

## Метод анализа дифракции волн на многослойных периодических структурах

Д. Л. Литвиненко, Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин

Радиоастрономический институт Национальной Академии наук Украины,  
310002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4

Статья поступила в редакцию 25 февраля 1998 г.

Предлагается метод решения задачи дифракции волн на многослойных структурах, основу которого составляет использование операторов прохождения и отражения соответствующей полубесконечной структуры. Приводятся результаты решения задачи определения коэффициентов прохождения и отражения многослойной периодической диэлектрической структуры.

Пропонується метод вирішення задачі дифракції хвиль на багатошарових структурах, основу якого складає використання відповідної напівнескінченної структури. Описуються методи побудови операторів, що характеризують властивості напівнескінчених структур. Наводяться результати вирішення задачі визначення коефіцієнтів проходження та відбиття багатошарової періодичної діелектричної структури.

### 1. Введение

Исследование дифракции волн на многослойных структурах – актуальная задача современной радиофизики. Если плоская сложная структура состоит из идентичных “элементарных” слоев, или, точнее, если изучаемое препятствие является конечной частью периодической (бесконечной в направлении периодичности) структуры, то решение задачи о взаимодействии электромагнитной волны с такой системой слоев может быть получено операторным методом. Суть его состоит в следующем.

Будем считать известным решение задачи о дифракции плоской волны на одиночном (“элементарном”) слое, причем отраженное и прошедшее поля описываются соответственно операторами отражения и прохождения. Это могут быть интегральные или матричные операторы, или даже комплексные коэффициенты (далее, для простоты, рассмотрим именно этот случай) в зависимости от свойств одного слоя.

Используя известные операторы и специфическую симметрию полубесконечной последовательности равноотстоящих “элементарных” слоев, можно построить операторы отражения от такой полубесконечной последовательности [1,2] и излучения из нее. Если полученные операторы использовать для описания преобразования полей на границах многослойного препятствия со свободным пространством, нетрудно найти прошедшее и отраженное поля (а также поле внутри структуры) как результат суммирования многократных отражений.

Описанный подход оказывается достаточно универсальным, давая возможность рассматри-

вать задачи весьма широкого класса, и эффективным, поскольку при имеющейся информации об одиночном “элементарном” препятствии для дальнейшего решения удастся построить эффективные численные алгоритмы.

### 2. Отражение плоской волны от границы полубесконечного плоскостоего диэлектрика

2.1. Пусть все полупространство  $z > 0$  заполняет система эквидистантно расположенных одинаковых плоскопараллельных слоев изотропного диэлектрика (см. рис. 1). Каждый слой имеет толщину  $h$ , диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  и магнитную проницаемость  $\mu = 1$ . Промежутки между слоями не заполнены:  $\epsilon = \mu = 1$ . Плоская электромагнитная волна нормально падает на границу  $z = 0$  полубесконечной структуры из полупространства  $z < 0$

$$u^i = q e^{ikz}, \quad (1)$$

где  $k = \omega/c$ , зависимость от времени предполагается в виде  $\exp(-i\omega t)$ ,  $q$  – амплитуда падающей волны.

Если каждый слой диэлектрика в полубесконечной структуре описывать коэффициентами отражения  $r$  и прохождения  $t$ , при решении задачи можно не рассматривать поле внутри слоев. Пусть электромагнитная волна (1) падает на слой ди-

электрика, границами которого являются плоскости  $z=0$  и  $z=h$ . Прошедшее через слой поле можно представить в виде

$$u^i = tqe^{ik(z-h)},$$

а отраженное – в виде

$$u^r = rqe^{-ikz},$$

где

$$t = \frac{4\sqrt{\epsilon}}{(\sqrt{\epsilon} + 1)^2 e^{-ikh\sqrt{\epsilon}} - (\sqrt{\epsilon} - 1)^2 e^{ikh\sqrt{\epsilon}}},$$

$$r = \frac{(\epsilon - 1)(e^{ikh\sqrt{\epsilon}} - e^{-ikh\sqrt{\epsilon}})}{(\sqrt{\epsilon} + 1)^2 e^{-ikh\sqrt{\epsilon}} - (\sqrt{\epsilon} - 1)^2 e^{ikh\sqrt{\epsilon}}}.$$

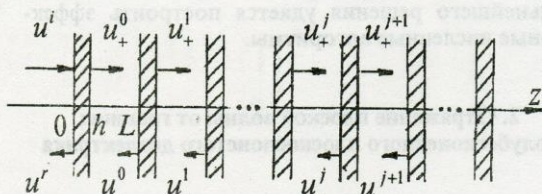


Рис. 1. Полубесконечная система диэлектрических слоев

Электромагнитное поле внутри слоистой структуры представляет собой плоские электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль оси  $Oz$  в положительном и отрицательном направлениях между границами соседних диэлектрических слоев. Перенумеруем промежутки между слоями, присвоив номер 0 ближайшему к границе полубесконечной структуры (см. рис. 1). Представим поле в каждом из промежутков в виде суперпозиции полей плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях между границами слоев,

$$u^j = u_+^j + u_-^j, \quad Lj + h < z < L(j+1),$$

где

$$u_+^j = A_+^j e^{ik(z-Lj-h)}, \quad (2)$$

$$u_-^j = A_-^j e^{-ik(z-Lj-L)}, \quad (3)$$

$L$  – период структуры в области  $z>0$ ,  $j$  – номер промежутка,  $j=0,1,2,\dots$ .

Отраженное от границы полубесконечной структуры поле представим в виде

$$u^r = Rqe^{-ikz},$$

где  $R$  – коэффициент отражения.

2.2. Вначале рассмотрим поле в области  $z<0$  и в промежутке между ближайшими к границе структуры слоями  $h<z<L$  (в промежутке с номером  $j=0$ ). Как легко видеть, амплитуды полей в этих областях пространства удовлетворяют уравнениям

$$A_+^0 = tq + re^{ik\Delta} A_-^0, \quad (4)$$

$$Rq = rq + te^{ik\Delta} A_-^0, \quad (5)$$

$$A_-^0 = Re^{ik\Delta} A_+^0, \quad (6)$$

где  $\Delta=L-h$ . Последнее из уравнений является следствием неизменности свойств полубесконечной структуры при отбрасывании или добавлении со стороны границы любого конечного числа элементов.

В системе уравнений (4)-(6) исключим амплитуды  $A_+^0$  и  $A_-^0$  и в результате получим уравнение относительно коэффициента отражения  $R$

$$R = r + (1 - Rre^{2ik\Delta})^{-1} R t^2 e^{2ik\Delta}. \quad (7)$$

Легко видеть, что это квадратное уравнение. Введем обозначения  $\tilde{R} = Re^{ik\Delta}$ ,  $\tilde{r} = re^{ik\Delta}$ ,  $\tilde{t} = te^{ik\Delta}$ . Тогда уравнение приобретает вид

$$\tilde{R}^2 + \tilde{R} \cdot \frac{\tilde{t}^2 - \tilde{r}^2 - 1}{\tilde{r}} + 1 = 0.$$

Два его корня удовлетворяют равенству

$$\tilde{R}_1 \tilde{R}_2 = 1.$$

Очевидно, что физический смысл имеет корень, абсолютная величина которого не превышает единицу.

2.3. Рассмотрим теперь поле в периодической части структуры при  $z > 0$ . Амплитуды плоских волн в соседних промежутках между слоями  $j$  и  $j+1$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} A_+^{j+1} &= te^{ik\Delta} A_+^j + re^{ik\Delta} A_-^{j+1}, \\ A_-^{j+1} &= Re^{ik\Delta} A_+^{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

После исключения  $A_-^{j+1}$  получаем рекуррентную формулу

$$A_+^{j+1} = (1 - Rre^{2ik\Delta})^{-1} te^{ik\Delta} A_+^j. \quad (9)$$

Как известно, электромагнитное поле в периодической структуре представляет собой поле медленной собственной волны. Поэтому электромагнитное поле при  $z \gg L$  в глубине полубесконечной структуры, т. е. при  $j \gg 1$ , является полем собственной волны бесконечной периодической системы диэлектрических слоев с амплитудой, которая определяется амплитудой возбуждающего ее поля в плоскости  $z=0$ . Поле собственной волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $Oz$ , удовлетворяет условию квази-периодичности

$$u^{j+1}(z+L) = e^{i\beta L} u^j(z), \quad Lj + h < z < L(j+1), \quad (10)$$

где  $\beta$  – постоянная распространения собственной волны. Из (10) следует соотношение между амплитудами волн в соседних многослойных промежутках периодической структуры

$$A_{\pm}^{j+1} = e^{i\beta L} A_{\pm}^j. \quad (11)$$

Из (9) и (11) при  $j \gg 1$  следует уравнение

$$e^{i\beta L} = (1 - Rre^{2ik\Delta})^{-1} te^{ik\Delta}. \quad (12)$$

Но поскольку (9) справедливо при любых  $j \geq 0$ , уравнения (11) и (12) выполняются как в случае бесконечной периодической структуры, так и в случае полубесконечной структуры.

Таким образом, поле внутри полубесконечной структуры, начиная с первой от границы ячейки, представляет собой поле собственной волны и в любом межслойном промежутке может быть найдено по амплитудам  $A_{\pm}^0$ :

$$A_+^0 = (1 - Rre^{2ik\Delta})^{-1} tq, \quad A_-^0 = Re^{ik\Delta} A_+^0 \quad (13)$$

с помощью рекуррентной формулы (11).

Постоянную распространения собственной волны можно найти из дисперсионного уравнения бесконечной периодической структуры

$$2te^{ik\Delta} \cos \beta L = 1 + (t^2 - r^2)e^{2ik\Delta}.$$

Тогда уравнение (12) дает возможность найти коэффициент отражения полубесконечной структуры.

Коэффициентом преобразования в собственной волне периодической структуры (коэффициентом прохождения) назовем величину

$$T = \frac{A_+^0}{q}.$$

Из (13) легко получить выражение для  $T$  в виде

$$T = (1 - Rre^{2ik\Delta})^{-1} t,$$

а поскольку справедливо (12), имеем

$$T = e^{i\beta L - ik\Delta}.$$

Заметим, что поле собственной волны образуется в результате интерференции полей двух плоских волн: волны, распространяющейся вдоль оси  $Oz$  и

имеющей амплитуду  $A_+$ , и волны с амплитудой  $A_-$ , распространяющейся в противоположном направлении. Коэффициент  $T$  определяет амплитуду лишь одной из этих парциальных составляющих собственной волны. Амплитуда второй может быть найдена из (13).

Отметим, что из (12) следует равенство

$$|t| = |1 - Rre^{2ik\Delta} \| e^{i\beta L} |,$$

полезное для контроля правильности вычисления  $R$ .

### 3. Прохождение собственной волны через границу плоскостойкого полубесконечного диэлектрика

Пусть теперь все полупространство  $z < h$  заполнено слоистой диэлектрической структурой с такими же параметрами как и выше, см. рис. 2. Рассмотрим прохождение собственной волны периодической слоистой структуры, приходящей из полупространства  $z < 0$ , через границу со свободным пространством в плоскости  $z = h$ . Обозначим составляющие падающей на границу собственной волны в ближайшем к границе межслойном промежутке  $u_{\pm}$ , отраженной  $v_{\pm}$ :

$$\begin{aligned} u_+ &= A_+ e^{ik(z+L-h)}, & u_- &= A_- e^{-ikz}, \\ v_+ &= B_+ e^{ik(z+L-h)}, & v_- &= B_- e^{-ikz}, \end{aligned}$$

где  $A_{\pm}$  и  $B_{\pm}$  – амплитуды плоских волн, составляющих падающую и отраженную собственные волны, соответственно. Поле волны, прошедшей в свободное пространство, представим в виде

$$u' = b e^{ik(z-h)}.$$

Амплитуды полей удовлетворяют уравнениям

$$(A_+ + B_+) e^{ik\Delta} t = b, \tag{14}$$

$$(A_+ + B_+) e^{ik\Delta} r = A_- + B_-, \tag{15}$$

$$A_- = R e^{ik\Delta} A_+, \tag{16}$$

$$B_+ = R e^{ik\Delta} B_-. \tag{17}$$

Два последние уравнения в этой системе аналогичны уравнению (8) и устанавливают связь между амплитудами плоских волн, составляющих поле собственной волны периодической структуры.

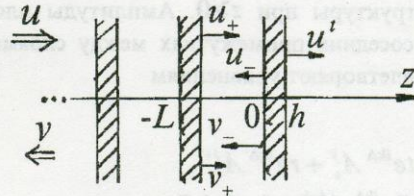


Рис. 2. Схема парциальных волн у границы полубесконечной структуры

Введем коэффициент отражения собственной волны и коэффициент ее преобразования в плоскую волну свободного пространства (коэффициент прохождения), определив их соответственно формулами

$$\rho = \frac{B_-}{A_+}, \quad \tau = \frac{b}{A_+}.$$

Используя систему уравнений (14)-(17), получим выражения для  $\rho$  и  $\tau$  в виде

$$\rho = \frac{(r-R)e^{ik\Delta}}{1 - Rre^{2ik\Delta}},$$

$$\tau = \frac{1 - R^2 e^{2ik\Delta}}{1 - Rre^{2ik\Delta}} t e^{ik\Delta}.$$

Таким образом, зная коэффициент отражения  $R$  плоской электромагнитной волны, падающей из свободного пространства на границу полубесконечной периодической слоистой структуры, можно определить коэффициенты отражения  $\rho$  и прохождения  $\tau$  собственной волны периодической структуры на ее границе со свободным пространством.

#### 4. Коэффициенты прохождения и отражения многослойной периодической структуры

Рассмотрим падение плоской волны (1) на структуру, состоящую из  $n$  слоев, см. рис. 3. Представим отраженное поле в виде

$$u^r = a e^{-ikz},$$

прошедшее в виде

$$u^t = b e^{ik[z-L(n-1)-h]}.$$

Введем коэффициенты отражения и прохождения  $n$ -слойной структуры

$$r_n = \frac{a}{q}, \quad t_n = \frac{b}{q}$$

и найдем выражения для них, используя коэффициенты отражения и прохождения полубесконечной периодической структуры.

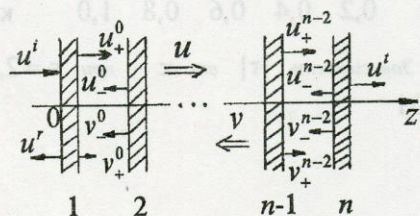


Рис. 3. Структура, состоящая из  $n$  слоев диэлектрика

Будем внутри многослойной структуры рассматривать собственные волны  $u$  и  $v$ , распространяющиеся (или затухающие, если частота имеет значение из зон непрозрачности бесконечной периодической структуры), соответственно, в направлении, совпадающем с направлением падающей волны, и в противоположном направлении (см. рис. 3). Эти волны имеют в каждом межслойном промежутке парциальные составляющие  $u_{\pm}$  и  $v_{\pm}$ , амплитуды которых связаны уравнениями (16) и (17). Поэтому, для краткости, приведем здесь

выражения только для  $u_+$  и  $v_-$ , т. е. для тех составляющих, которые распространяются в направлении собственной волны,

$$\begin{aligned} u_+^0 &= A e^{ik(z-h)}, \\ u_+^{n-2} &= A e^{i\beta L(n-2)} e^{ik[z-L(n-2)-h]}, \\ v_-^{n-2} &= B e^{-ik[z-L(n-1)]}, \\ v_-^0 &= B e^{i\beta L(n-2)} e^{-ik(z-L)}. \end{aligned}$$

Амплитуды полей удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} A &= Tq + \rho B e^{i\beta L(n-2)}, \\ B &= \rho A e^{i\beta L(n-2)}, \\ b &= \tau A e^{i\beta L(n-2)}, \\ a &= \tau B e^{i\beta L(n-2)} + Rq. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений дает возможность найти коэффициенты прохождения  $t_n$  и отражения  $r_n$  системы из  $n$  слоев

$$t_n = \tau T e^{i\beta L(n-2)} (1 - \rho^2 e^{2i\beta L(n-2)})^{-1}, \quad (18)$$

$$r_n = R + \rho \tau T e^{2i\beta L(n-2)} (1 - \rho^2 e^{2i\beta L(n-2)})^{-1}. \quad (19)$$

С другой стороны, коэффициенты прохождения и отражения структуры из  $n$  слоев можно найти по рекуррентным формулам

$$t_n = t e^{ik\Delta} (1 - r_{n-1} r e^{2ik\Delta})^{-1} t_{n-1}, \quad (20)$$

$$r_n = r_{n-1} + t_{n-1}^2 r e^{2ik\Delta} (1 - r_{n-1} r e^{2ik\Delta})^{-1}, \quad (21)$$

где  $t_1 = t$ ,  $r_1 = r$ . Формулы (20) и (21) легко получить, рассматривая прошедшее и отраженное поле для случая структуры из  $(n-1)$  слоев, для которой предполагаются известными  $t_{n-1}$  и  $r_{n-1}$ , и находящегося от нее на расстоянии  $\Delta$  еще одного слоя.

Однако применение формул (20) и (21) в случае структуры с большим числом слоев требует вы-

полнения существенно большего числа арифметических операций, чем вычисления, в основу которых положено использование коэффициентов отражения и прохождения полубесконечных структур. Особенно существенным этот выигрыш в числе операций может стать, если изложенный метод применить к анализу свойств структур из более сложных элементов, чем рассмотренные здесь, например, состоящих из ленточных дифракционных решеток, свойства которых описываются обобщенными матрицами прохождения и отражения.

**5. Анализ результатов вычисления частотных зависимостей коэффициентов отражения и прохождения**

На рис. 4 показана зависимость коэффициента отражения полубесконечной системы слоев от параметра  $\kappa=L/\lambda$ . Вертикальными штриховыми прямыми отмечены границы зон непрозрачности периодической структуры. Внутри зон непрозрачности  $|R|=1$ .

На рис. 5 и рис. 6 приведены частотные зависимости коэффициентов отражения  $|\rho|$  и прохождения  $|\tau|$  собственной волны полубесконечной структуры на границе со свободным пространством.

Частотные зависимости модулей коэффициента отражения систем из конечного числа слоев показаны на рис. 7 и рис. 8. Значения коэффициентов отражения, полученные по формулам (19) и (21), совпадают.

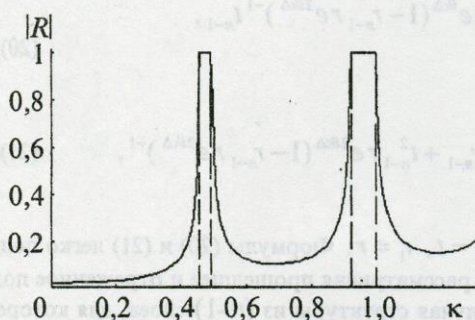


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения  $|R|$  полубесконечной структуры от  $\kappa$  при  $\epsilon=2,0$  и  $h/L=0,1$

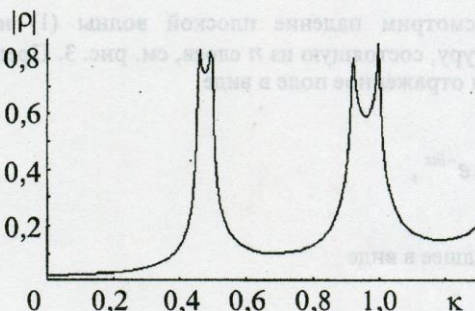


Рис. 5. Зависимость  $|\rho|$  от  $\kappa$  при  $\epsilon=2,0$  и  $h/L=0,1$

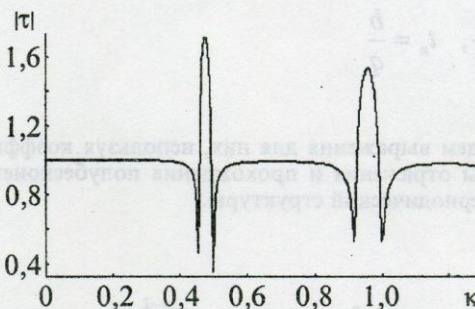


Рис. 6. Зависимость  $|\tau|$  от  $\kappa$  при  $\epsilon=2,0$  и  $h/L=0,1$

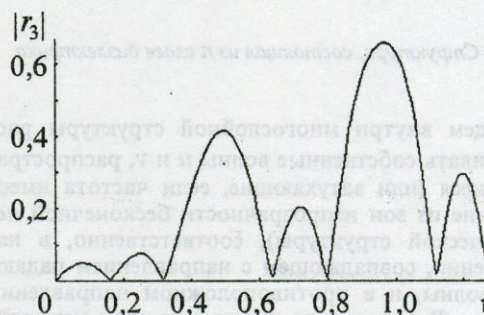


Рис. 7. Зависимость коэффициента отражения  $|r_3|$  структуры из 3 слоев от  $\kappa$  при  $\epsilon=2,0$  и  $h/L=0,1$

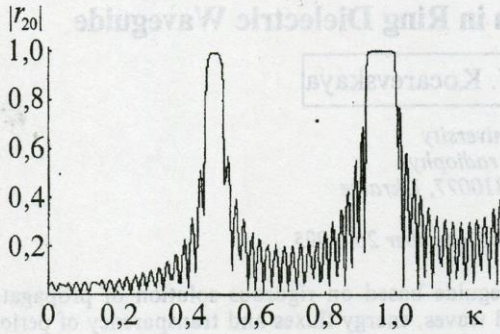


Рис. 8. Зависимость коэффициента отражения  $|r_{20}|$  структуры из 20 слоев от  $k$  при  $\epsilon = 2,0$  и  $h/L = 0,1$

Таким образом, в случае многослойных систем использование концепции нахождения их коэффициентов отражения и прохождения на основе соответствующих характеристик полубесконечных структур дает возможность получить результаты при существенно меньших вычислительных затратах.

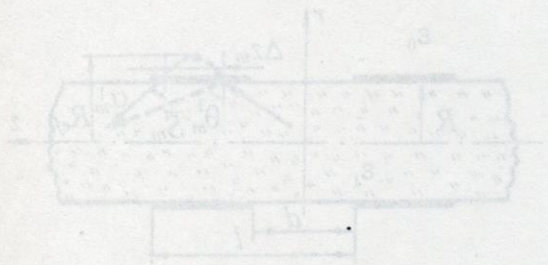


Рис. 1. Структура слоев

Here we will study regimes of slow waves in dielectric waveguide  $(\sqrt{\epsilon} < \beta < 1)$  for  $b/l = 0,2$  in resonance range according to the ray analogy [2]. The direction of propagation of diffraction harmonics will be determined through the angles:

$$\alpha_m = \arcsin(\sqrt{\epsilon} \sqrt{1 - \beta + m\pi/b}) \quad (2)$$

Литература

1. Л. Н. Литвиненко, И. И. Резник, Д. Л. Литвиненко. Доклады АН УССР. 1991, №6.
2. Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. Труды VII Междунар. Симп. "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики", 26-29 июня 1997. Феодосия, Изд-во Херсонского гос. техн. ун-та, с. 206-208 (на англ. яз).

Analysis of Wave Diffraction by Periodic Layered Structures

D. L. Lytvynenko, L. M. Lytvynenko, and S. L. Prosvirnin

A method for analyzing electromagnetic wave diffraction by periodic layered structures is suggested. It is based on the use of transmission and reflection operators for the corresponding semi-infinite structure. Methods for obtaining the operators characteristic of the semi-infinite structures are described. Numerical and graphic results on the transmission and reflection coefficients for a dielectric periodic layered structure are presented.

$$\begin{pmatrix} \Pi_m^+ \\ \Pi_m^- \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} A_m^n \\ B_m^n \end{pmatrix} \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} C_m^{nl} \\ D_m^{nl} \end{pmatrix} \exp[i(\alpha_m^n z - \beta_m^n t)] \quad (1)$$

where  $\Sigma_m(x)$  is cylindrical function equal to  $J_m(\sqrt{\epsilon}x)$  in internal range of waveguide ( $\sqrt{\epsilon} < \beta < 1$ ) and  $H_m^{(2)}(\sqrt{\epsilon}x)$  in external space  $\beta < \sqrt{\epsilon} < 1$ .  $\beta_m^n = \sqrt{k^2 \epsilon - \beta_m^n^2}$  - radial constant and  $\beta = \beta_0/c = kL$  - the slowdown coefficient of waveguide.