

Нелинейные волны в пылевой самогравитирующей плазме

П.В. Блюх, В.В. Ярошенко

Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины
310002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4

Статья поступила в редакцию 1 октября 1997 г.

Исследуется нелинейная эволюция электростатических волн в пылевой самогравитирующей плазме. Показано, что в самогравитирующей плазме наряду с уединенным импульсом электрического потенциала может возникать нелинейная волна гравитационного потенциала, имеющая более высокую скорость распространения.

Досліджується нелінійна еволюція електростатичних хвиль в пиловій самогравітуючій плазмі. Показано, що в самогравітуючій плазмі поряд з поодиноким імпульсом електричного потенціалу може виникати нелінійна хвиля гравітаційного потенціалу, яка має більшу швидкість поширення.

Имеется большое число публикаций, в которых рассматриваются волновые процессы в пылевой плазме (см., например, библиографию в обзорах [1,2]). Однако исследование коллективных свойств плазмы с учетом гравитационного взаимодействия образующих ее пылевых частиц (так называемой самогравитирующей плазмы) ранее не проводилось. Но макрочастицы в пылевой плазме взаимодействуют друг с другом не только через электрические, но и через гравитационные поля, которые являются в той же мере дальнедействующими. В таких условиях существенно меняется диэлектрическая проницаемость плазмы, появляются новые ветви волн, изменяются критерии их устойчивости и условия распространения [3]. Картина еще более усложняется, если в рассмотрение включить нелинейные эффекты. В данной статье исследуется нелинейная эволюция электростатических волн в пылевой самогравитирующей плазме. В частности, показано, что в самогравитирующей плазме наряду с уединенным импульсом электрического потенциала может возникать нелинейная волна гравитационного потенциала, имеющая более высокую скорость распространения.

1. Пылеакустические солитоны

Рассмотрим сначала распространение электромагнитных волн в пылевой плазме без учета гравитационного взаимодействия между частицами. Наиболее интересные особенности связаны с распространением низкочастотных продольных волн, о которых и пойдет речь ниже. В простейшей трехкомпонентной плазменной среде, в состав которой входят электроны (e), ионы (i) и один сорт пылинок (d), возникают низкочастотные электромагнитные волны, так называемые пылеакустические волны [3]. Собственная частота этих

волн определяется температурой ионов T_i и массой пылинок m_d

$$\omega = k V_{ph,d} = k \beta \sqrt{T_i / m_d}, \quad (1)$$

где коэффициент $\beta = \frac{q_d}{q_i} \left(\frac{n_{od}}{n_{oi}} \right)^{1/2}$ зависит от отношений зарядов ионной (q_i) и пылевой (q_d) компонент, а также их невозмущенных плотностей n_{oi} и n_{od} .

В дальнейшем мы будем рассматривать пылеакустические волны с фазовыми скоростями $V_{ph} = \omega / k \sim V_{ph,d}$, и условие $V_{ph} \ll V_{Ti}$, а тем более $V_{ph} \ll V_{Te}$ всегда выполняется (V_{Ti} , V_{Te} — тепловые скорости ионов и электронов). Это означает, что плотности микрочастиц плазмы n_e и n_i определяются распределениями Больцмана

$$\begin{aligned} n_e &= n_{0e} \exp(e\psi_E / T_e), \\ n_i &= n_{0i} \exp(-e\psi_E / T_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Что же касается плотности пылинок n_d , то ее связь с ψ_E должна быть найдена из уравнений движения и непрерывности, которые не будут линеаризовываться:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_d}{\partial t} + V_d \frac{\partial V_d}{\partial x} &= \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \psi_E}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_d V_d) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь приняты обычные обозначения: V_d - возмущения скорости, n_d - возмущения плотности частиц, индекс d соответствует пылинкам с зарядом $q_d < 0$. Для простоты рассматривается одномерная задача.

Система уравнений (3) для трех переменных n_d, V_d, Ψ_E замыкается уравнением Пуассона, которое также является нелинейным:

$$\frac{\partial^2 \Psi_E}{\partial x^2} = -4\pi e (n_i(\Psi_E) - n_e(\Psi_E) - q_d n_d / e). \quad (4)$$

Полученная система в частных производных допускает решения, в которых x и t входят только в комбинации $\xi = x - ut$, где u - постоянная величина. Такие решения описывают волны, распространяющиеся со скоростью u без изменения своей формы.

Переходя в (3) от x и t к новой переменной ξ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые легко решаются относительно n_d :

$$n_d = n_{0d} \frac{u}{u - V_d} = n_{0d} u (u^2 + 2q_d \Psi_E / m_d)^{-1/2} \quad (5)$$

(уравнения (3) проинтегрированы с граничными условиями: при $\xi \rightarrow \infty$ $n_d = n_{0d}, V_d = 0, \Psi_E = 0$). Далее, умножив (4) на $d\Psi_E/d\xi$, после интегрирования находим уравнение для Ψ_E в виде «интеграла энергии»

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi_E}{d\xi} \right)^2 + \Phi_s(\Psi_E, u) = 0, \quad (6)$$

где $\Phi_s(\Psi_E, u)$ - потенциал Сагдеева [4], определяемый выражением

$$\begin{aligned} \Phi_s(\Psi_E, u) = & 4\pi \left\{ n_{0i} T_i \left[1 - \exp(-e\Psi_E / T_i) \right] + \right. \\ & + n_{0e} T_e \left[1 - \exp(e\Psi_E / T_e) \right] + \\ & \left. + n_{0d} m_d u^2 \left[1 - \left(1 + 2q_d \Psi_E / (u^2 m_d) \right)^{1/2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Уравнением (6) задача об определении формы нелинейной пылеакустической волны $\Psi_E(\xi)$ сводится к квадратурам [4]. Нас интересуют решения (6), убывающие до нуля вместе со своими производными при $\xi \rightarrow \infty$. Они носят название уединенных волн или солитонов. В дальнейшем, при рассмотрении нелинейных волн в самогравитирующей нейтральной среде, придется встретиться с уравнениями, подобными (6). Для их качественного анализа потребуются некоторые приближен-

ные оценки, которые удобно продемонстрировать на примере сравнительно простого уравнения (6).

Рассматривая волны конечной амплитуды, разложим $\Phi_s(\Psi_E, u)$ по степеням Ψ_E . Низшей степенью этого разложения является Ψ_E^2 (член $\sim \Psi_E$ исчезает в силу условия квазинейтральности). Если ограничиться только этим первым членом, то

$$\left(\frac{d\Psi_E}{d\xi} \right)^2 = A \Psi_E^2, \text{ или } \frac{d\Psi_E}{d\xi} = \pm \sqrt{A} \Psi_E. \quad (7)$$

Здесь $A = \frac{\omega_{pi}^2}{V_{Ti}^2} \left(1 + \frac{n_{0e} T_i}{n_{0i} T_e} \right) - \frac{\omega_{pd}^2}{u^2}$, ω_{pd} , ω_{pi} -

плазменные частоты пылинок и ионов, V_{Ti} - тепловая скорость ионной компоненты. Вторым членом в скобках будем далее пренебрегать, так как за счет отрицательного заряда пылинок $n_{0e} < n_{0i}$ (или даже $n_{0e} \ll n_{0i}$, что, как правило, имеет место в реальных пылевых средах), а T_e обычно превышает T_i . Тогда коэффициент A можно записать в таком компактном виде

$$A = (M^2 - 1) / (\lambda_{Di}^2 M^2), \quad (8)$$

где введены обозначения: $M = u/V_{ph,d}$ - число Маха, $\lambda_{Di} = V_{Ti}/\omega_{pi}$ - ионный дебаевский радиус, $V_{ph,d}$ - фазовая скорость пылеакустической волны (1).

Уравнение (7) имеет два решения

$$\Psi_{E\pm} = \Psi_{E0} \exp(\pm \sqrt{A} \xi). \quad (9)$$

Казалось бы, в этом приближении, при котором (6) сводится к линейному уравнению, никаких параметров солитона определить не удастся. Однако это не так, поскольку на «хвостах» солитона при $\xi \rightarrow \pm\infty$ Ψ_E становится исчезающе малым, и линейную аппроксимацию можно рассматривать как асимптоту точного решения. Прежде всего, немедленно определяется условие, которому должна удовлетворять скорость u . Оно вытекает из требования $A > 0$ (в противном случае - (9) будет представлять не убывающие в обе стороны, а осциллирующие решения). Следовательно, $M^2 > 1$, или $u > V_{ph,d}$, то есть солитон должен быть сверхзвуковым. Легко оценить и его ширину Δ , поскольку можно ожидать, что характерный масштаб возмущений Ψ_E остается неизменным при всех значениях ξ . Согласно (7),

$$\Delta \sim 1/\sqrt{A} \approx \lambda_{Di} M / \sqrt{M^2 - 1}.$$

Видно, что ширина солитона уменьшается с ростом M . Для не очень быстрых солитонов, положив $M^2 - 1 = \mu^2$, ($\mu^2 \ll 1$), получим

$$\Delta \sim \lambda_{Di} / \mu. \quad (10)$$

В дальнейшем μ будет рассматриваться как второй малый параметр, наряду с основным $e\Psi_E / T_e \sim q_d \Psi_E / T_d$.

Перейдем к определению амплитуды солитона - максимальному значению $\Psi_{E\max}$, которое, если ориентироваться на симметричные асимптотики (9) достигается при $\xi = 0$. Первое из решений (9) описывает асимптотику $\Psi_E(\xi)$ при $\xi \rightarrow -\infty$, а второе - при $\xi \rightarrow +\infty$. В области малых ξ , где Ψ_E достигает максимума, нелинейные эффекты проявляются сильнее всего, и оба решения сшиваются друг с другом (рис. 1).

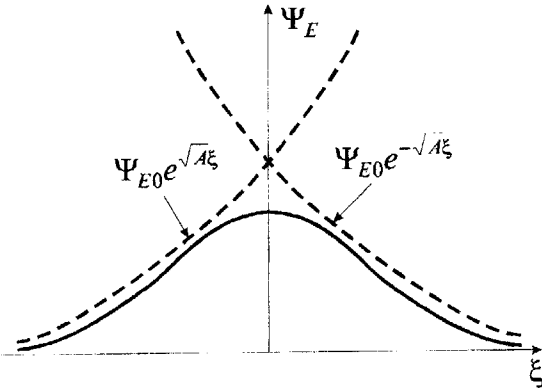


Рис. 1. Образование пылеакустического солитона

Приближенно можно считать, что $\Psi_{E\max} \sim \Psi_{E\pm}(0) = \Psi_{E0}$, но само значение $\Psi_{E\max}$ удастся определить, только удержав следующий член в разложении $\Phi_s(\Psi_E, u)$ по степеням Ψ_E :

$$\left(\frac{d\Psi_E}{d\xi}\right)^2 = A\Psi_E^2 + B\Psi_E^3. \quad (11)$$

Здесь $B = 4\pi \left[\frac{q_d^3 n_{0d}}{2u^4 m_d^2} - \frac{e^3}{6} \left(\frac{n_{oi}}{T_i^2} - \frac{n_{oe}}{T_e^2} \right) \right]$, или с теми же упрощениями, которые использовались при выводе (8), получим

$$B = \left(\frac{3}{M^4} - 1 \right) / (24\pi e n_{oi} \lambda_{Di}^4).$$

Поскольку в точке максимума $d\Psi_E/dx = 0$, амплитуда солитона определится из условия $\Phi_s(\Psi_{E\max}, u) = 0$:

$$\Psi_{E\max} = -A/B = 24\pi e n_{oi} \lambda_{Di}^2 M^2 \times (M^2 - 1) / (M^4 - 3) \approx -12\pi \mu^2 e n_{oi} \lambda_{Di}^2. \quad (12)$$

Обратим внимание на то, что пылезвуковой солитон в этом приближении является отрицательным, в отличие от ионно-звукового солитона, который имеет вид положительного импульса электрического потенциала Ψ_E [4]. Определим еще величину полного заряда q_{tot} , переносимого солитоном

$$q_{tot} \approx \Psi_{E\max} \Delta \approx -12\pi \mu e n_{oi} \lambda_{Di}^3 = -12\pi \mu q_d n_{0d} \lambda_{Di}^3.$$

По порядку величины полный заряд равен заряду одного из компонентов пыле-ионной плазмы в объеме дебаевской сферы с учетом малого параметра μ , который входит в безразмерный множитель. С ростом μ амплитуда солитона $\Psi_{E\max}$ и полный заряд q_{tot} возрастают.

Наши качественные оценки Δ и $\Psi_{E\max}$ легко проверить, сравнив их с теми значениями, которые получаются из точного решения (6) при двухчленном представлении $\Phi_s(\Psi_E, u)$:

$$\Psi_E = -\frac{A \operatorname{sech}^2(\sqrt{A}\xi/2)}{B}. \quad (13)$$

Как и следовало ожидать, асимптотика (13) $\Psi_E|_{\xi \rightarrow \mp\infty} = \Psi_{E0} \exp(\pm\sqrt{A}\xi)$, где $\Psi_{E0} = -A/B$, совпадает с найденным ранее решением (9), так же как и максимальное значение

$$\Psi_{E\max} = \Psi_E|_{\xi=0} = \Psi_{E0}.$$

2. Нелинейные волны в самогравитирующей плазме

Если включить в рассмотрение силы самогравитации, задача о нелинейных волнах существенно усложняется. Трудности возникают уже при формулировке основных уравнений, поскольку не существует аналога условию квазинейтральности $\sum_{\alpha} n_{0\alpha} q_{\alpha} = 0$ для плотностей масс. В дальнейшем мы будем считать, что равновесное значение гравитационного потенциала $\Psi_{0G} \neq 0$, но этот постоянный потенциал не оказывает влияния на движение частиц под действием осциллирующих

полей. Поэтому в уравнении Пуассона для возмущений гравитационного потенциала Ψ_G

$$\frac{d^2\Psi_G}{dx^2} = -4\pi G(n_d m_d + n_i m_i) \quad (14)$$

(G - гравитационная постоянная) величины n_d и n_i должны рассматриваться не как полные плотности частиц, а как их отклонения от равновесных значений (здесь мы еще более упростим модель пылевой плазмы, считая, что все электроны поглощены пылинками, и плазма состоит только из ионов и пылинок одного сорта). С учетом этого замечания распределение Больцмана для ионов записывается в виде

$$n_i = n_{0i} \left\{ \exp\left[(-e\Psi_E + m_i\Psi_G)/T_i\right] - 1 \right\}. \quad (15)$$

К выражениям (14) и (15) надо добавить нелинейные уравнения движения, непрерывности и уравнение Пуассона для Ψ_E :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_d}{\partial t} + V_d \frac{\partial V_d}{\partial x} &= \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \Psi_E}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_G}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_{0d} + n_d)V_d &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Psi_E}{\partial x^2} &= -4\pi e(n_i - q_d n_d/e). \end{aligned} \quad (16)$$

Невозмущенная плотность пылинок n_{0d} сохраняется в уравнении непрерывности, но отсутствует в уравнении Пуассона в силу условия квазинейтральности плазмы.

Полная система уравнений в частных производных (14)-(16) сводится после введения $\xi = x - ut$ к системе двух обыкновенных нелинейных уравнений для потенциалов Ψ_E и Ψ_G :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_E}{d\xi^2} &= W_E(\Psi_E, \Psi_G, u), \\ \frac{d^2\Psi_G}{d\xi^2} &= W_G(\Psi_E, \Psi_G, u), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} W_E(\Psi_E, \Psi_G, u) &= \\ &= 4\pi \left\{ q_d n_{0d} \left[1 + \frac{2}{u^2} \left(\frac{q_d}{m_d} \Psi_E + \Psi_G \right) \right]^{-1/2} - \right. \\ &\left. - e n_{0i} \exp\left[(-e\Psi_E + m_i\Psi_G)T_i^{-1}\right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_G(\Psi_E, \Psi_G, u) &= \\ &= -4\pi G \left\{ m_d n_{0d} \left[\left[1 + \frac{2}{u^2} \left(\frac{q_d}{m_d} \Psi_E + \Psi_G \right) \right]^{-1/2} - 1 \right] + \right. \\ &\left. + m_i n_{0i} \exp\left[(-e\Psi_E + m_i\Psi_G)T_i^{-1}\right] - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Пока не удалось получить «интеграл энергии» системы (17), поэтому ее аналитическое исследование еще не проведено. Разложение W_E и W_G по степеням Ψ_E и Ψ_G также не приводит непосредственно к желаемому результату ввиду наличия перекрестных членов.

Если исключить самогравитацию, считая $G = 0$, $\Psi_G = 0$, то (17) сводится к рассмотренному выше уравнению (6). С другой стороны, можно исключить электрическое взаимодействие, считая $q_d = 0$, $e = 0$, $\Psi_E = 0$. Таким образом получается нелинейное уравнение, описывающее волновые процессы в двухкомпонентной нейтральной среде с теми же упрощениями, которые использовались ранее (плотность легкой составляющей распределена по Больцману, тепловые скорости тяжелых частиц не учитываются). В этом случае «интеграл энергии» имеет вид:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi_G}{d\xi} \right)^2 + \Phi_G(\Psi_G, u) = 0. \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_G(\Psi_G, u) &= 4\pi G \left\{ m_d n_{0d} u^2 \left[\left(1 + \frac{2}{u^2} \Psi_G \right)^{1/2} - 1 \right] + \right. \\ &\left. + m_i n_{0i} V_{Ti}^2 \exp\left[m_i \Psi_G \frac{1}{T_i} - 1 \right] - \Psi_G (m_d n_{0d} + m_i n_{0i}) \right\}. \end{aligned}$$

Дальнейший анализ проводится точно также как и при исследовании уравнения (6).

Разложим $\Phi_G(\Psi_G, u)$ по степеням Ψ_G до членов $\sim \Psi_G^3$ включительно:

$$\left(\frac{d\Psi_G}{d\xi} \right)^2 = A_G \Psi_G^2 + B_G \Psi_G^3, \quad (19)$$

$$\text{где } A_G = -\frac{\omega_{Gi}^2}{V_{Ti}^2} + \frac{\omega_{Gd}^2}{u^2}, \quad B_G = -\frac{\omega_{Gi}^2}{3V_{Ti}^4} - \frac{\omega_{Gd}^2}{u^4},$$

ω_{Gi} и ω_{Gd} - джисовские частоты легкой и тяжелой компонент среды.

Решение уравнения (19),

$$\Psi_G = -\frac{A_G \sec h^2(\sqrt{A_G} \xi/2)}{B_G}, \quad (20)$$

описывает солитон гравитационного потенциала, если $A_G > 0$. Отсюда вытекает условие, которому должна удовлетворять скорость u нелинейной волны:

$$u < V_{Ti} \frac{\omega_{Gd}}{\omega_{Gi}} \equiv \left(\frac{T_i n_{0d} m_d}{n_{0i} m_i} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Выражение в правой части неравенства равно скорости очень низкочастотного звука - $V_{ph,s}$, относительно которой следует сделать некоторые замечания. Прежде всего, видно, что обычное правило для определения фазовой скорости «гибридных звуков» (ионно-звуковых и пылезвуковых волн), - в формулу для скорости необходимо подставлять температуру легкого компонента, а массу - тяжелого, - здесь не действует. Хотя температура T относится, как и должно быть, к легким частицам, но роль массы играет величина $m_i^2 n_{0i} / (m_d n_{0d})$, зависящая от масс и плотностей обоих компонентов. Это объясняется тем, что при электрическом взаимодействии характеристические частоты ω_{pi} и ω_{pd} обратно пропорциональны $\sqrt{m_i}$ и $\sqrt{m_d}$, а соответствующие величины ω_{Gi} и ω_{Gd} для гравитационного взаимодействия прямо пропорциональны $\sqrt{m_i}$ и $\sqrt{m_d}$.

Поскольку в наших расчетах инерция легких частиц не принималась во внимание, необходимо, чтобы было выполнено условие $\omega^2 \ll k^2 V_{Ti}^2$, или $V_{ph,s} \ll V_{Ti}$. Отсюда вытекает следующее требование к параметрам пыли:

$$\frac{n_{0d} m_d}{n_{0i} m_i} \ll 1, \quad (22)$$

то есть пылинки должны быть по возможности легкими, а ионы - тяжелыми. Рассмотрим для определенности в качестве ионов атомы кислорода ($m_i \sim 2,7 \cdot 10^{-23}$ г) и рыхлые пылинки с $\rho_b \sim 0,5$ г/см³ ($m_d \sim 2 \cdot 10^{-18} R^3$ [мкм]). Тогда условие (22) будет выполнено, если $n_{0d}/n_{0i} \ll 10^{-5}/R^3$. Для субмикронных пылинок это неравенство можно считать достаточно реалистическим.

Еще одно неравенство, о котором тоже следует помнить, связано с заменой полного потенциала $\Phi_G(\Psi_G, u)$ его степенным разложением (19). Для

этого требуется, чтобы безразмерный потенциал Ψ_G/V_{Ti}^2 был мал, то есть

$$m_i \Psi_G / T \ll 1. \quad (23)$$

Поскольку максимальное значение Ψ_G равно

$$\Psi_{Gmax} = |A_G/B_G| \cong \frac{3}{4} V_{Ti}^2 \left(\frac{V_{ph,s}^2}{u^2} - 1 \right),$$

условие применимости решения (20) сводится к неравенству $u \leq V_{ph,s}$, что не противоречит (21).

Таким образом, наиболее жестким условием является неравенство (22). Если же нарушается (23), то уравнение (18) должно исследоваться с полной потенциальной функцией $\Phi_G(\Psi_G, u)$.

Отметим, что в отличие от электрического солитона (13), нелинейное решение для Ψ_G (20) имеет вид положительного импульса гравитационного потенциала, который распространяется со скоростью, заметно превышающей фазовую скорость пылеакустической волны (1). Действительно, $V_{ph,s}/V_{ph,d} \sim m_d q_i / q_d m_i \gg 1$ - отношение скоростей двух типов возмущений в космической плазме, как правило, значительно превышает единицу.

Полученные решения для нелинейных волн в чисто плазменной и нейтральной самогравитирующей среде являются лишь первым шагом в исследовании нелинейных волн в пылевой самогравитирующей плазме. Следующий этап - анализ полной системы нелинейных уравнений (17), соответствующей одновременному учету двух типов взаимодействий между частицами плазмы, - авторами предполагается выполнить в дальнейшем.

Литература

1. C.K. Goertz. Rev. Geophys. 1989, 27, p. 271-292.
2. D.A Mendis and M. Rosenberg. Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1994, 32, p. 419-463.
3. П.В. Блюх, В.В. Ярошенко. Известия вузов. Радиофизика. 1988, 31, №7, с. 778-784.
4. F. Verheest. Planetary Space Sci. 1992, 40, p. 1-6.

Nonlinear Waves in Dusty Self-Gravitational Plasma

P.V. Bliokh, V.V. Yaroshenko

The non-linear evolution of electrostatic waves in a dusty and self-gravitational plasma is investigated. It is shown, that in self-gravitational plasma along with a solitary impulse of an electrical potential there can be a non-linear wave of a gravitational potential, which has speed of propagation higher than electrical one.