dt u_j(t) e^{-i\omega t}$; $N = T_n/T$ – количество реализаций процесса $u(t)$ длиной T на всем интервале наблюдений T_n ; j – номер текущей реализации. Можно показать, что такая оценка является несмещенной и состоятельной, а при выполнении условия (3) дисперсии реальной σ_{Re}^2 и мнимой σ_{Im}^2 частей $\hat{\Gamma}(\omega)$ равны

$$\sigma_{Re}^2 = \sigma_{Im}^2 = \frac{1}{4N} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left| \Pi_{1\varphi}(\omega, \xi) \right|^2 D(\omega, \xi) + \frac{4\pi}{T} \left| \Pi_A(\omega) \right|^4 \left| \Pi_A(2\omega) \right|^2 \Pi_{2\varphi}(\omega) \langle |S_u(\omega)|^2 \rangle + \langle |S_u(2\omega)|^2 \rangle \right], \quad (8)$$

где

$$D(\omega, \xi) = \left| \Pi_A(\omega) \right|^2 \left| \Pi_A(\omega/2 - \xi) \right|^2 \left| \Pi_A(\omega/2 + \xi) \right|^2 \langle |S_u(\omega)|^2 \rangle \times \langle |S_u(\omega/2 - \xi)|^2 \rangle \langle |S_u(\omega/2 + \xi)|^2 \rangle;$$

$$\Pi_{1\varphi}(\omega, \xi) = \Pi_1(\omega/2 - \xi) \Pi_2(\omega/2 + \xi) + \Pi_1(\omega/2 + \xi) \Pi_2(\omega/2 - \xi);$$

$$\Pi_{2\varphi}(\omega) = \Pi_1(\omega) \Pi_2^*(2\omega) \Pi_1(2\omega) \Pi_2^*(\omega) + \left| \Pi_1(2\omega) \right|^2 \left| \Pi_2(\omega) \right|^2 + \left| \Pi_1(\omega) \right|^2 \left| \Pi_2(2\omega) \right|^2 + \Pi_1^*(2\omega) \Pi_2(\omega) \Pi_1^*(\omega) \Pi_2(2\omega).$$

Поскольку в реальных условиях T_n ограничено, σ_{Re}^2 и σ_{Im}^2 всегда конечны. Это приводит к ошибкам измерения $\Gamma(\omega)$. На рис. 2 приведены результаты обработки компьютерного модельного эксперимента для случая равномерного в полосе анализа спектра $\langle |S_u(\omega)|^2 \rangle = 50$ (все значения здесь и далее даны в безразмерных условных единицах) и $k = 0$. Несмотря на большое количество усреднений ($N = 1000$), $\left| \hat{\Gamma}(f) \right| \neq 0$, что является следствием

погрешности оценки (7). (Здесь и далее вместо круговой частоты ω иногда используется переменная $f = \omega/(2\pi)$).

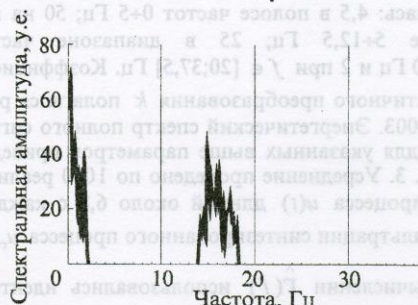


Рис. 2. Модуль функции $\hat{\Gamma}(f)$ при $k=0$

Представим $|\hat{\Gamma}(\omega)|$ в виде

$$|\hat{\Gamma}(\omega)| = \sqrt{[\langle \text{Re} \hat{\Gamma}(\omega) \rangle + \delta \text{Re} \hat{\Gamma}(\omega)]^2 + [\langle \text{Im} \hat{\Gamma}(\omega) \rangle + \delta \text{Im} \hat{\Gamma}(\omega)]^2},$$

где $\delta \text{Re} \hat{\Gamma}(\omega)$, $\delta \text{Im} \hat{\Gamma}(\omega)$ – ошибки измерения реальной и мнимой частей $\Gamma(\omega)$. Если

$$2[\text{Re} \hat{\Gamma}(\omega) \delta \text{Re} \hat{\Gamma}(\omega) + \text{Im} \hat{\Gamma}(\omega) \delta \text{Im} \hat{\Gamma}(\omega)] + [\delta \text{Re} \hat{\Gamma}(\omega)]^2 + [\delta \text{Im}(\omega)]^2 \ll 1,$$

то, учитывая, что $\langle \hat{\Gamma}(\omega) \rangle = \Gamma(\omega)$, получим

$$\langle |\hat{\Gamma}(\omega)| \rangle \approx |\Gamma(\omega)| + \frac{\sigma_{\text{Re}}^2}{|\Gamma(\omega)|},$$

а для дисперсии σ_M^2 оценки модуля $|\Gamma(\omega)|$ имеем

$$\sigma_M^2 \approx \sigma_{\text{Re}}^2 + \sigma_{\text{Im}}^2.$$

Неравенство $\sigma_M/|\Gamma(\omega)| \ll 1$ можно рассматривать как условие надежного обнаружения квадратичной нелинейности. Используя соотношения (6) и (8), из него можно определить необходимое для достоверной оценки $|\Gamma(\omega)|$ количество усреднений

N при заданных спектральных плотностях сигнала и шума, а также коэффициенте преобразования k . Заметим, что для уменьшения погрешности оценки можно использовать процедуру усреднения по частотам. Еще одна возможность заключается в использовании аппроксимирующих функций для $\Gamma(\omega)$, вид которых можно определить, исходя из заданных характеристик фильтров и формы измеренного энергетического спектра процесса. (Так, при использовании фильтров с прямоугольными характеристиками для равномерного спектра $\langle |S_c(\omega)|^2 \rangle$, из (4) следует, что зависимости $\text{Re} \Gamma(\omega)$ и $\text{Im} \Gamma(\omega)$ на плоскости (Γ, ω) имеют вид равнобедренных треугольников с основанием $2(\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}})$, где ω_{max} , ω_{min} – соответственно максимальная и минимальная частоты пропускания фильтров). Затем, например, с помощью метода минимума среднеквадратичных отклонений вычисляются значения параметров этих функций, которые используются для оценки $|\Gamma(\omega)|$.

Перейдем к анализу возможности определения параметра k для наиболее часто встречающегося на практике случая, когда энергетический спектр процесса $\langle |S_c(\omega)|^2 \rangle$ неизвестен. Предположим, что $\langle |S_u(\omega)|^2 \rangle = \text{const}$ в полосе анализа, в то время как $\langle |S_c(\omega)|^2 \rangle$ зависит от частоты. Обозначив $\langle |S_u(\omega)|^2 \rangle = I^2$, в соответствии с (5) представим

$$\langle |S_c(\omega)|^2 \rangle \approx \langle |S_u(\omega)|^2 \rangle - I^2.$$

Тогда, согласно (6), запишем выражение, связывающее измеренную функцию $|\hat{\Gamma}(\omega)|$ со спектральными характеристиками сигнала (1):

$$|\hat{\Gamma}(\omega)| = k[A(\omega)I^4 - 2B(\omega)I^2 + C(\omega)], \quad (9)$$

где $A(\omega) = 6 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |\Pi_1(\omega/2 + \xi)| |\Pi_2(\omega/2 - \xi)| |\Pi_A(\omega, \xi)|$;

$$B(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |\Pi_1(\omega/2 + \xi)| |\Pi_2(\omega/2 - \xi)| |\Pi_A(\omega, \xi)| \times \{ \langle |S_u(\omega)|^2 \rangle + \langle |S_u(\omega/2 + \xi)|^2 \rangle + \langle |S_u(\omega/2 - \xi)|^2 \rangle \};$$

$$C(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |P_1(\omega/2 + \xi) P_2(\omega/2 - \xi) Q_u(\omega, \xi)|;$$

$$|P_A(\omega, \xi)| = |P_A(\omega) P_A(\omega/2 + \xi) P_A(\omega/2 - \xi)|.$$

Функция $Q_u(\omega, \xi)$ аналогична ранее введенной $Q(\omega, \xi)$ (см. (2)), если в последней вместо $\langle |S_c(\omega)|^2 \rangle$ подставить $\langle |S_u(\omega)|^2 \rangle$.

Измеряя $|\hat{\Gamma}(\omega)|$ на двух частотах ω_1 и ω_2 , получим систему двух уравнений для определения I^2 и k :

$$\begin{cases} |\hat{\Gamma}(\omega_1)| = k[A(\omega_1)I^4 - 2B(\omega_1)I^2 + C(\omega_1)], \\ |\hat{\Gamma}(\omega_2)| = k[A(\omega_2)I^4 - 2B(\omega_2)I^2 + C(\omega_2)]. \end{cases} \quad (10)$$

Разделив первое уравнение на второе, запишем

$$I_{1,2}^2 = b/a \pm \sqrt{(b/a)^2 - c/a}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{где } a &= A(\omega_1) - \gamma A(\omega_2), & b &= B(\omega_1) - \gamma B(\omega_2), \\ c &= C(\omega_1) - \gamma C(\omega_2); & \gamma &= \frac{|\hat{\Gamma}(\omega_1)|}{|\hat{\Gamma}(\omega_2)|}. \end{aligned}$$

Из двух решений (11) необходимо выбрать одно, руководствуясь физическими соображениями. Например, I^2 не может превышать минимальное значение $\langle |S_u(\omega)|^2 \rangle$. Затем вычисляется значение параметра k .

Следует отметить, что рассмотренная выше задача, вообще говоря, является некорректной и требует для своего решения применения специальных методов. Однако их рассмотрение выходит за рамки данной работы.

4. Модельный эксперимент. Методика диагностики квадратичной нелинейности

Для проверки полученных выше результатов был проведен следующий численный эксперимент. Статистически независимые процессы $u_c(t)$ и $n(t)$ синтезировались с помощью стандартной программы генерирования стационарных случайных гауссовых последовательностей. Энергетический спектр шума при этом задавался равномерным в полосе анализа $0+37,5$ Гц со спектральной плот-

ностью $I^2=12,5$. Передаточная функция $P_A(f)$ полагалась равной 1 при $f \in (0; 37,5]$ Гц и 0 вне этого интервала. Спектральная плотность сигнала $u_c(t)$ моделировалась ступенчатой функцией и равнялась: 4,5 в полосе частот $0+5$ Гц; 50 на интервале $5+12,5$ Гц; 25 в диапазоне частот $12,5+20$ Гц и 2 при $f \in [20; 37,5]$ Гц. Коэффициент квадратичного преобразования k полагался равным 0,003. Энергетический спектр полного сигнала (1) для указанных выше параметров приведен на рис. 3. Усреднение проведено по 1000 реализациям процесса $u(t)$ длиной около 6,8 с каждая. Для фильтрации синтезированного процесса $u_c(t)$

при вычислении $\hat{\Gamma}(f)$ использовались идентичные цифровые фильтры с прямоугольными передаточными характеристиками

$$P_1(f) = P_2(f) = \begin{cases} 1, & f \in [f_{\min}, f_{\max}], \\ 0, & f \notin [f_{\min}, f_{\max}]. \end{cases}$$

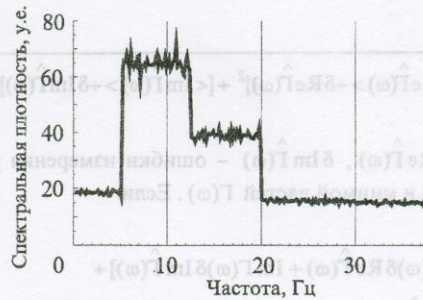


Рис. 3. Энергетический спектр модельного процесса $u(t)$

Ширина полосы пропускания фильтров $\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$ задавалась равной 2 Гц. Оценки $\Gamma(f)$ были получены для двух значений частот настройки фильтров $f_0 = (f_{\max} + f_{\min})/2$: $f_{01} = 8$ Гц и $f_{02} = 16$ Гц. Результаты вычислений

реальных и мнимых частей $\hat{\Gamma}(f)$ приведены на рис. 4 и рис. 5. Параметры усреднения были такими же, как и при получении оценки энергетического спектра процесса $u(t)$. Значения $|\hat{\Gamma}(2f_{01})|$ и $|\hat{\Gamma}(2f_{02})|$, которые использовались для дальней-

шей обработки, определялись следующим образом. В рассматриваемом случае зависимости $\text{Re}\Gamma(f)$ и $\text{Im}\Gamma(f)$ на плоскости $\Gamma(f)$ должны иметь вид равнобедренных треугольников с основанием $2(f_{\max} - f_{\min})$ и, таким образом,

$$\int_{2f_{\min}}^{2f_{\max}} df \begin{Bmatrix} \text{Re}\Gamma(f) \\ \text{Im}\Gamma(f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Re}\Gamma(2f_0) \\ \text{Im}\Gamma(2f_0) \end{Bmatrix} \times (f_{\max} - f_{\min}). \quad (12)$$

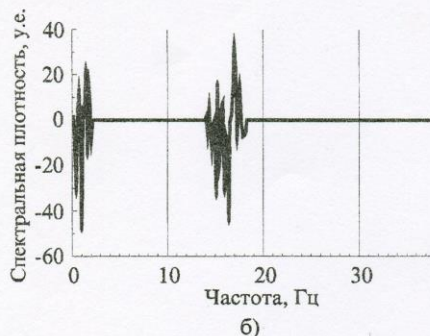
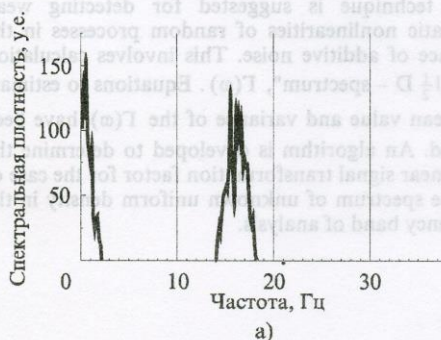


Рис. 4. Реальная (а) и мнимая (б) части $\hat{\Gamma}(f)$ для модельного эксперимента при частоте настройки фильтров 8 Гц

Тогда, измеряя площадь под экспериментальной кривой и сопоставляя ее с (12), можно точнее оценить $\text{Re}\Gamma(f)$ и $\text{Im}\Gamma(f)$. По полученным таким способом $\text{Re}\hat{\Gamma}(2f_0)$ и $\text{Im}\hat{\Gamma}(2f_0)$ вычислялись $|\hat{\Gamma}(2f_{01})|$ и $|\hat{\Gamma}(2f_{02})|$. Затем определялись коэффициенты $A(f_i)$, $B(f_i)$, $C(f_i)$ и решалась сис-

тема (10). Найденные значения I^2 и k были равны 12,2 и 0,0028 соответственно. То есть для модельного эксперимента относительная погрешность оценки k составила примерно 7%, что является вполне удовлетворительным.

Окончательно предложенный алгоритм определения коэффициента квадратичного преобразования на фоне аддитивного шума можно сформулировать следующим образом:

1. Оцениваются $\text{Re}\hat{\Gamma}(f)$ и $\text{Im}\hat{\Gamma}(f)$.
2. Методом усреднения по частотам или с помощью аппроксимирующих функций определяются значения $\text{Re}\hat{\Gamma}(f)$ и $\text{Im}\hat{\Gamma}(f)$ на двух частотах f_1 и f_2 .
3. Вычисляются $|\hat{\Gamma}(f_1)|$ и $|\hat{\Gamma}(f_2)|$.
4. Из решения системы уравнений (10) определяются I^2 и k .

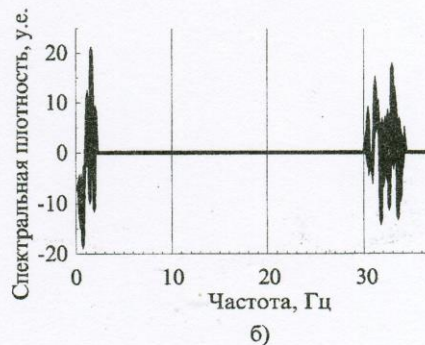
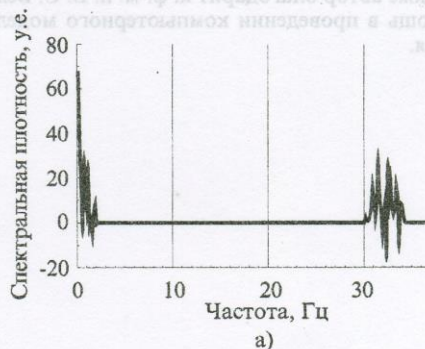


Рис. 5. Реальная (а) и мнимая (б) части $\hat{\Gamma}(f)$ для модельного эксперимента при частоте настройки фильтров 16 Гц

5. Выводы

В работе исследована возможность использования "1/2 D – спектров", $\Gamma(\omega)$, для диагностики слабой квадратичной нелинейности случайных процессов на фоне аддитивного шума. Получены выражения для математического ожидания и дисперсии оценки $\Gamma(\omega)$. Предложен метод определения крутизны нелинейного преобразования для случая равномерного в полосе анализа спектра шума с неизвестной спектральной плотностью. Для проверки работоспособности разработанного метода проведено компьютерное моделирование алгоритма. Полученные результаты свидетельствуют о возможности использования предложенного способа для решения практических задач диагностики квадратичной нелинейности случайных процессов.

Автор признателен д. ф.-м. н., проф. Ю. М. Ямпольскому и к. ф.-м. н. В. С. Белею за обсуждение постановочной части работы, а также д. ф.-м. н. В. Г. Безродному за ряд полезных советов. Также автор благодарит к. ф.-м. н. В. С. Белея за помощь в проведении компьютерного моделирования.

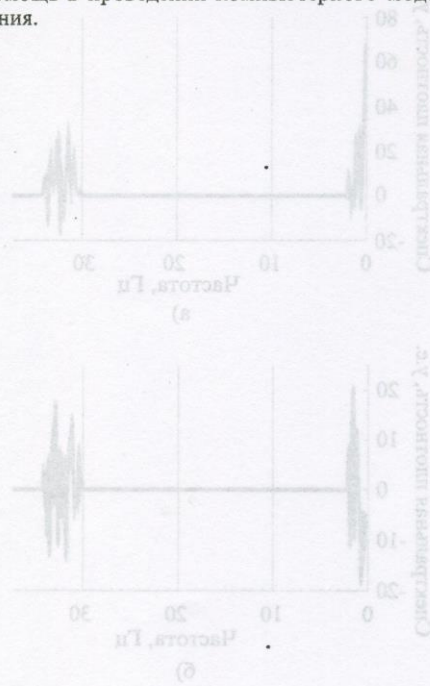


Рис. 5. Реальная (а) и мнимая (б) части $\hat{\Gamma}(\omega)$ для модельного эксперимента при равномерном распределении фаз. Рис. 6. Реальная (а) и мнимая (б) части $\hat{\Gamma}(\omega)$ для модельного эксперимента при равномерном распределении фаз.

Литература

1. A. W. Wernik. Methods of Data Analysis for Resolving Nonlinear Phenomena. In: Modern Ionospheric Science. Edited by H. Kohl, R. Ruster, and K. Schlegel, European Geophys. Society, Berlin, 1996, pp. 322-345.
2. J. M. Mendel. Proc. IEEE, 1991, 79, pp. 278-304.

Bispectral Analysis of Quadratic Type Transformation of Random Processes

Vladimir G. Galushko

A technique is suggested for detecting weak quadratic nonlinearities of random processes in the presence of additive noise. This involves calculation of a "1/2 D – spectrum", $\Gamma(\omega)$. Equations to estimate the mean value and variance of the $\Gamma(\omega)$ have been derived. An algorithm is developed to determine the non-linear signal transformation factor for the case of a noise spectrum of unknown uniform density in the frequency band of analysis.

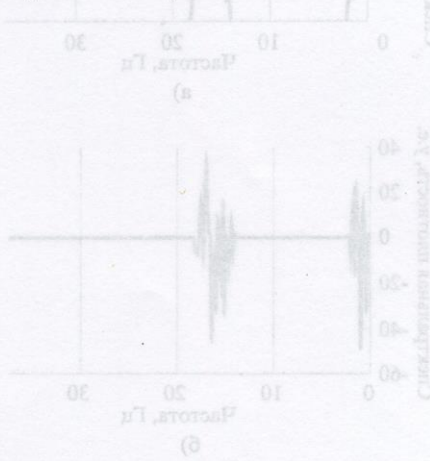


Рис. 4. Реальная (а) и мнимая (б) части $\hat{\Gamma}(\omega)$ для модельного эксперимента при равномерном распределении фаз.

Тогда, применяя формулу подстановки, можно получить новую кривую и сопоставляя ее с $\hat{\Gamma}(\omega)$, можно оценить $\text{Re}\hat{\Gamma}(\omega)$ и $\text{Im}\hat{\Gamma}(\omega)$. По поданным значениям спектров $\text{Re}\hat{\Gamma}(\omega)$ и $\text{Im}\hat{\Gamma}(\omega)$ вычисляются $|\hat{\Gamma}(\omega)|$ и $\arg\hat{\Gamma}(\omega)$. Затем определяются коэффициенты $\hat{A}(\omega)$, $\hat{B}(\omega)$, $\hat{C}(\omega)$ и решается система уравнений...