

## Строгое решение осесимметричной задачи о возбуждении полем электрического диполя эквидистантной структуры из соосных дисков

А. Н. Хижняк

Харьковская государственная академия городского хозяйства  
Украина, 310002, Харьков, ул. Революции, 12

Статья поступила в редакцию 12 декабря 1997 г.

Рассмотрена дифракция поля электрического диполя на эквидистантной структуре из соосных дисков. Получено строгое решение граничной задачи в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений II рода, которая является фредгольмовой и допускает решение методом редукции с любой наперед заданной точностью. Приведены результаты численных расчетов для некоторых энергетических характеристик рассеянного поля.

Розглянуто дифракцію поля електричного диполя на еквідистантній структурі з соосних дисків. Одержано строгий розв'язок граничної задачі у вигляді нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь II роду, що є фредгольмовою і допускає розв'язання методом редукції з будь якою необхідною точністю. Наведено дані розрахунків для деяких енергетичних характеристик розсіяного поля.

Целью данной работы является решение в строгой постановке задачи о дифракции поля электрического диполя на ограниченной эквидистантной структуре из произвольного числа соосных дисков одинакового радиуса и изучение электродинамических характеристик исследуемой структуры. С помощью метода моментов и метода частичного обращения оператора решение соответствующей граничной задачи сведено к численному решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений Фредгольмова типа II рода. Используемый подход не имеет принципиальных ограничений на геометрические параметры задачи и позволяет получить решение с любой наперед заданной точностью.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $N+1$  идеально проводящих соосных дисков одинакового радиуса  $R_0$  находятся на одинаковом расстоянии  $d_p$  один от другого. Расположим начало цилиндрической системы координат  $(r, \phi, z)$  в центре крайнего диска, так, чтобы остальные находились в области  $z > 0$ , см. рис. 1. Структура возбуждается элементарным электрическим диполем, расположенным параллельно оси  $Oz$  в точке  $z = -d_v$ . Задача заключается в определении полного поля во всем пространстве.

Учитывая симметрию поля источника и рассеивающей структуры, электромагнитное поле в данном случае может быть описано с использованием одной скалярной функции –  $z$ -компоненты

вектора Герца  $P(r, z; k)$ , где  $k = \frac{\omega}{c}$  – волновое число (предполагается зависимость от времени вида  $\exp(-i\omega t)$ ). Выражения для тангенциальных компонент поля имеют следующий вид

$$E_r = \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z}, \quad H_\phi = ik \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (1)$$

Полное поле во всем пространстве может быть представлено как суперпозиция поля источника –  $P_v$  и рассеянного поля –  $P_s$ :

$$P(r, z; k) = P_v(r, z; k) + P_s(r, z; k). \quad (2)$$

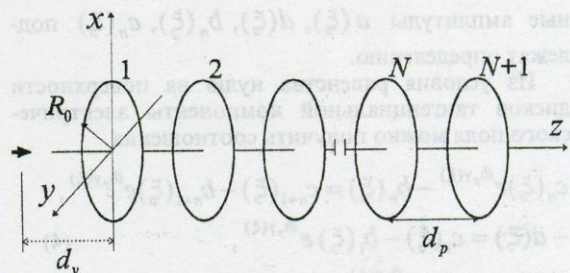


Рис. 1. Эквидистантная структура из соосных дисков

Функция  $P_s(r, z; k)$ , описывающая поле рассеянной волны, должна удовлетворять уравнению Гельмгольца в свободном пространстве, граничным условиям, условию излучения и условию ог-



раниченности энергии в любом ограниченном объеме пространства (условию на ребре).

2. Парные интегральные уравнения

Для определения функции  $P_s(r, z; k)$  воспользуемся методом Фурье. Учитывая симметрию задачи, поля падающей и рассеянной волн удобно записать с использованием интегрального преобразования Ханкеля

$$P_s(\rho, \eta; \kappa) = \int_0^\infty a(\xi) J_0(\xi \rho) e^{-i\eta \gamma(\xi)} d\xi, \quad \eta < 0;$$

$$P_{s,n}^+(\rho, \eta; \kappa) = \int_0^\infty c_n(\xi) J_0(\xi \rho) e^{i(\eta - (n-1)h_p)\gamma(\xi)} d\xi,$$

$$(n-1)h_p < \eta < nh_p;$$

$$P_{s,n}^-(\rho, \eta; \kappa) = \int_0^\infty b_n(\xi) J_0(\xi \rho) e^{-i(\eta - nh_p)\gamma(\xi)} d\xi,$$

$$(n-1)h_p < \eta < nh_p; \quad (3)$$

$$P_s(\rho, \eta; \kappa) = \int_0^\infty d(\xi) J_0(\xi \rho) e^{i(\eta - Nh_p)\gamma(\xi)} d\xi,$$

$$\eta > Nh_p;$$

$$P_v(\rho, \eta; \kappa) = -i \int_0^\infty \frac{\xi}{\gamma(\xi)} J_0(\xi \rho) e^{i|\eta + h_p|\gamma(\xi)} d\xi - \text{вектор}$$

Герца поля диполя.

Здесь  $\rho = r/R_0$ ,  $\eta = z/R_0$  - нормированные цилиндрические координаты,  $h_p = d_p/R_0$ ,

$$h_v = d_v/R_0, \quad \kappa = kR_0, \quad \gamma(\xi) = \sqrt{\kappa^2 - \xi^2},$$

$\text{Im } \gamma \geq 0$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots N$ . Неизвестные спектральные амплитуды  $a(\xi)$ ,  $d(\xi)$ ,  $b_n(\xi)$ ,  $c_n(\xi)$  подлежат определению.

Из условия равенства нулю на поверхности дисков тангенциальной компоненты электрического поля можно получить соотношения

$$c_n(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)} - b_n(\xi) = c_{n+1}(\xi) - b_{n+1}(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)},$$

$$-a(\xi) = c_1(\xi) - b_1(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)}, \quad (4)$$

$$d(\xi) = c_N(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)} - b_N(\xi)$$

и парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty [c_n(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)} - b_n(\xi) + q(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)}] \times$$

$$\times \gamma(\xi) J_1(\xi \rho) \xi d\xi = 0,$$

$$\eta = nh_p - 0, \quad 0 < \rho < 1;$$

$$\int_0^\infty [c_n(\xi) - b_n(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)} +$$

$$+ q(\xi) e^{i(n-1)h_p \gamma(\xi)}] \gamma(\xi) J_1(\xi \rho) \xi d\xi = 0,$$

$$\eta = (n-1)h_p + 0, \quad 0 < \rho < 1; \quad (5)$$

$$\int_0^\infty [b_{n+1}(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)} + c_{n+1}(\xi)] J_1(\xi \rho) d\xi =$$

$$= \int_0^\infty [b_n^{(m)}(\xi) + c_n^{(m)}(\xi) e^{ih_p \gamma(\xi)}] J_1(\xi \rho) \xi d\xi,$$

$$\eta = nh, \quad \rho > 1.$$

Здесь  $q(\xi)$  - спектральная амплитуда поля падающей волны,

$$q(\xi) = -i \frac{\xi}{\gamma(\xi)} \exp(ih_p \gamma(\xi)).$$

Поскольку радиусы дисков одинаковы, уравнения, полученные из граничных условий в разных плоскостях, имеют одинаковые области определения по параметру  $\rho$ . Складывая и вычитая уравнения (5), получаем парные интегральные уравнения, которые имеют следующий вид

$$\int_0^\infty u_n^\pm(\xi) J_1(\xi \rho) d\xi = 0, \quad \rho > 1,$$

$$\int_0^\infty u_n^\pm(\xi) J_1(\xi \rho) \gamma(\xi) (1 \mp e^{ih_p \gamma(\xi)}) d\xi =$$

$$= \int_0^\infty q(\xi) \xi \gamma(\xi) J_1(\xi \rho) e^{i(n-1)h_p \gamma(\xi)} (1 \mp e^{ih_p \gamma(\xi)}) d\xi +$$

(6)

$$+ \int_0^\infty (c_{n-1}(\xi) \pm b_{n+1}(\xi)) e^{ih_p \gamma(\xi)} \times$$

$$\times J_1(\xi \rho) \gamma(\xi) (1 \mp e^{ih_p \gamma(\xi)}) \xi d\xi, \quad 0 < \rho < 1,$$

$$u_n^\pm(\xi) =$$

$$= -\xi [(c_n(\xi) \pm b_n(\xi)) + (c_{n-1}(\xi) \pm b_{n+1}(\xi)) e^{ih_p \gamma(\xi)}]. \quad (7)$$

Чтобы система уравнений (6) была замкнутой, необходимо получить связи между функциями  $u_n^\pm(\xi)$  и  $c_n(\xi)$ ,  $b_n(\xi)$ . Их можно получить следующим образом. Введем вспомогательные функции  $\Theta_n(\xi)$  и  $\Omega_n(\xi)$ :



$$\Theta_n(\xi) = \frac{1}{2}(u_n^+(\xi) - u_n^-(\xi)) = - (b_n(\xi) + b_{n+1}(\xi) e^{ih_p\gamma(\xi)}) \xi, \quad (8)$$

$$\Omega_n(\xi) = \frac{1}{2}(u_n^+(\xi) + u_n^-(\xi)) = - (c_n(\xi) + c_{n-1}(\xi) e^{ih_p\gamma(\xi)}) \xi.$$

Из условия излучения следует, что  $c_0(\xi) \equiv 0$ ,  $b_{N+1}(\xi) \equiv 0$ . Из (8) нетрудно получить

$$\xi c_n(\xi) = - \sum_{r=0}^{n-1} e^{irh_p\gamma(\xi)} \Omega_{n-r}(\xi), \quad (9)$$

$$\xi b_n(\xi) = - \sum_{r=0}^{N-n} e^{irh_p\gamma(\xi)} \Theta_{n+r}(\xi).$$

Подставляя (9) в уравнения (6) и учитывая (8), получаем парные интегральные уравнения для определения функций  $u_n^{\pm(m)}(\xi)$ :

$$\int_0^\infty u_n^+(\xi) J_1(\xi\rho) d\xi = 0, \quad \rho > 1;$$

$$\int_0^\infty u_n^+(\xi) J_1(\xi\rho) \gamma(\xi) (1 \mp e^{ih_p\gamma(\xi)}) d\xi = \int_0^\infty q(\xi) \xi J_1(\xi\rho) \gamma(\xi) e^{i(n-1)h_p\gamma(\xi)} (1 \mp e^{ih_p\gamma(\xi)}) - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{ih_p\gamma(\xi)} J_1(\xi\rho) \gamma(\xi) (1 \mp e^{ih_p\gamma(\xi)}) \times \left[ \sum_{r=0}^{n-1} e^{irh_p\gamma(\xi)} (u_{n-r-1}^+(\xi) + u_{n-r-1}^-(\xi)) \pm \sum_{r=0}^{N-n-1} e^{irh_p\gamma(\xi)} (u_{n+r+1}^+(\xi) - u_{n+r+1}^-(\xi)) \right] d\xi, \quad (10)$$

$$0 < \rho < 1, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

### 3. Переход к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений II рода

С помощью метода моментов от парных интегральных уравнений (10) можно перейти к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Известно, что эффективность применения метода моментов в значительной степени определяется выбором базисных функций.

Будем искать решение уравнений (10) в виде разложения по функциям  $\phi_n^{(m)}(\xi)$  [1]

$$\phi_n^{(m)}(x) = \sqrt{4n+2m+3} J_{2n+m+3/2}(x) x^{-1/2}. \quad (11)$$

Функции (11) обладают следующими свойствами:

$$\int_0^\infty \phi_n^{(m)}(\xi) \phi_s^{(m)}(\xi) d\xi = \delta_{ns},$$

$$\int_0^\infty \phi_n^{(m)}(\xi) J_m(\xi\rho) d\xi = \Phi_n^{(m)}(\rho) =$$

$$\begin{cases} \frac{n!}{\Gamma(n+3/2)} \sqrt{\frac{4n+2m+3}{2}} \rho^m \times \\ \times (1-\rho^2)^{1/2} P_n^{(m,1/2)}(1-2\rho^2), & \rho < 1, \\ 0, & \rho > 1, \end{cases} \quad (12)$$

$$\int_0^1 \Phi_n^{(m)}(\rho) J_m(\xi\rho) \rho d\rho = \frac{1}{\xi} \phi_n^{(m)}(\xi),$$

где  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  – полиномы Якоби.

Необходимо отметить, что при непосредственном применении метода моментов получаемая система линейных алгебраических уравнений является системой I рода, и в целях эффективного использования численных методов для ее решения следует провести ее регуляризацию.

Для проведения регуляризации воспользуемся методом частичного обращения оператора. Эффективность такого подхода продемонстрирована в [2] при решении задач дифракции волн на структурах из лент и других экранов с ребрами. Введем вспомогательную функцию  $\varepsilon^\pm(\xi)$ , такую, что

$$\gamma(\xi) (1 \mp e^{ih_p\gamma(\xi)}) = i\xi (1 - \varepsilon^\pm(\xi)). \quad (13)$$

Подстановка соотношения (13) в подынтегральное выражение в (10) эквивалентна представлению оператора задачи в виде суммы двух операторов. Первый, содержащий члены без  $\varepsilon^\pm(\xi)$ , представляет собой статическую часть оператора задачи дифракции на одном диске, второй описывает динамические добавки и взаимодействие между дисками. Можно показать, что функции (11) являются собственными функциями статической части оператора задачи дифракции на одном диске. Кроме того, система функций (11) ортонормирована (12), поэтому матрица статиче-



ской части оператора в выбранном базисе есть матрица, кратная единичной.

Представим  $u_n^\pm(\xi)$  в виде разложения по функциям (11):

$$u_n^\pm(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n,s}^\pm \phi_s^{(1)}(\xi). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (10), учитывая (12) и (13), можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений II рода относительно неизвестных коэффициентов  $C_{n,s}^\pm$ :

$$B_{n,s}^\pm = \sum_{l=0}^{\infty} C_{n,l}^\pm A_{ls}^\pm - C_{n,s}^\pm + \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{r=0}^{n-1} (C_{n-r-1,s}^+ + C_{n-r-1,s}^-) D_{r+1,ls}^\pm \pm \sum_{r=0}^{N-n-1} (C_{n+r+1,s}^+ - C_{n+r+1,s}^-) D_{r+1,ls}^\pm \right\},$$

$$B_{n,s}^{\pm(m)} = i \int_0^{\infty} q(\xi) \phi_s^{(1)}(\xi) \gamma(\xi) e^{i(n-1)h_p \gamma(\xi)} \times (1 \mp e^{ih_p \gamma(\xi)}) e^{ih_p \gamma(\xi)} d\xi, \quad (15)$$

$$A_{ls}^\pm = i \int_0^{\infty} \phi_l^{(1)}(\xi) \phi_s^{(1)}(\xi) \epsilon^\pm(\xi) d\xi,$$

$$D_{n,ls}^\pm = R_{n,ls} \mp R_{n+1,ls},$$

$$R_{n,ls} = \frac{i}{2} \int_0^{\infty} \phi_l^{(1)}(\xi) \phi_s^{(1)}(\xi) e^{inh_p \gamma(\xi)} \frac{\gamma(\xi)}{\xi} d\xi,$$

$n=1, 2, \dots, N.$

Подынтегральные функции в (15) не имеют особенностей и убывают при  $\xi \rightarrow \infty$  либо как  $\xi^{-4}$ , либо экспоненциально, и вычисление матричных элементов может быть проведено с использованием стандартных методов численного интегрирования.

Используя неравенство Коши-Шварца, можно показать, что

$$\sum_{l,s=0}^{\infty} |A_{ls}^{\pm(m)}| < \infty, \quad \sum_{l,s=0}^{\infty} |D_{ls}^{\pm(m)}| < \infty,$$

т. е. матрица системы уравнений (15) является Фредгольмовой, следовательно данная система может быть решена методом редукции. Порядок редукции определяется количеством дисков в структуре и волновым размером отдельного диска и может быть определен как  $\text{entier}(2N\kappa) + 4$ .

Полученная бесконечная система линейных алгебраических уравнений полностью эквивалентна исходным уравнениям задачи при любых соотношениях длины волны и размеров рассеивающей структуры и может быть решена, вообще говоря, с любой наперед заданной точностью. Однако следует отметить, что при больших значениях параметров  $h$  и  $\kappa$  подынтегральные функции в выражениях для матричных элементов становятся быстроосциллирующими, и вычисление интегралов необходимо проводить с использованием специальных методов. В длинноволновой и резонансной областях решение системы уравнений (15) допускает применение с высокой эффективностью стандартных численных методов.

#### 4. Рассеянное поле в дальней зоне

Чтобы получить рассеянное поле в дальней зоне, интегралы в (3) можно вычислить методом стационарной фазы. Связь между решением уравнений (15) и амплитудой рассеяния  $F(\vartheta, \kappa)$  выражается следующими соотношениями:

$$P_s(R, \vartheta; k) = F(\vartheta, \kappa) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (16)$$

$R, \phi, \vartheta$  – сферическая система координат,

$$E_\vartheta = H_\phi = -\kappa^2 \sin \vartheta P_s(R, \vartheta; k),$$

$$F(\vartheta, \kappa) = -ictg \vartheta a(\kappa \sin \vartheta), \quad \pi/2 < \vartheta < \pi,$$

$$F(\vartheta, \kappa) = -ictg \vartheta d(\kappa \sin \vartheta), \quad 0 < \vartheta < \pi/2.$$

Функции  $a(\kappa \sin \vartheta)$  и  $d(\kappa \sin \vartheta)$  определены соотношениями (4), (7) и (14).

Физические свойства рассеянного поля в дальней зоне можно характеризовать такими величинами, как диаграмма направленности  $S(\vartheta, \kappa)$  и сопротивление излучения  $Z(\kappa)$ , которые мы определим следующим образом

$$S(\vartheta, \kappa) = |\sin \vartheta F(\vartheta, \kappa)|^2, \quad (17)$$

$$Z(\kappa) = \int_0^\pi S(\vartheta, \kappa) \sin \vartheta d\vartheta.$$

#### 5. Численные результаты

Рассеивающая структура является многопараметрической и полное исследование ее электродинамических свойств выходит за рамки данной работы. Приведем результаты, подтверждающие эффективность предлагаемого подхода для решения рассматриваемого класса задач теории дифракции и рассмотрим влияние резонансов в рас-



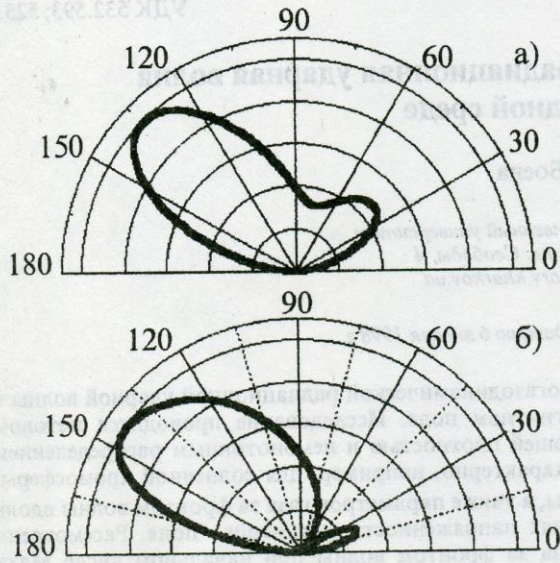


Рис. 2. Диаграмма направленности диполя над диском:  
 а)  $h_v = 0,15, kR_0 = 3$ ,  
 б)  $h_v = 0,15, kR_0 = 5$

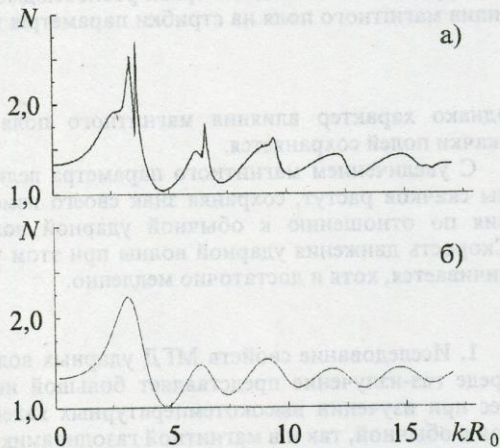


Рис. 3. Зависимость сопротивления излучения от  $kR_0$  для структуры из трех (а) и одного (б) дисков

сеивающей структуре на сопротивление излучения.

На рис. 2 представлена диаграмма направленности диполя над одним диском при следующих значениях параметров:  $h_v = 0,15, kR_0 = 3, kR_0 = 5$ . Приведенные данные полностью совпадают с результатами, полученными в [3] (следует отметить, что в отличие от (17) диаграмма направленности в [3] определяется как модуль амплитуды рассеяния). Соответствующие численные результаты для более сложных структур исследуемого класса автору неизвестны.

На рис. 3 приведена зависимость сопротивления излучения от параметра  $k$  для трех дисков в сравнении с аналогичными результатами для одного диска. Характерные колебания сопротивления излучения в точках резонанса связаны с наложением резонансов между разными парами дисков структуры. Это явление отсутствует в открытом резонаторе из двух дисков.

#### Литература

1. А. Н. Хижняк. Дифракция плоской волны на тонком диске. Акуст. ж. 1989, 35, №5, с. 929-933.
2. Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев, Наук. думка, 1984, 239 с.
3. М. Г. Белкина. Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. В кн.: Сборник статей по дифракции. Москва, Сов. радио, 1957, с. 148-174.

#### Rigorous Solution of Axissymmetric Dipole Field Diffraction Problem for Equidistant Structure of Coaxial Disks

A. N. Khizhnyak

Diffraction of the electric dipole field by the equidistant structure from coaxial disks is considered. Rigorous solution of the appropriate boundary problem is obtained in the form of infinite system of the linear algebraic equations of the II kind which appeared to be Fredholm's one and can be solved using reduction with any needed accuracy. Some numerical results for the power characteristics of the scattered field are performed.