

Форма импульса, распространяющегося в неоднородной непоглощающей среде

А. А. Галуза, А. С. Мазманишвили

Харьковский государственный политехнический университет,
Украина, 310002, г. Харьков, ул. Фрунзе, 21

Статья поступила в редакцию 16 октября 1997 г.

Построен аппроксимационный аналог уравнения Исимару для неоднородных сред. Проведено сравнение рассчитанных временных импульсов рассеянного излучения в неоднородной и однородной моделях. Указаны временные масштабы, влияющие на форму временных импульсов рассеянного излучения.

Побудовано апроксимаційний аналог рівняння Ісімару для неоднорідних середовищ. Проведено порівняння розрахованих часових імпульсів розсіяного випромінювання в неоднорідній та однорідній моделях. Визначено часові масштаби, що впливають на форму часових імпульсів розсіяного випромінювання.

1. Исходные положения

Ниже будет поставлена и рассмотрена задача о форме импульса, распространяющегося в неоднородной и непоглощающей среде рассеивающего типа. При этом будут приняты следующие допущения:

- исходная (стартовая волна) является плоской;
- характеристики среды, будучи переменными в пространстве, являются неизменными во времени (эти характеристики будут полагаться известными и заданными);
- пространственные характеристики среды азимутально симметричны относительно направления распространения излучения;
- рассматриваемое излучение представляет собой монохроматическую волну с импульсной огибающей.

Обсудим указанные допущения и вытекающие из них ограничения на область применимости результирующих выражений. В линейном приближении исходный импульс $I_i(t)$ и импульс на выходе из среды $I(t)$ связаны известным выражением (t - текущее время)

$$I(t) = \int G(t-t')I_i(t')dt', \quad (1)$$

и по форме $I_i(t)$ можно определить $I(t)$, если определена функция Грина $G(t-t')$.

Третье допущение означает, что характеристики среды изменяются слоями, параллельными фронту исходной плоской волны. Хотя возможно рассмотреть более общий случай, ниже мы ограничимся этим допущением, имея в виду получение результатов принципиального характера.

Целью настоящей работы является построение явных выражений для искомой функции Грина $G(t)$ и описание на ее основе свойств формы монохроматического импульса, распространяющегося в среде рассматриваемого вида.

Перейдем к формулировке исходных уравнений. Искомая функция Грина является фурье-образом двухчастотной функции когерентности Γ :

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma(\omega_d) \exp(-i\omega_d t) d\omega_d. \quad (2)$$

В свою очередь, в рамках задачи об изучении свойств импульса в точке с продольной координатой z и поперечной векторной координатой \mathbf{r} в работе [1] рассмотрены уравнения, описывающие пространственную эволюцию фурье-трансформанты для $G(t)$. В рассматриваемой физической ситуации распространения плоской электромагнитной волны в диффузионно - рассеивающей непоглощающей среде это уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + b(z)\mathbf{r}^2 \right) \Gamma(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0. \quad (3)$$

Здесь $a = k_d / 2k^2$, k - волновое число распространяющейся монохроматической волны, $k_d = \omega_d / c$, c - скорость света,

$$b(z) = (4\alpha_p)^{-1} \rho(z) \sigma_s(z) k^2, \quad (4)$$

где $\rho(z)$ - концентрация рассеивающих центров, $\sigma_s(z)$ - сечение рассеяния, α_p - угловой параметр рассеяния, а в качестве аргументов функции когерентности Γ здесь и ниже указаны продоль-

ная координата распространения z и поперечная координата \mathbf{r} .

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа с потенциалом квадратичного вида

$$U(z, \mathbf{r}) = b(z)\mathbf{r}^2 \quad (5)$$

с коэффициентом, зависящим от продольной координаты z , и с начальным условием

$$\Gamma(z=0, \mathbf{r}; \omega_d) = 1, \quad (6)$$

справедливым для всех \mathbf{r} , что обеспечивает свойство функции Грина: $G(t-t')|_{z=0} = \delta(t-t')$.

Уравнение (3) относится к классу уравнений Хилла и в общем случае аналитических решений для произвольного вида потенциала $U(z, \mathbf{r})$ получить не удастся. Поэтому существенным оказывается тот факт, что для потенциала квадратичного вида (5) аппроксимационное решение для функции Грина $G(t)$ построить возможно.

2. Уравнения для двухчастотной функции когерентности

Рассмотрим рассеивающий слой, толщина которого вдоль оси z равна L . Разобьем отрезок L на N участков $\{\Delta_n\}$

$$L = \sum_{n=1}^N \Delta_n.$$

Пусть величины $\rho(z)$ и $\sigma_s(z)$ заданы и являются непрерывными функциями z . Выберем участки $\Delta_n = z_n - z_{n-1}$, $n = 1, \dots, N$, так, чтобы передать все существенные детали потенциала $U(z, \mathbf{r})$, и обозначим $b_n = b(z_n)$, $\rho_n = \rho(z_n)$ и $\sigma_n = \sigma_s(z_n)$. Имея в виду случай $N \gg 1$, заменим в потенциале $U(z, \mathbf{r})$ все значения, лежащие внутри каждого n -го участка, $1 \leq n \leq N$, на величину $U(z_n, \mathbf{r})$, где

$$z_n = \sum_{m=1}^n \Delta_m$$

- правая граница участка. Пример такой аппроксимации для $\rho(z)$ изображен на рис. 1. Полученный таким образом потенциал $U(z, \mathbf{r})$, являющийся кусочно-постоянной функцией от z , будем использовать ниже в аппроксимационном уравнении (8).

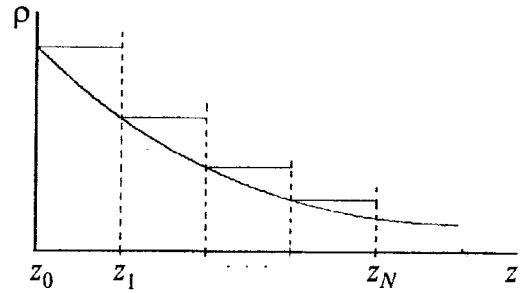


Рис. 1. Схема аппроксимации $\rho(z)$ кусочно-постоянной функцией

Теперь аппроксимируем решение уравнения (3) функцией $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$, которая является решением аппроксимационного уравнения с кусочно-постоянным по z приближением $U_N(z, \mathbf{r})$ для потенциала $U(z, \mathbf{r})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U_N(z, \mathbf{r}) \right) \Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0, \quad (7)$$

с условием $\Gamma_N(0, \mathbf{r}; \omega_d) = 1$.

Если будет найдено решение уравнения (7) для Γ_N , то искомая функция когерентности будет следовать из него при $N \rightarrow \infty$. Уравнению (7) эквивалентна последовательность уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U_N(z_n, \mathbf{r}) \right) \Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0, \quad (8)$$

$n=1, \dots, N,$

решения которых определяются начальным условием $\Gamma_N(z=0, \mathbf{r}; \omega_d) = 1$ и цепочкой граничных условий

$$y_{n+1}(z_n) = y_n(z_n), \quad n=1, \dots, N, \quad (9)$$

где $y_n(z)$ - функция $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$ на n -ом участке.

Перейдем к решению развернутой системы уравнений (8). Рассмотрим с этой целью произвольный n -й участок:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ia \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U_N(z_n, \mathbf{r}) \right) \Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d) = 0. \quad (10)$$

На этом участке потенциал U_N зависит от координаты z_n как от параметра,

$$U_N(z, \mathbf{r}) = b(z)\mathbf{r}^2 \equiv b_n \mathbf{r}^2, \quad \text{где}$$

$$b_n = (4\alpha_p)^{-1} \rho(z_n) \sigma_s(z_n) k^2. \quad (11)$$

Таким образом, каждое из уравнений (10) является параболическим уравнением в частных производных с кусочно-постоянным по z потенциалом. Будем искать решение n -го уравнения на интервале $[z_{n-1}, z_n]$ в виде

$$\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f(z)} \exp[g(z) \mathbf{r}^2]. \quad (12)$$

Такая форма искомого решения обусловлена квадратичностью потенциала по \mathbf{r} . Из (10) и (12) вытекают следующие уравнения для введенных функций $f(z)$ и $g(z)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f(z)} \frac{df(z)}{dz} + 4iag(z) &= 0, \\ \frac{dg(z)}{dz} + 4iag^2(z) + b_n &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим сначала второе уравнение из системы (13), являющееся стандартным уравнением Риккати. Пусть $g_n = g(z_n)$, тогда для всех n решение этого уравнения с начальным условием $g(z_{n-1}) = g_{n-1}$, вытекающим из (9), следующее:

$$g(z) = \frac{g_{n-1} - (4ia/b_n)^{-1/2} \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1}))}{1 + (4ia/b_n)^{1/2} g_{n-1} \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1}))}, \quad (14)$$

откуда при $z = z_n$ получаем

$$g_n = \frac{g_{n-1} - (4ia/b_n)^{-1/2} \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n} \Delta_n)}{1 + (4ia/b_n)^{1/2} g_{n-1} \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n} \Delta_n)}. \quad (15)$$

В свою очередь, функция $f(z)$ находится из (13) с помощью квадратуры с начальным условием $f(z_{n-1}) = f_{n-1}$, где f_{n-1} - значение функции $f(z)$ при $z = z_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{f_{n-1}} &= \cos(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1})) + \\ &+ \sqrt{4ia/b_n} g_{n-1} \sin(\sqrt{4iab_n}(z - z_{n-1})). \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда при $z = z_n$ найдем

$$\begin{aligned} f_n &= \left[\cos(\sqrt{4iab_n} \Delta_n) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{4ia/b_n} g_{n-1} \sin(\sqrt{4iab_n} \Delta_n) \right] f_{n-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Итак, функция когерентности $\Gamma_N(z, \mathbf{r}; \omega_d)$ при $z = z_N = L$ описывается выражением

$$\Gamma_N(z_N, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f_N} \exp(g_N \mathbf{r}^2), \quad (18)$$

при этом последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, $1 < n \leq N$, определяются из рекуррентных соотношений (14) и (16), а также начальных условий $f_0(z=0) = 1$ и $g_0(z=0) = 0$. В частности, в точке приема, когда $\mathbf{r} = 0$ и $z = L$, имеем

$$\Gamma_N(L, \mathbf{r}; \omega_d) = \frac{1}{f_N(z_N)}. \quad (19)$$

3. Функция Грина

Пусть T_1 - время распространения фронта импульса, а сам импульс заполнен монохроматической волной с частотой ω . Тогда функция импульсного отклика (функция Грина) в точке наблюдения с координатами $z=L$ и $\mathbf{r}=0$ имеет следующий вид

$$G_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega_d(t - T_1))}{f_N(\omega, \omega_d)} d\omega_d, \quad (20)$$

при этом функция $f_N = f_N(\omega, \omega_d)$ зависит как от разностной частоты ω_d (переменной интегрирования), так и от частоты ω монохроматического импульса (зависимость в функции Грина от ω здесь и ниже опущена).

Из рекуррентного соотношения (16) следует

$$\begin{aligned} f_N &= \prod_{n=1}^{N-1} \left[\cos(\sqrt{4iab_n} \Delta_n) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{4ia/b_n} g_{n-1} \sin(\sqrt{4iab_n} \Delta_n) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Допустим далее, что функция - гладкая (резкие границы и разрывы концентрации отсутствуют). Тогда из (14) следует

$$\operatorname{tg}(\varphi_n) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_{n-1}) - \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n \Delta_n})}{1 + \operatorname{tg}(\varphi_{n-1}) \operatorname{tg}(\sqrt{4iab_n \Delta_n})},$$

где $\operatorname{tg}(\varphi_n) = \sqrt{4ia/b_n} g_n$. Видно, что

$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \sqrt{4ia/b_n} \Delta_n$ и, следовательно,

$$\varphi_N = -\sum_{n=1}^N \sqrt{4iab_n \Delta_n}. \text{ Поэтому}$$

$$g_n = -\frac{1}{\sqrt{4ia/b_n}} \operatorname{tg} \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{4iab_j \Delta_j} \right). \quad (22)$$

Подставляя это выражение в соотношение (17), найдем после упрощений

$$f_N = \cos \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{4iab_n \Delta_n} \right). \quad (23)$$

Поскольку $ab_n = (\rho_n \sigma_n \omega_d) (8\alpha_p c)^{-1}$, где $\rho_n = \rho(z_n)$ и $\sigma_n = \sigma_s(z_n)$, то искомую функцию Грина получим в виде

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega_d(t-T_1))}{\cos \left(\sqrt{i\omega_d} \sum_{n=1}^N \Delta_n \sqrt{(\rho_n \sigma_n) / (2\alpha_p c)} \right)} d\omega_d. \quad (24)$$

Рассмотрим выражение

$$\tau^{1/2} = \sum_{n=1}^N \Delta_n \sqrt{(\rho_n \sigma_n) / (2\alpha_p c)}.$$

Сумма в его правой части при $N \rightarrow \infty$ переходит в интеграл

$$\tau^{1/2} = (2\alpha_p c)^{-1/2} \int_0^L \sqrt{\rho(z) \sigma_s(z)} dz. \quad (25)$$

Тогда

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega_d(t-T_1))}{\cos \sqrt{i\omega_d} \tau} d\omega_d.$$

Используя замену $\omega_d = is$, получим искомое выражение для функции Грина, формально совпадающее с известным решением уравнения Исимару [1] для однородных рассеивающих сред

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[s(t-T_1)]}{\operatorname{ch} \sqrt{s} \tau} ds. \quad (26)$$

Это выражение зависит от двух параметров T_1 и τ . Первый из них характеризует среднее время прихода импульса и равен отношению длины пути L к скорости света c . Второй описывает уширение импульса. Приведем еще одно представление для функции Грина

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i \tau} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[\eta(t-T_1)/\tau]}{\operatorname{ch} \sqrt{\eta}} d\eta. \quad (27)$$

Здесь

$$T_1 = L/c, \quad \tau = \frac{1}{2\alpha_p c} \left(\int_0^L \sqrt{\rho(z) \sigma(z)} dz \right)^2. \quad (28)$$

Из (26) найдем формулу для функции Грина, удобную для расчета на ЭВМ. Суммируя вычеты в нулях функции $\operatorname{ch} \sqrt{\eta}$, расположенных в правой полуплоскости, получим

$$G(t) = \frac{\pi}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \times \exp \left(-\frac{1}{4} \pi^2 (2n+1)^2 \frac{t-T_1}{\tau} \right). \quad (29)$$

Алгоритм вычисления по этой формуле может быть легко запрограммирован.

Полученные формулы (28) и (29) отличаются от известного результата Исимару [1] тем, что они справедливы для неоднородных сред.

4. Физическая интерпретация

Импульсу с заданной временной зависимостью $I_i(t)$ на выходе из среды будет отвечать импульс, описываемый выражением

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt' I_i(t') \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[s(t-t'-T_1)]}{\operatorname{ch} \sqrt{s} \tau} ds. \quad (30)$$

Пусть стартовый импульс достиг плоскости $z=0$ в момент времени $t=0$. Распространяясь в рассеивающей среде, он достигнет плоскости $z=L$ и в этом месте будет иметь форму $I(t)$. Проанализируем параметры этого импульса. С этой целью определим значения его первых трех моментов $\langle t^n \rangle$:

$$\langle t^n \rangle = \int_0^{\infty} t^n I(t) dt, \quad n=0, 1, 2.$$

Нулевой момент соответствует полной энергии импульса, первый момент описывает среднюю

длительность распространения излучения до плоскости $z=L$, а второй момент связан со среднеквадратичным размером импульса. При этом примем, не ограничивая общности, что стартовый импульс имеет запасенную энергию, по величине численно равную единице. Интересующие нас моменты будем отсчитывать от T_1 :

$$\langle (t - t' - T_1)^n \rangle = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{\text{ch} \sqrt{s\tau}} \Big|_{s=0} \quad (31)$$

С учетом допущения о единичной энергии стартового импульса при $n=0$ для нулевого момента найдем $\langle 1 \rangle_L = 1$, что соответствует принятой модели распространения излучения без поглощения. Далее, из (31) получим

$$\langle (t - T_1) \rangle_L = \frac{1}{2} \tau + \langle t' \rangle_0, \quad (32)$$

откуда следует, что средний момент прихода импульса равен $T_1 + \tau/2$ (с учетом первого момента стартового импульса $\langle t' \rangle_0$).

Наконец, при $n=2$ найдем для квадрата средней длительности импульса D_L

$$D_L = \langle (t - T_1)^2 \rangle_L = \frac{1}{6} \tau^2 + D_0, \quad (33)$$

где D_0 - квадрат средней длительности исходного импульса.

Таким образом, к D_0 добавляется величина $\tau^2/6$. Если исходный импульс как функция времени является δ -функцией, $I_i(t') = \delta(t')$, то в результате распространения в рассеивающей среде его средняя длительность составит с учетом (28)

$$\sqrt{D_L} = \tau / \sqrt{6} = \frac{1}{\sqrt{24} \alpha_p c} \left(\int_0^L \sqrt{\rho(z) \sigma_s(z)} dz \right)^2 \quad (34)$$

Видно, что длительность импульса определяется продольной вариацией концентрации рассеивающей среды.

В частном случае однородной вдоль оси z среды (когда $\rho(z)$ и $\sigma(z)$ - постоянны) получим

$$\sqrt{D_L} = (\rho \sigma_s L^2) (\sqrt{24} \alpha_p c)^{-1}, \quad (35)$$

т. е. здесь средняя длительность импульса растет пропорционально квадрату пролетного расстояния L [1].

Рассмотрим конкретный пример с параметрами: длина волны излучения $\lambda = 3 \cdot 10^{-3}$ м, средний диаметр рассеивателей (туман) $D_{cp} = 1 \cdot 10^{-3}$ м, $\alpha_p = \frac{8}{3} (D_{cp}/\lambda)^2$, сечение рассеяния

$\sigma_s = \pi D_{cp}^2 / 2$, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Для концентрации рассеивающих центров примем экспоненциальную зависимость $\rho(z) = \rho_0 \exp(-\mu z)$ с показателем спада $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ м⁻¹. При таком показателе μ концентрация $\rho(z)$ для $L = 10^3$ м упадет в e^2 раз. Тогда

$$\sqrt{D_L} = \frac{3\pi}{16\sqrt{6}} \frac{\lambda^2 \rho_0}{c} \left(\frac{1 - \exp(-\mu L/2)}{\mu} \right)^2 \quad (36)$$

Для $\rho_0 = 1 \cdot 10^6$ м⁻³ и $L = 1 \cdot 10^3$ м получим $\sqrt{D_L} \approx 0,7 \cdot 10^{-3}$ с. Эта же величина в случае неизменной на пролетной базе концентрации ($\mu = 0$) и при тех же значениях остальных параметров составляет $\sqrt{D_L} \approx 1,8 \cdot 10^{-3}$ с.

На рис. 2 приведены результаты численного моделирования эволюции временного импульса $I(t)$ в неоднородной рассеивающей среде с начальным условием $I_i(t) = \delta(t)$ для параметров, приведенных выше. Из рис. 2 видно, что для выбранной зависимости $\rho(z) = \rho_0 \exp(-\mu z)$ уширение импульса имеет место при относительно большой концентрации (малые z), с дальнейшим ростом L форма импульса $I(t)$ остается практически неизменной.

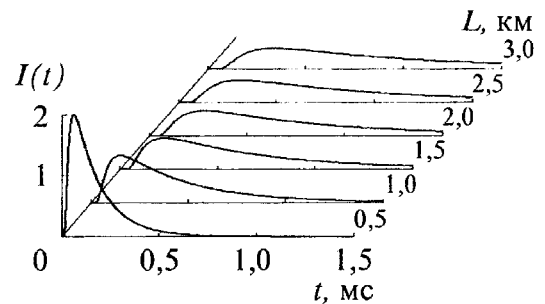


Рис. 2. Эволюция временного импульса в неоднородной рассеивающей среде. Энергия импульса нормирована на 1, кривые отложены от точки $t = T_1$

Из формулы (28) видно, что возможно рассмотрение различных видов зависимости концентрации $\rho(z)$ и сечения рассеяния $\sigma_s(z)$ от текущей координаты z .

5. Заключение

В заключение отметим, что развитием предложенного аппроксимационного подхода при изучении процессов, влияющих на временное затягивание электромагнитных импульсов, может быть учет затухания излучения при его распространении в неоднородной поглощающей среде [2,3]. Математической основой при этом послужит учет в параболическом уравнении (3) слагаемого, связанного с поглощением, при этом коэффициенты в уравнении могут зависеть от продольной координаты z . Отметим также, что анализ эволюции формы временного импульса при его распространении дает возможность судить о пространственном распределении характеристик рассеивающей среды вдоль оси распространения.

Литература

1. A. Ishimaru. Proc. IEEE. 1977, **65**, pp. 1030-1061.
2. S.M. Flatte. Proc. IEEE. 1983, **71**, pp. 1267-1294.
3. С.Н. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. Москва, Наука, 1966, 404 с.

Time Characteristics of Impulse Passing through Non-Homogeneous and Non-Dissipative Medium

A. A. Galuza, A. S. Mazmanishvili

Approximate analogue of Ishimaru's equation for non-homogeneous media is proposed. The comparison of calculated time pulses of scattered radiation in homogeneous and non-homogeneous models is made. Time scales influencing the form of time pulses of scattered radiation are pointed.