

Синтез отражательных решеток с произвольным профилем штриха

Л.Г. Величко, Ю.К. Сиренко

*Институт радиофизики и электроники НАН Украины
310085, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12*

Тел.: (0572) 44 84 75, Факс (0572) 44 11 05, E-mail: sirenko@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 30 сентября 1997 г.

Представлены новые подходы к решению задачи синтеза отражательных решеток с не полностью заданными в полосе частот или (и) в интервале углов прихода плоской волны дифракционными характеристиками. Они базируются на идее квазилинеаризации интегральных соотношений теории потенциала и позволяют получать удовлетворительные результаты в длинноволновом и, частично, в резонансном (по отношению к основным характерным размерам решеток) диапазонах. Работоспособность соответствующих алгоритмов подтверждена результатами численных экспериментов.

Подано нові підходи до розв'язання задачі синтезу відбивних ґраток з дифракційними характеристиками, що не повністю задані в смузі частот та (або) в інтервалі кутів падіння плоскої хвилі. Вони базуються на ідеї квазілінеаризації інтегральних співвідношень теорії потенціалу та дозволяють одержувати задовільні результати в довгохвильовому та, частково, в резонансному (відносно основних характерних розмірів ґраток) діапазонах. Працездатність відповідних алгоритмів підтверджено результатами обчислювальних експериментів.

1. Использование на практике широкого спектра эффектов и явлений, обнаруженных при исследовании дисперсионных свойств решеток, в значительной степени ограничивается сложностью первичного анализа, учитывающего все функционально значимые характеристики отдельных элементов проектируемого устройства и позволяющего оценить эффективность работы системы в целом. Эта общая проблема модельного синтеза естественным образом разбивается на ряд частных, более простых, решаемых практически независимо: проблему электродинамического моделирования системы с аналитическим согласованием вкладов рассеивающих неоднородностей с существенно отличающимися волновыми размерами, анализ и параметрическую оптимизацию электродинамической модели, формирование стандартного пакета входных данных для синтеза дисперсионных элементов (например, решеток) и решение соответствующих обратных задач.

В работе представлены новые численные алгоритмы решения обратных граничных задач для идеально отражающей дифракционной решетки с произвольным профилем. Результаты ориентированы на решение ключевых проблем модельного синтеза ряда устройств резонансной квазиоптики: эффективно поглощающих и перерассеивающих покрытий, плоских диаграммообразующих устройств, открытых дисперсионных резонаторов с существенно разреженным спектром [1]. Анализ литературных источников [2] показал отсутствие надежных рекомендаций для продвижения в этом

направлении и обусловил тем самым выбор темы исследования. Решетки очень редко попадают в поле зрения специалистов, занимающихся обратными задачами. Отдельные значительные результаты здесь (см., например, работу [3]) получены в рамках слишком тяжеловесных (по объему вычислений и требуемым машинным ресурсам), обремененных многими ограничениями подходов и не могут быть эффективно использованы при решении разнообразных прикладных задач.

2. Пусть решетка (см. фрагмент на рис. 1, структура однородна в направлении x) помещена в поле плоской E -поляризованной волны $U^p(y, z) = \exp[i(\Phi_p y - \Gamma_p z)]$. Здесь и далее: $\Phi_p = p + \Phi$, $\Phi = \kappa \sin \varphi$, $\Gamma_p = (\kappa^2 - \Phi_p^2)^{1/2}$, $\text{Re} \Gamma_p \geq 0$, $\text{Im} \Gamma_p \geq 0$, $p = 0, \pm 1, \dots$, κ - безразмерный частотный параметр, характеризующий отношение истинной длины периода решетки к длине волны возбуждения, φ - угол прихода первичной волны, S - лежащая в полосе R часть 2π -периодической по y в R^2 границы, (R^2 - плоскость переменных $g = \{y, z\}$, $R = \{g: 0 \leq y \leq 2\pi\}$), $U^p = E_x$ - единственная отличная от нуля компонента вектора напряженности электрического поля. Все процессы рассматриваются в безразмерных пространственно-временных координатах, в которых

длина периода решеток равна 2π , а зависимость от времени определяется множителем $\exp(-ikt)$. Решение $U(y, z)$ прямой задачи дифракции всюду в полосе R вне точек контура S может быть представлено в виде потенциала простого слоя [4,5]

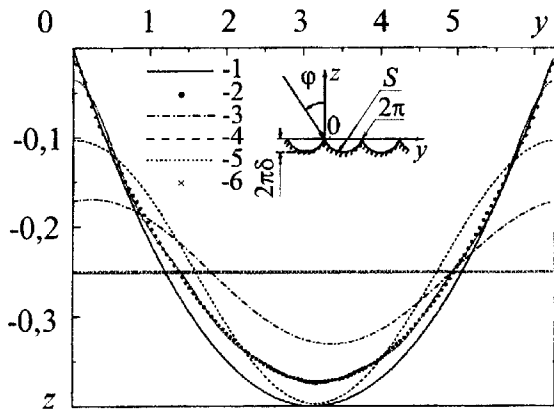


Рис. 1. Геометрия задачи (на фрагменте) и профили контрольной (сплошная линия 1) и синтезированных при различных наборах входных данных (прерывистые линии 2-6) структур. Кривая 2 - $M=1$; 3 - $M=2$; 4 - $M=3$; 5 - $M=11$; 6 - $M=31$. M - число точных значений амплитуд $a_{n,0}, \dots, a_{nM,0}$ дифракционного спектра контрольной структуры, включенных в набор входных данных задачи синтеза

$$U(g) - U^p(g) = - \int_S \mu(g_0) G(g; g_0) dg_0, \quad (1)$$

$$g_0 = \{y_0, z_0\},$$

где непрерывная функция $\mu(g_0)$ является решением граничного сингулярного уравнения

$$\int_S \mu(g_0) G_0(g; g_0) dg_0 = U^p(g), \quad g \in S, \quad (2)$$

а функция Грина G_0 определяется выражением

$$G_0(g; g_0) = -\frac{i}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n^{-1} e^{i[\Phi_n(y-y_0) + \Gamma_n|z-z_0|]}.$$

Пусть контур S описывается однозначной функцией $f(y): f(y) \leq 0$. Используя условие излучения [4]

$$U(g) = U^p(g) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{np} e^{i[\Phi_n y + \Gamma_n z]}$$

(a_{np} - комплексные амплитуды гармоник дифракционного спектра решетки) для зоны отражения $z \geq 0$ и физически очевидное условие отсутствия поля в металле ($U(g) = 0$ при $z < f(y)$), получаем из (1) после несложных преобразований (δ_n^p - символ Кронекера)

$$\begin{cases} a_{np} \\ -\delta_n^p \end{cases} = \frac{i}{4\pi\Gamma_n} \int_0^{2\pi} \eta(y_0) e^{i\Gamma_n f(y_0)} e^{-iny_0} dy_0,$$

$$n = 0, \pm 1, \dots;$$

$$\eta(y_0) = \mu(y_0, f(y_0)) \left[1 + \left(\frac{d}{dy_0} f(y_0) \right)^2 \right]^{1/2} \times \exp(-i\Phi_0 y_0). \quad (3)$$

3. Обратная задача состоит в определении границы S по полю $U(y, z)$, точно или неточно заданному в области $z > 0$ своими комплексными амплитудами $\{a_{np}\}$. Специфика и разнообразие обратных задач электродинамической теории решеток обусловлены, в основном, многовариантностью формирования пакета входных данных (точность вычисления или измерения и количество амплитуд, области изменения параметров κ и φ). В работе [2] мы провели классификацию обратных задач (визуализация, синтез, малопараметрическая оптимизация) и описали наиболее общие подходы к их формально корректной постановке и решению (вопросы существования и единственности, процедуры линеаризации и регуляризации). В [6] на основании уравнений (3) построены эффективные самозамкнутые алгоритмы решения задачи визуализации (восстановления) профилей $f(y)$ в схеме одночастотного (величина κ фиксирована) однопозиционного (величина φ фиксирована) зондирования. При достаточно полных и точных входных данных эти алгоритмы обеспечивают удовлетворительную точность определения $f(y)$ для не очень глубоких структур (глубина профилирования - до двух длин волн) в длинноволновой и средневолновой части диапазона (длина периода решетки - до четырех длин волн). Часть технических приемов, апробированных в [6], будет использована ниже при решении задачи синтеза решетки, реализующей заданные или близкие к заданным значениям амплитуд $a_{np}(\kappa, \Phi)$ в интервалах значений κ и

(или) Φ . В принципиальном плане описанные ниже схемы не меняются при изменении значения p , числа значащих амплитуд (конечное число) и числа варьируемых параметров (κ и Φ , κ или Φ). Изменяются лишь размерность пакета входных данных и размерность (одинарные, парные и т.д.) интегральных уравнений, известной частью для которых эти данные являются. Естественно, формальные изменения необходимо вносить и в описание области определения функций $a_{np}(\kappa, \Phi)$

(отдельные интервалы вариации κ и Φ или их прямое произведение), интегральных операторов и т.д. Учитывая сказанное, мы не будем подробно излагать наиболее общий случай, а ограничимся анализом ситуации, когда n и Φ фиксированы и требуется синтезировать отражательную решетку с профилем $z = f(y)$ такую, что в полосе частот $[\kappa_1, \kappa_2]$ амплитуда n -ой гармоники ее дифракционного пространственного спектра мало отличается от $a_{n0}(\kappa)$, $\text{Re} \Gamma_n(\kappa) > 0$.

4. Первый, общий для двух рассматриваемых вычислительных схем, шаг заключается в следующем. Из второго уравнения системы (3) - уравнения метода нулевого поля, - сохраняя в разложении функций $\exp[i\Gamma_n f(y)]$ в ряды по степеням аргументов только старшие члены, получаем

$$\eta(y, \kappa) \approx 2i\Gamma_0. \quad (4)$$

Подставляя (4) в первое из уравнений (3), приходим к следующей классической нелинейной задаче (n фиксировано)

$$a_{n0}(\kappa) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi\Gamma_n} \int_0^{2\pi} e^{-i[\Gamma_n \hat{f}(y) + ny]} dy, \quad (5)$$

$$\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2],$$

решение которой относительно неизвестной функции $\hat{f}(y)$ - приближения $f(y)$ - требует обращения непрерывного (из $C[0, 2\pi]$ в $C[\kappa_1, \kappa_2]$, C - пространство непрерывных функций) оператора Урысона

$$A[f] = -\frac{\Gamma_0}{2\pi\Gamma_n} \int_0^{2\pi} e^{-i[\Gamma_n f(y) + ny]} dy. \quad (6)$$

Оператор (6) дифференцируем по Фреше [7], его производную в точке $g(y) \in C[0, 2\pi]$ - ограниченный линейный оператор

$$B_g: C[0, 2\pi] \rightarrow C[\kappa_1, \kappa_2].$$

можно представить в виде (см. [7])

$$B_g[f] = \frac{i\Gamma_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i[\Gamma_n g(y) + ny]} f(y) dy.$$

Методом Ньютона-Канторовича сводим задачу (5) к определению $\hat{f}(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(y)$, где

$\{f_m(y)\}$ - последовательность решений линейных задач

$$B_{f_m} [f_{m+1}(y) - f_m(y)] = -A[f_m(y)] + a_{n0}(\kappa), \quad (7)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

или, в упрощенном варианте,

$$B_{f_0} [f_{m+1}(y) - f_m(y)] = -A[f_m(y)] + a_{n0}(\kappa), \quad (8)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Принципиальными для обеспечения сходимости $f_m(y) \rightarrow \hat{f}(y)$ и вычислительной эффективности схем, базирующихся на обращении уравнений (7) или (8), являются требование ограниченности обратимости операторов B_{f_m} и удачный выбор стартового в итерационных процедурах значения $f_0(y)$ [7]. Так как операторы B_{f_m} , имеющие достаточно гладкие ядра, нужными свойствами не обладают, необходим дополнительный шаг, связанный с регуляризацией интегральных уравнений первого рода (7) или (8). Рассмотрим наряду с интегральным оператором

$$B_{f_m}: L_2[0, 2\pi] \rightarrow L_2[\kappa_1, \kappa_2]$$

интегральный оператор

$$B_{f_m}^* [a(\kappa)] = \frac{i}{2\pi} e^{iny} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \Gamma_0 e^{i\Gamma_n f_m(y)} a(\kappa) d\kappa,$$

сопряженный к B_{f_m} . Предполагая, что правая часть в (7) не принадлежит пространству нулей оператора $B_{f_m}^*$, приходим к эквивалентной (7) задаче

$$\begin{aligned} B_{f_m}^* B_{f_m} [f_{m+1}(y) - f_m(y)] &= \\ &= -B_{f_m}^* A[f_m(y)] + B_{f_m}^* [a_{n0}(\kappa)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$0 \leq y \leq 2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ее оператор самосопряжен, положителен и компактен на паре пространств $L_2 \rightarrow L_2$ (пространства функций с интегрируемым квадратом модулей). Все это позволяет ввести в рассмотрение вместо некорректных операторных уравнений первого рода (9) операторные уравнения вто-

рого рода (реализуется известный метод α -регуляризации Лаврентьева [8])

$$\begin{aligned} & [\alpha_m + \mathbf{B}_{f_{m,\alpha}}^* \mathbf{B}_{f_{m,\alpha}}] [f_{m+1,\alpha}(y) - f_{m,\alpha}(y)] = \\ & = -\mathbf{B}_{f_{m,\alpha}}^* \mathbf{A} [f_{m,\alpha}(y)] + \mathbf{B}_{f_{m,\alpha}}^* [a_{n0}(\kappa)], \quad (10) \\ & \alpha_m > 0, \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

решения которых $f_{m,\alpha}(y)$ при $\alpha_m \rightarrow 0$ сходятся по норме соответствующего пространства к $f_m(y)$. Определенная таким образом последовательность $\{f_m(y)\}$ в пределе ($m \rightarrow \infty$) дает искомый профиль $\hat{f}(y)$.

5. Аналогично проводится эквивалентная переформулировка и регуляризация последовательности задач (8). Скорость сходимости $f_m(y) \rightarrow \hat{f}(y)$ в этом случае ниже [7], но незамеченными не должны остаться преимущества, обусловленные статичностью оператора \mathbf{B}_{f_0} - его достаточно корректно обратить один раз. Не вдаваясь в подробности, запишем сразу, подобно (10), положив $f_0(y) \equiv 0$,

$$\begin{aligned} & \alpha [f_{m+1,\alpha}(y) - f_{m,\alpha}(y)] + \\ & + \gamma_1 e^{iny} \int_0^{2\pi} e^{-iny_0} [f_{m+1,\alpha}(y_0) - f_{m,\alpha}(y_0)] dy_0 = \\ & = \gamma_2(m, \alpha, y), \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_2(m, \alpha, y) &= \frac{i}{4\pi^2} e^{iny} \times \\ & \times \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_n} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-i[\Gamma_n f_{m,\alpha}(y_0) + ny_0]} dy_0 \right\} d\kappa + \\ & + \frac{i}{2\pi} e^{iny} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \Gamma_0 a_{n0}(\kappa) d\kappa, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \Gamma_0^2 d\kappa, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$\alpha > 0, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$.

Ядра интегральных уравнений второго рода (11) вырождены, что позволяет записать их решения в явной форме:

$$\begin{aligned} & \alpha [f_{m+1,\alpha}(y) - f_{m,\alpha}(y)] = \\ & = \gamma_2(m, \alpha, y) - \gamma_1 \gamma_3(m, \alpha) (\alpha + 2\pi\gamma_1)^{-1} e^{iny}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma_3(m, \alpha) = \int_0^{2\pi} e^{-iny} \gamma_2(m, \alpha, y) dy.$$

Устремляя здесь α к нулю и насчитывая последовательность $\{f_m(y)\}$ для нарастающих значений m , приходим к искомой величине $\hat{f}(y)$.

6. Один из возможных вариантов выбора стартового в итерационных процедурах значения $f_0(y)$ мы уже реализовали в (8), (11), (12). Но, в общем, эта проблема при обращении нелинейной задачи (5) всегда остается открытой и требует немалых усилий для ее удовлетворительного решения. Схема, которую мы коротко наметим ниже, грубее, но она самозамкнута и может быть полезной как для собственно решения задачи синтеза, так и для получения "хороших" начальных приближений $f_0(y)$. Суть схемы состоит в следующем (n и Φ по-прежнему считаем фиксированными, постановка обратной задачи не меняется). Представление (4) используется во втором уравнении системы (7) из [6] ($N = 1$), которое затем должно обращаться относительно неизвестной функции $\hat{f}(y)$. Получаемое при этом интегральное уравнение первого рода

$$a_{n0}(\kappa) + \delta_n^0 = \frac{i\Gamma_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(y) e^{-iny} dy, \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2],$$

методом α -регуляризации Лаврентьева сводится к интегральному уравнению второго рода

$$\begin{aligned} & \alpha \hat{f}_\alpha(y) + e^{iny} (\kappa_2 - \kappa_1) \int_0^{2\pi} e^{-iny_0} \hat{f}_\alpha(y_0) dy_0 = \\ & = e^{iny} \frac{\pi}{i} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \frac{a_{n0}(\kappa) + \delta_n^0}{\Gamma_0} d\kappa, \quad (13) \\ & 0 \leq y \leq 2\pi, \end{aligned}$$

решение которого $\hat{f}_\alpha(y)$ существует, единственно и в пределе при $\alpha \rightarrow 0$ дает $\hat{f}(y)$

$(\|\hat{f}_\alpha(y) - \hat{f}(y)\|_{L_2} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0)$. Ядро интегрального оператора в (13) вырождено, и поэтому функция $\hat{f}_\alpha(y)$ может быть записана в явной форме, с точностью до обозначений совпадающей с (12).

Решение $\hat{f}(y)$ в случае, когда задается M амплитуд - $a_{n_1,0}, a_{n_2,0}, \dots, a_{n_M,0}$ - формируемого решеткой поля в интервале частот $[\kappa_1, \kappa_2]$, при рассмотрении конкретных практических задач может быть востребовано гораздо чаще. Техника его получения такая же, как и при $M = 1$. Опуская промежуточные детали, запишем сразу окончательное представление

$$\hat{f}(y) = \text{Re} \left\{ -\frac{i}{2\Gamma_0(\kappa_2 - \kappa_1)} \times \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \sum_{m=1}^M (a_{n_m,0} + \delta_{n_m}^0) e^{imy} d\kappa \right\}. \quad (14)$$

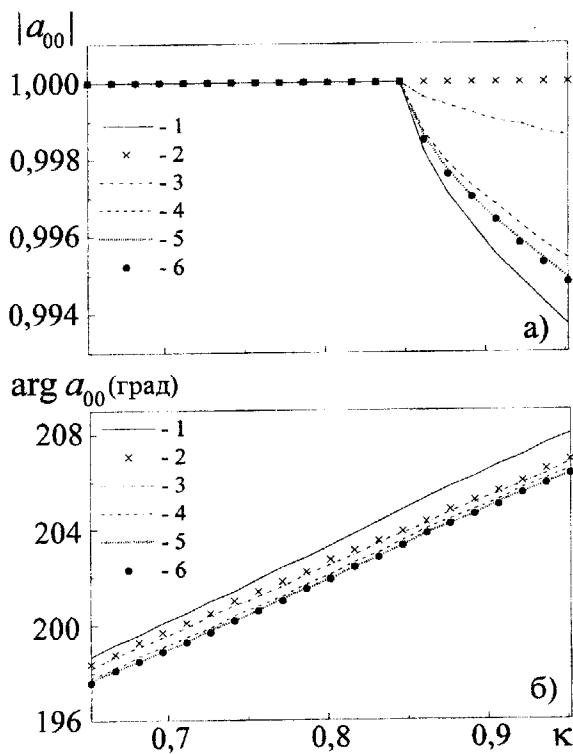


Рис. 2. Модуль и аргумент амплитуды $a_{00}(\kappa)$ дифракционных спектров контрольной (сплошная линия 1) и синтезированных при различных наборах входных данных (прерывистые линии 2-6) структур. Кривая 2 - $M = 1$; 3 - $M = 2$; 4 - $M = 3$; 5 - $M = 11$; 6 - $M = 31$

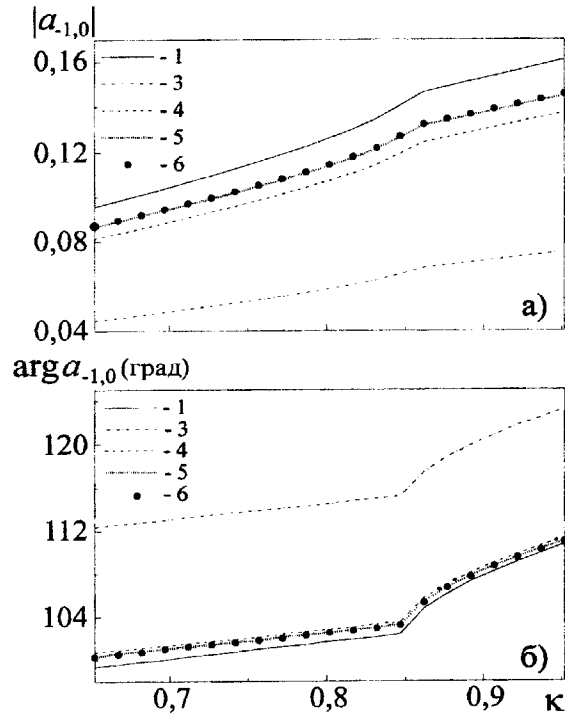


Рис. 3. Модуль и аргумент амплитуды $a_{-1,0}(\kappa)$ дифракционных спектров контрольной (сплошная линия 1) и синтезированных при различных наборах входных данных (прерывистые линии 3-6) структур. Кривая 3 - $M = 2$; 4 - $M = 3$; 5 - $M = 11$; 6 - $M = 31$

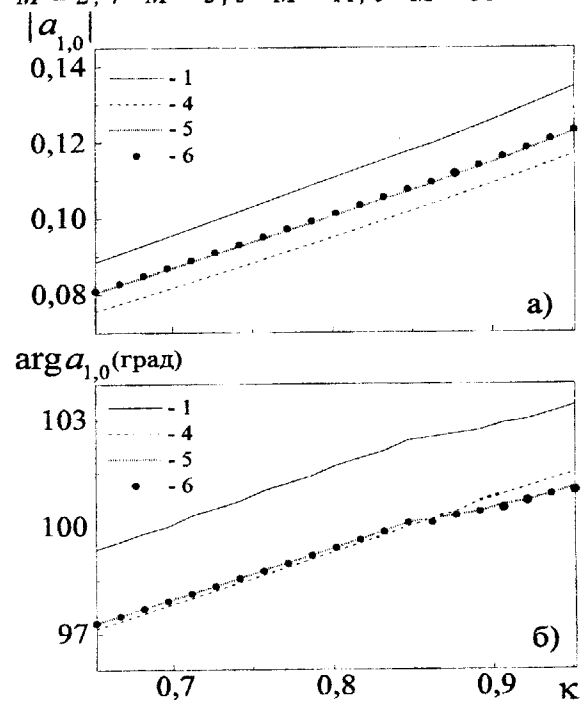


Рис. 4. Модуль и аргумент амплитуды $a_{1,0}(\kappa)$ дифракционных спектров контрольной (сплошная линия 1) и синтезированных при различных наборах входных данных (прерывистые линии 4-6) структур. Кривая 4 - $M = 3$; 5 - $M = 11$; 6 - $M = 31$

7. Результат реализации (14) в вычислительном эксперименте по синтезу структуры, обеспечивающей близкие к заданным значения амплитуд $a_{n_m,0}(k)$ в полосе $0,652 \leq k \leq 0,952$ при $\varphi = 10^\circ$, представлен на рис. 1-4. Требования к синтезируемым структурам формировались из данных, полученных при решении прямой задачи дифракции плоской волны на решетке из полуцилиндров. Соответствующий профиль (см. рис. 1) и дифракционные характеристики (см. рис. 2-4) обозначены сплошными линиями 1. Профили синтезированных структур и их дифракционные характеристики нанесены на всех рисунках прерывистыми линиями 2-6. Кривым 2 соответствует набор входных данных $a_{00}(k)$, $M = 1$; кривым 3 - $a_{-1,0}(k)$, $a_{00}(k)$, $M = 2$; кривым 4 - $a_{\pm 1,0}(k)$, $a_{00}(k)$, $M = 3$; кривым 5 - $a_{-5,0}(k) \div a_{5,0}(k)$, $M = 11$; кривым 6 - $a_{-15,0}(k) \div a_{15,0}(k)$, $M = 31$. Результат можно оценить как вполне удовлетворительный: погрешность в выполнении требований невелика, динамика в трансформациях профилей синтезируемых структур при увеличении M предсказуема и соответствует утверждению (см. работу [2]) о единственности решения обратной задачи для точных и полных входных данных. Все это позволяет использовать найденное таким образом решение $\hat{f}(y)$ не только в качестве хорошего начального приближения $f_0(y)$ при рассмотрении нелинейной задачи (5), но и в качестве окончательного или промежуточного (поддающегося дальнейшему уточнению) результата при анализе соответствующих задач синтеза или восстановления по точным, но не полным входным данным.

Литература

1. Л.Г. Величко. Препринт ИРЭ НАН Украины. Харьков, 1997, №97-1, 34 с.
2. Ю.К. Сиренко, Л.Г. Величко. Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1996, №2, с. 2-19.
3. A. Roger, D. Maestre. J. Opt. Soc. Am. 1980, 70, No. 12, p. 1483-1495.
4. В.П. Шестопалов, Ю.К. Сиренко. Динамическая теория решеток. Киев, Наукова думка, 1989, 214 с.
5. Д. Колтон, Р. Кресс. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Москва, Мир, 1987, 311 с.
6. Л.Г. Величко. Доповіді НАН України. 1997, №3, с. 84-90.
7. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. Москва, Мир, 1983, 432 с.
8. А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев, Наукова думка, 1986, 544 с.

Synthesis of the Reflecting Gratings with an Arbitrary Profile

L.G. Velichko, Yu.K. Sirenko

The new approaches to solving the synthesis problem for a periodic grating with the incomplete set of diffraction characteristics given in the frequency band or (and) in the interval of angles of incidence of plane waves are presented. They are based on the idea of quasilinearization of the integral expressions of potential theory and allow one to obtain the satisfactory results in long wavelength and, partially, in resonant (with respect to the basic characteristic sizes of the gratings) bands. The efficiency of the corresponding algorithms has been verified by computational experiments.