

Колебания в резонаторе с нестационарным диэлектриком

О.А. Третьяков, С.В. Чумаченко

Харьковский государственный университет
310077, Харьков-77, пл. Свободы 4

Статья поступила в редакцию 25 сентября 1997 г.

Рассмотрена задача о колебаниях электрического типа в цилиндрическом резонаторе с двумя коаксиальными выступами с нестационарным диэлектриком. Приведена общая схема отыскания элементов базиса в пространстве решений и проведены вычисления базиса при наличии малого геометрического параметра. Искомое поле записано в виде разложения по элементам базиса с коэффициентами, зависящими от времени. Для последних получена система эволюционных уравнений с начальными условиями путем проектирования на базис исходных уравнений Максвелла и начальных условий для поля. Найдены и обсуждаются решения эволюционных уравнений.

Розглянуто задачу про коливання електричного типу у циліндричному резонаторі з двома коаксіальними виступами з нестационарним діелектриком. Приведено загальну схему пошуку елементів базису у просторі рішень і проведено обчислення базису за наявності малого геометричного параметра. Шукане поле записано у вигляді розкладу за базисними елементами з коефіцієнтами, що залежать від часу. Для останніх здобуто систему еволюційних рівнянь з початковими умовами шляхом проектування на базис рівнянь Максвелла і початкових умов для поля. Здобуто та аналізуються розв'язки еволюційних рівнянь.

Введение

Эволюционный подход к решению граничных задач для системы уравнений Максвелла существенно отличается от классического. В методе комплексных амплитуд материальные уравнения с самого начала включаются в построение теории. При этом возникает необходимость вводить известные ограничения, приводящие к линеаризации материальных уравнений, с дополнительным условием стационарности среды. Преимущество нового подхода состоит в том, что материальные параметры $\epsilon(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ и функции сторонних источников поля участвуют только на заключительном этапе нашего рассмотрения. Последнее позволяет не ограничивать область применимости получаемого в дальнейшем решения системы уравнений Максвелла случаем, когда все нелинейные эффекты в механизмах поляризации, намагничивания и проводимости среды пренебрежимо малы. Предлагаемая общая схема решения системы уравнений Максвелла будет продемонстрирована на примере внутренней граничной задачи электродинамики об электромагнитном поле в объемном резонаторе с двумя независимыми настроенными элементами с идеально проводящей ограничивающей поверхностью, односвязной и достаточно гладкой. Цель настоящей статьи - получить разложения для искомого поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и

$\vec{H}(\vec{r}, t)$ по элементам базиса $\vec{E}_n(\vec{r})$, $\vec{H}_n(\vec{r})$, $\nabla\Phi_\alpha(\vec{r})$, $\nabla\Psi_\beta(\vec{r})$ для случая малого параметра ($\theta \equiv \frac{d}{l} \ll 1$, см. рисунок) и выражения для неизвестных коэффициентов $e_n(t)$, $h_n(t)$, $a_\alpha(t)$, $b_\beta(t)$ с учетом характеристик среды.

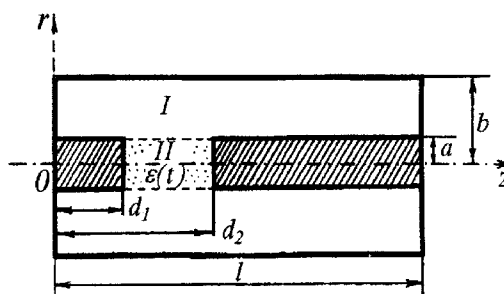


Рис. Колебания в резонаторе с нестационарным диэлектриком

Примеры аналитических решений эволюционных уравнений, которые соответствуют частному случаю линейных материальных уравнений $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$ и однородной, но нестационарной среде (т. е. материальные пара-

метры $\epsilon(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ могут быть произвольными дифференцируемыми функциями времени), и обсуждение физического содержания результатов можно найти в работах [1-3]. С точки зрения классического метода частотных разложений поля необычным может показаться следующий результат. Модовый состав поля в объемном резонаторе с идеально проводящей границей является дискретным, но при этом частотный спектр электромагнитного поля может быть непрерывным. В обзоре [4] и цитируемых там публикациях обсуждаются результаты решения эволюционных уравнений для случая слабонелинейной среды (с кубической нелинейностью). Показано, в частности, что даже весьма малая нелинейность среды способна переводить регулярные электромагнитные колебания в состояние динамического хаоса, что соответствует турбулентному состоянию поля в резонаторе со средой. Этот установленный факт заставляет с осторожностью относиться к линеаризации исходных материальных уравнений в системе уравнений Максвелла.

1. Постановка задачи

Рассматривается граничная электродинамическая задача для уравнения Гельмгольца в закрытом цилиндрическом резонаторе, объем которого состоит из двух частичных областей, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} \text{область I: } & \begin{cases} a \leq r \leq b, \\ 0 \leq z \leq l; \end{cases} \\ \text{область II: } & \begin{cases} 0 \leq r \leq a, \\ d_1 \leq z \leq d_2. \end{cases} \end{aligned}$$

В дальнейшем область II заполняется диэлектриком с проницаемостью ϵ (см. рисунок). Требуется определить собственные частоты колебаний электрического типа рассматриваемого резонатора и соответствующие этим частотам собственные поля. Необходимо найти нетривиальные решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие следующим условиям: 1) касательные составляющие вектора электрического поля обращаются в нуль на идеально проводящих стенках резонатора, 2) на границе раздела частичных областей электромагнитное поле должно быть непрерывным.

Заметим, что в данной работе изучаются только аксиально-симметричные электромагнитные поля ($(\partial \vec{\Pi} / \partial \varphi) \equiv 0$).

2. Определение элементов базиса в «вихревом» подпространстве

Потенциальные функции в каждой из областей I и II представим в виде

$$\Pi(r, z) = \begin{cases} \Pi_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n A_n R_n(p_n r) \cos \frac{\pi n}{l} z, & a \leq r \leq b, \\ \Pi_2(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m B_m Q_m(q_m r) \cos \frac{\pi m}{d} z, & 0 \leq r \leq a, \\ & d_1 \leq z \leq d_2; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} R_n(p_n r) &= J_0(p_n r) N_0(p_n b) - J_0(p_n b) N_0(p_n r), \\ Q_m(q_m r) &= J_0(q_m r), \quad d = d_2 - d_1, \\ p_n &= \sqrt{k^2 - (\pi n / l)^2}, \quad q_m = \sqrt{k^2 - (\pi m / d)^2}, \end{aligned}$$

ϵ_j ($j = n, m$) - число Неймана.

Электромагнитное поле внутри резонатора для каждой области находим по известным формулам с помощью (1). Подчиняя тангенциальные компоненты граничным условиям на поверхности раздела $r = a$, получаем систему дифференциальных уравнений, из которых следует бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_n и формула для вычисления коэффициентов B_m :

$$\begin{aligned} p_n^2 A_n R_n(p_n a) - \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m q_m K_{nm} \times \\ \times \frac{Q_m(q_m a)}{Q'_m(q_m a)} \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon_s p_s A_s R'_s(p_s a) S_{ms} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$n=0, 1, 2, \dots$,

$$B_m = \frac{1}{q_m Q'_m(q_m a)} \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon_s p_s A_s R'_s(p_s a) S_{ms}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} K_{nm} = \theta \left(\frac{\cos \left[\pi \left(\frac{m-n}{d-l} \right) \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right) \right] \sin \frac{\pi}{2} (m-n\theta)}{\pi (m-n\theta)} + \right. \\ \left. + \frac{\cos \left[\pi \left(\frac{m+n}{d+l} \right) \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right) \right] \sin \frac{\pi}{2} (m+n\theta)}{\pi (m+n\theta)} \right), \end{aligned}$$

$$S_{ms} = K_{ms} / \theta, \quad \theta = \frac{d}{l}.$$

Условием существования и единственности решения системы (2) является обращение в нуль ее определителя. Равный нулю определитель данной системы является дисперсионным уравнением, из которого находятся собственные значения рассматриваемого резонатора:

$$\det\{\delta_{sn} p_s^2 R_s(p_s a) - \varepsilon_s p_s R'_s(p_s a) L_{sn}\} = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

$$L_{sn} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m q_m \frac{Q_m(q_m a)}{Q'_m(q_m a)} S_{ms} K_{mn},$$

δ_{sn} - символ Кронеккера.

Для случая $\theta \ll 1$ из (2) и (3) получим

$$A_n = A_0 (V_n + C_n W), \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$B_m = \frac{A_0}{q_m Q'_m(q_m a)} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s p_s (V_s + C_s W) R'_s(p_s a) S_{ms},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots;$$

где W находится по формуле

$$W = \left(\sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} V_k W_k \right) / \left(1 - \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} C_k W_k \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

в которой V_k, W_k, C_k вычисляются следующим образом

$$V_k = p_0 q_0 S_{00} R'_0(p_0 a) \frac{Q_0(q_0 a)}{Q'_0(q_0 a)} K_{0k} \times \\ \times \left(p_k^2 R_k(p_k a) - 2q_0 \frac{Q_0(q_0 a)}{Q'_0(q_0 a)} K_{0k} S_{0k} p_k R'_k(p_k a) \right)^{-1},$$

$$C_k = 2q_0 K_{0k} \frac{Q_0(q_0 a)}{Q'_0(q_0 a)} \times \\ \times \left(p_k^2 R_k(p_k a) - 2q_0 \frac{Q_0(q_0 a)}{Q'_0(q_0 a)} K_{0k} S_{0k} p_k R'_k(p_k a) \right)^{-1},$$

$$W_k = p_k S_{0k} R'_k(p_k a).$$

Компоненты полей в обеих областях теперь запишутся в виде:

$$E_{rl}^{(n)}(r, z) = -\frac{2\pi A_0}{l} \sum_{s=1}^{\infty} s \tilde{E}_{sn} R'_s(p_{sn} r) \sin \frac{\pi s}{l} z, \tag{4}$$

$$E_{rll}^{(n)}(r, z) \cong -\frac{2\pi A_0}{d} \frac{Q_1(q_{1n} r)}{Q_1(q_{1n} a)} U_n^E \sin \frac{\pi z}{d};$$

$$E_{z'l}^{(n)}(r, z) = A_0 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s p_{sn} \tilde{E}_{sn} R_s(p_{sn} r) \cos \frac{\pi s}{l} z, \tag{5}$$

$$E_{zll}^{(n)}(r, z) \cong A_0 q_0 \frac{Q_0(q_0 r)}{Q'_0(q_0 a)} U_n^E;$$

где введены обозначения

$$U_n^E = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \tilde{E}_{sn} R'_s(p_s a) S_{0s},$$

$$\tilde{E}_{sn} = p_s (V_s + C_s W).$$

Из условия нормировки полей определим множитель A_0 :

$$|A_0|^2 = \frac{2V}{S_{A1} + S_{A2} + S_{A3} + S_{A4}},$$

$$S_{A1} = \frac{2\pi^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} c_1 n^2 |p_n|^2 |V_n + C_n W|^2,$$

$$S_{A2} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^2 c_2 \frac{l}{2} |p_m|^2 |V_m + C_m W|^2,$$

$$S_{A3} = \frac{2\pi^2}{d} c_3 \frac{|U^E|^2}{Q'_1(q_1 a) Q_1^*(q_1 a)},$$

$$S_{A4} = q_0^2 c_4 \frac{|U^E|^2 d}{Q_0'^2(q_0 a)}.$$

Интегралы c_1, c_2, c_3, c_4 полагаем уже вычисленными:

$$c_1 = \int_a^b r R'_n(p_n r) R_n^*(p_n r) dr,$$

$$c_2 = \int_a^b r R_m(p_m r) R_m^*(p_m r) dz,$$

$$c_3 = \int_0^a r |Q_1(q_1 r)|^2 dr, \quad c_4 = \int_0^a r J_0^2(q_0 r) dr,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

С точки зрения эволюционного подхода к теории электромагнетизма, шестимерный вектор X_n электромагнитного поля определяется следующим образом [3]:

$$X_n^i(r, z) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_n^i(r, z) \\ \tilde{H}_n^i(r, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{ri}^{(n)}(r, z) \\ 0 \\ E_{z'i}^{(n)}(r, z) \\ 0 \\ H_{\phi'i}^{(n)}(r, z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

где индекс i указывает на номер частичной области ($i = I, II$), и индекс n - на номер собственного числа k_n , которое соответствует собственному вектору X_n .

Согласно теореме Вейля [1] и эволюционной теории [2] все трехмерные векторы (как части шестимерных собственных векторов) являются решениями задач на собственные значения для лапласиана и таким образом возникают четыре подпространства характеристических векторов:

$$J_E^i: \left\{ \vec{E}_n^i(r, z), \operatorname{div} \vec{E}_n^i(r, z) = 0, [\vec{v} \times \vec{E}_n^i]_S = 0 \right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$J_H^i: \left\{ \vec{H}_n^i(r, z), \operatorname{div} \vec{H}_n^i(r, z) = 0, (\vec{v} \cdot \vec{H}_n^i)|_S = 0 \right\}_{n=1}^{\infty},$$

и подпространство "вихревых" собственных векторов записывается в виде

$$J^i = \begin{pmatrix} J_E^i \\ J_H^i \end{pmatrix}, \text{ где } i = I, II.$$

Таким образом, часть базиса, соответствующая подпространствам J^i ($i = I, II$), определена. Необходимо найти элементы "градиентного" подпространства $\overset{\circ}{G}$, которые образуют оставшуюся часть базиса.

3. Определение элементов базиса в «градиентном» подпространстве

Для собственного числа $k_0 = 0$ имеем для уравнения Гельмгольца две граничные задачи Дирихле и Неймана, которые совместно с условиями нормировки определяют производящие функции для собственных векторов "электрического" и "магнитного" типов

$$X_{\alpha}^i(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\nabla \Phi_{\alpha}^i(\vec{r}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$Y_{\beta}^i(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\nabla \Psi_{\beta}^i(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathbf{0}$ - трехкомпонентный нулевой вектор, $i = I, II$ (номер частичной области).

3.1. Рассмотрим сначала задачу, решение которой позволяет определить производящие функции Φ^i ($i = I, II$) для векторов "электрического" типа. Требуется найти решение уравнения Гельмгольца относительно функции Φ^i совместно с граничными условиями:

$$\Phi^i = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq d_1, \quad d_2 \leq z \leq l, \quad r = a; \\ \Phi^{II}, & d_1 \leq z \leq d_2, \quad r = a; \\ \frac{\partial \Phi^I}{\partial r} = \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial r}, & d_1 \leq z \leq d_2, \quad r = a; \end{cases} \quad (7)$$

$$\Phi^I = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad r = b. \quad (8)$$

Функции Φ^I и Φ^{II} будем искать в виде:

$$\Phi^I(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^I R_n(h_n^I r) \sin \frac{\pi n}{l} z, \quad (9)$$

$$\Phi^{II}(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{II} J_0(h_m^{II} r) \sin \frac{\pi m}{d} z,$$

$$R_n(h_n^I r) = J_0(h_n^I r) N_0(h_n^I b) - J_0(h_n^I b) N_0(h_n^I r),$$

$$h_n^I = \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}, \quad h_m^{II} = \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

A_n^I и A_m^{II} - неизвестные коэффициенты, λ - собственные значения. Можно убедиться, что граничные условия выполняются.

В процессе решения задачи получим выражения для вычисления коэффициентов A_m^{II} через A_n^I и СЛАУ относительно коэффициентов A_n^I , условием существования и единственности решения которой является обращение в нуль ее определителя, из которого находятся собственные значения λ .

Для случая малого параметра $\theta \equiv \frac{d}{l} \ll 1$ путем несложных преобразований получим формулу для коэффициентов A_m^{II} , характеристическое уравнение для собственных значений λ , а также выражение для вычисления коэффициентов A_n^I :

$$A_m^{II} = \frac{A_1^I}{h_m^{II} J_0'(h_m^{II} a)} \times \sum_{s=1}^{\infty} h_s^I (G_s^{\Phi} + C_s^{\Phi} W^{\Phi}) R_s'(h_s^I a) V_{ms}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$\det \left\{ \delta_{sn} R_s(h_s^I a) - \frac{d}{l} T_1 V_{1n} h_s^I R_s'(h_s^I a) V_{1s} \right\} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A_n^I = A_1^I (G_n^{\Phi} + C_n^{\Phi} W^{\Phi}), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (11)$$

где W^{Φ} полагаем уже вычисленным по формуле

$$W^{\Phi} = \left(\sum_{k=2, k \neq n}^{\infty} G_k^{\Phi} W_k^{\Phi} \right) / \left(1 - \sum_{k=2, k \neq n}^{\infty} C_k^{\Phi} W_k^{\Phi} \right),$$

$$n = 2, 3, 4, \dots$$

Компоненты G_k^{Φ} , C_k^{Φ} , W_k^{Φ} находятся из выражений:

$$G_k^{\Phi} = \frac{d}{l} \frac{h_1^I T_1 V_{11} V_{1k} R_1'(h_1^I a)}{R_k(h_k^I a) - \frac{d}{l} T_1 h_k^I V_{1k}^2 R_k'(h_k^I a)},$$

$$C_k^{\Phi} = \frac{d}{l} \frac{T_1 V_{1k}}{R_k(h_k^I a) - \frac{d}{l} T_1 h_k^I V_{1k}^2 R_k'(h_k^I a)},$$

$$W_k^{\Phi} = h_k^I V_{1k} R_k'(h_k^I a).$$

В (10) и (11) введены обозначения:

$$T_m = \frac{J_0(h_m^{II} a)}{h_m^{II} J_0'(h_m^{II} a)},$$

$$V_{mj} = \theta \left(\frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{d} - \frac{j}{l} \right) (d_2 + d_1) \right] \sin \pi (m + j\theta)}{\pi (m - j\theta)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{d} + \frac{j}{l} \right) (d_2 + d_1) \right] \sin \frac{\pi}{2} (m + j\theta)}{\pi (m + j\theta)} \right),$$

$$j = n, s.$$

Учитывая формулы для вычисления коэффициентов (10) и (11), запишем представления (9) для производящих функций в виде

$$\Phi^I(r, z) = A_1^I \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^{\Phi} + C_n^{\Phi} W^{\Phi}) R_n(h_n^I r) \sin \frac{\pi n}{l} z,$$

$$\Phi^{II}(r, z) \cong A_1^I \frac{J_0(h_1^{II} r)}{h_1^{II} J_0'(h_1^{II} a)} U^{\Phi} \sin \frac{\pi}{d} z,$$

$$U^{\Phi} = \sum_{s=1}^{\infty} h_s^I R_s'(h_s^I a) (G_s^{\Phi} + C_s^{\Phi} W^{\Phi}) V_{1s}.$$

Множитель A_1^I определим из условия нормировки, которому должны удовлетворять производящие функции Φ^I и Φ^{II} :

$$|A_1^I|^2 = \frac{4V}{\lambda^2 \left(l \sum_{n=1}^{\infty} c_5 |G_n^{\Phi} + C_n^{\Phi} W^{\Phi}|^2 + \frac{|U^{\Phi}|^2 c_6 d}{|h_1^{II}|^2 \cdot |J_1(h_1^{II} a)|^2} \right)},$$

$$c_5 = \int_a^b r R_n(h_n^I r) R_n^*(h_n^I r) dr, \quad c_6 = \int_0^a r |J_1(h_1^{II} r)|^2 dr.$$

Вычисляя градиенты производящих функций, получим

$$\nabla \Phi_{\alpha}^i(r, z) = (A_1^I \hat{\Phi}_{\alpha}^i; 0; A_1^I \tilde{\Phi}_{\alpha}^i), \quad i = I, II, \quad (12)$$

$$\hat{\Phi}_{\alpha}^I(r, z) = \sum_{s=1}^{\infty} h_{s\alpha}^I R_s'(h_{s\alpha}^I r) \Phi_{s\alpha} \sin \frac{\pi s}{l} z, \quad (13)$$

$$\tilde{\Phi}_{\alpha}^I(r, z) = \frac{\pi}{l} \sum_{s=1}^{\infty} s R_s(h_{s\alpha}^I r) \Phi_{s\alpha} \cos \frac{\pi s}{l} z,$$

$$\hat{\Phi}_{\alpha}^{II}(r, z) \cong \frac{J_1(h_{1\alpha}^{II} r)}{J_1(h_{1\alpha}^{II} a)} U_{\alpha}^{\Phi} \sin \frac{\pi}{d} z, \quad (14)$$

$$\tilde{\Phi}_{\alpha}^{II}(r, z) \cong -\frac{\pi}{d} \frac{J_0(h_{1\alpha}^{II} r)}{h_{1\alpha}^{II} J_1(h_{1\alpha}^{II} a)} U_{\alpha}^{\Phi} \cos \frac{\pi}{d} z,$$

$$U_{\alpha}^{\Phi} = \sum_{s=1}^{\infty} \Phi_{s\alpha} h_{s\alpha}^I R_s'(h_{s\alpha}^I a) V_{1s},$$

$$\Phi_{s\alpha} \cong G_s^{\Phi} + C_s^{\Phi} W^{\Phi}.$$

Таким образом, определены подпространства трехмерных "электрических" частей собственных векторов для областей I и II:

$$G_E^{\circ}: \left\{ -\nabla \Phi_{\alpha}^i(r, z): (\Delta + \lambda_{\alpha}^2) \Phi_{\alpha}^i = 0, \Phi_{\alpha}^i|_S = 0 \right\}_{\alpha=1}^{\infty},$$

$$i = I, II.$$

3.2. Теперь перейдем к рассмотрению задачи на нахождение производящих функций $\Psi^i (i = I, II)$ для «невихревых» векторов «магнитного» типа. В этом случае постановка задачи включает в себя следующие граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi^I}{\partial r} = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq d_1, \quad d_2 \leq z \leq l, \quad r = a, \\ \frac{\partial \Psi^{II}}{\partial r}, & d_1 \leq z \leq d_2, \quad r = a, \end{cases} \\ \Psi^{II} = \Psi^I, \quad d_1 \leq z \leq d_2, \quad r = a; \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Psi^I}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad r = b.$$

Функции $\Psi^i(r, z)$, $i = I, II$ будем искать в виде:

$$\Psi^I(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B_n^I P_n(g_n^I r) \cos \frac{\pi n}{l} z, \quad (16)$$

$$\Psi^{II}(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m B_m^{II} J_0(g_m^{II} r) \cos \frac{\pi m}{d} z,$$

$$P_n(g_n^I r) = J_0(g_n^I r) N_0'(g_n^I b) - J_0'(g_n^I b) N_0(g_n^I r),$$

$$g_n^I = \sqrt{\chi^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}, \quad g_m^{II} = \sqrt{\chi^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2},$$

χ - собственные значения.

Нетрудно убедиться, что граничные условия удовлетворяются. Подчиняя представления (16) граничным условиям (15), получим выражения для вычисления неизвестных коэффициентов B_m^{II} и бесконечную однородную СЛАУ относительно коэффициентов B_n^I , из которой следует дисперсионное уравнение для собственных значений χ .

Для случая $\theta \ll 1$ имеем

$$\det \left\{ \delta_{sm} g_s^I P_s'(g_s^I a) - \varepsilon_s P_s(g_s^I a) T_0^\Psi S_{0s} K_{0n} \right\} = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B_n^I = B_0^I (G_n^\Psi + C_n^\Psi W^\Psi), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$B_m^{II} = \frac{B_0^I}{J_0(g_m^{II} a)} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s (G_n^\Psi + C_n^\Psi W^\Psi) P_s(g_s^I a) S_{ms},$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$W^\Psi = \left(\sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} G_k^\Psi W_k^\Psi \right) / \left(1 - \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} C_k^\Psi W_k^\Psi \right),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$G_k^\Psi = \frac{T_0^\Psi S_{00} P_0(g_0^I a) K_{0k}}{g_k^I P_k'(g_k^I a) - T_0^\Psi P_k(g_k^I a) K_{0k} S_{0k}},$$

$$C_k^\Psi = \frac{K_{0k}}{g_k^I P_k'(g_k^I a) - T_0^\Psi P_k(g_k^I a) K_{0k} S_{0k}},$$

$$W_k^\Psi = 2 T_0^\Psi P_k(g_k^I a) S_{0k}, \quad T_0^\Psi = g_0^{II} \frac{J_0'(g_0^{II} a)}{J_0(g_0^{II} a)},$$

и все константы полагаем уже вычисленными. Представления (16) искомых производящих функций запишутся в виде:

$$\Psi^I(r, z) = B_0^I \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (G_n^\Psi + C_n^\Psi W^\Psi) P_n(g_n^I r) \cos \frac{\pi n}{l} z,$$

$$\Psi^{II}(r, z) \cong B_0^I \frac{J_0(g_0^{II} r)}{J_0(g_0^{II} a)} U^\Psi,$$

$$U^\Psi = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s (G_s^\Psi + C_s^\Psi W^\Psi) P_s(g_s^I a) S_{0s}.$$

Для вычисления нормировочного коэффициента получим формулу

$$|B_0^I|^2 = \frac{2V}{\chi^2 \left(\frac{l}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 |G_n^\Psi + C_n^\Psi W^\Psi|^2 c_7 + \frac{|U^\Psi|^2 c_8 d}{J_0^2(g_0^{II} a)} \right)},$$

$$c_7 = \int_a^b r P_n(g_n^I r) P_n^*(g_n^I r) dr,$$

$$c_8 = \int_0^a r J_0(g_0^{II} r) J_0^*(g_0^{II} r) dr.$$

Вычисление градиентов производящих функций дает

$$\nabla \Psi_\beta^i(r, z) = \left(B_0^I \hat{\Psi}_\beta^i; \quad 0; \quad B_0^I \tilde{\Psi}_\beta^i \right), \quad i = I, II, \quad (17)$$

$$\hat{\Psi}_\beta^I(r, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s g_{s\beta}^I \Psi_{s\beta} P_s(g_{s\beta}^I r) \cos \frac{\pi s}{l} z, \quad (18)$$

$$\tilde{\Psi}_\beta^I(r, z) = -\frac{2\pi}{l} \sum_{s=1}^{\infty} s \Psi_{s\beta} P_s(g_{s\beta}^I r) \sin \frac{\pi s}{l} z,$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\beta^H(r, z) &\cong g_0^H \frac{J_0'(g_0^H r)}{J_0(g_0^H a)} U_\beta^\Psi, \\ \tilde{\Psi}_\beta^H(r, z) &\cong -\frac{2\pi}{d} \frac{J_0(g_{1\beta}^H r)}{J_0(g_{1\beta}^H a)} U_\beta^\Psi \sin \frac{\pi}{d} z, \\ \Psi_{s\beta} &\cong G_s^\Psi + C_s^\Psi W^\Psi, \\ U_\beta^\Psi &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \Psi_{s\beta} P_s(g_{s\beta}^H a) S_{0s}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, определены подпространства трехмерных "магнитных" частей собственных векторов для областей I и II:

$$G_H^i : \left\{ -\nabla \Psi_\beta^i(r, z) : (\Delta + \chi_\beta^2) \Psi_\beta^i = 0, \frac{\partial \Psi_\beta^i}{\partial \bar{\nu}} \Big|_S = 0 \right\}_{\beta=1}^{\infty},$$

$i = I, II.$

Итак, "градиентное" подпространство $\overset{\circ}{G}$ состоит из элементов $X_\alpha^i(r, z)$ и $Y_\beta^i(r, z)$ вида (6) и

имеет представления $\overset{\circ}{G} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{G}_E^i \\ \overset{\circ}{G}_H^i \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \overset{\circ}{O} \\ \overset{\circ}{G}_H^i \end{pmatrix},$

$i = I, II.$

4. Разложения для искомого поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H}(\vec{r}, t)$ по элементам базиса

Разложение искомого поля как шестимерного вектора в привычных терминах трехмерных векторов напряженностей поля записывается в виде [3]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \vec{E}_n(\vec{r}) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha(t) \nabla \Phi_\alpha(\vec{r}), \quad (20)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \vec{H}_n(\vec{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} b_\beta(t) \nabla \Psi_\beta(\vec{r}).$$

(21)

Все векторы, зависящие от координат, уже известны. Они определены выше как элементы базиса в форме граничных задач на собственные значения для лапласиана. Напомним, что для нашей задачи в (20)-(21) вводились обозначения

$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{E}_n^I(r, z), & a \leq r \leq b, \quad 0 \leq z \leq l, \\ \vec{E}_n^{II}(r, z), & 0 \leq r \leq a, \quad d_1 \leq z \leq d_2; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_n(\vec{r}) &= \begin{cases} \vec{H}_n^I(r, z), & a \leq r \leq b, \quad 0 \leq z \leq l, \\ \vec{H}_n^{II}(r, z), & 0 \leq r \leq a, \quad d_1 \leq z \leq d_2; \end{cases} \\ \nabla \Phi_\alpha(\vec{r}) &= \begin{cases} \nabla \Phi_\alpha^I(r, z), & a \leq r \leq b, \quad 0 \leq z \leq l, \\ \nabla \Phi_\alpha^{II}(r, z), & 0 \leq r \leq a, \quad d_1 \leq z \leq d_2; \end{cases} \\ \nabla \Psi_\beta(\vec{r}) &= \begin{cases} \nabla \Psi_\beta^I(r, z), & a \leq r \leq b, \quad 0 \leq z \leq l, \\ \nabla \Psi_\beta^{II}(r, z), & 0 \leq r \leq a, \quad d_1 \leq z \leq d_2; \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\vec{E}_n^i(r, z) = \left(E_{r_i}^{(n)}(r, z); 0; E_{z_i}^{(n)}(r, z) \right), \quad i = I, II$$

заданы формулами (4)-(5), а для $\vec{H}_n^i(r, z)$ имеет место представление

$$\vec{H}_n^i(r, z) = \left(0; H_{\phi_i}^{(n)}(r, z); 0 \right), \quad i = I, II,$$

$$H_{\phi_i}^{(n)}(r, z) = ik_n A_0 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \tilde{E}_{sn} R'_s(p_{sn} r) \cos \frac{\pi s}{l} z,$$

$$H_{\phi_{II}}^{(n)}(r, z) \cong ik_n A_0 \frac{J_0'(q_0 r)}{J_0(q_0 a)} U_n^E.$$

Градиенты $\nabla \Phi_\alpha^i(r, z)$ и $\nabla \Psi_\beta^i(r, z)$ определены формулами (12)-(14) и (17)-(19), соответственно. Индекс n всюду указывает на номер соответствующего собственного числа k_n , индекс α показывает номер собственного значения λ_α , а индекс β - номер собственного числа χ_β .

Итак, в разложении (20)-(21) для искомого поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ по элементам базиса $\vec{E}_n(\vec{r})$, $\vec{H}_n(\vec{r})$, $\nabla \Phi_\alpha(\vec{r})$, $\nabla \Psi_\beta(\vec{r})$ следует определить неизвестные скалярные коэффициенты $e_n(t)$, $h_n(t)$, $a_\alpha(t)$, $b_\beta(t)$. При этом необходимо каждый раз учитывать свойства среды, которой заполнен резонатор.

5. Определение временных коэффициентов

Разложениями (20) - (21) можно воспользоваться для вычисления электромагнитного поля в любой момент времени, если в дополнение к ним получить решение задачи по вычислению временных коэффициентов. Постановка такой задачи возникает в результате проецирования уравнений Максвелла на базис в нашем пространстве решений.

Временные коэффициенты определяются из системы эволюционных уравнений [3].

Рассмотрим случай, когда среда в резонаторе имеет следующие характеристики:

$$\vec{J}_\sigma(\vec{E}, \vec{H}) = 0, \quad \vec{J}_h(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{J}_e(\vec{r}, t) \equiv \vec{J}_e(\vec{r}, t), \\ \vec{M}(\vec{H}) = 0, \quad \vec{P}(\vec{E}) = \alpha(t)\vec{E}(\vec{r}, t),$$

$$d_1 < z < d_2, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Система эволюционных уравнений с учетом представлений для интегралов запишется в виде

$$\frac{d}{dt} e_n(t) + ick_n h_n(t) = \\ = -4\pi j_n^e(t) - \sum_{n'=1}^{\infty} \rho_{nn'} \frac{d}{dt} [\alpha(t) e_{n'}(t)] + \\ + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \omega_{n\alpha} \frac{d}{dt} [\alpha(t) a_\alpha(t)], \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} h_n(t) + ick_n e_n(t) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} a_\alpha(t) = 4\pi i_\alpha^e(t) - \sum_{n'=1}^{\infty} \nu_{\alpha n'} \frac{d}{dt} [\alpha(t) e_{n'}(t)] + \\ + \sum_{\alpha'=1}^{\infty} \gamma_{\alpha\alpha'} \frac{d}{dt} [\alpha(t) a_{\alpha'}(t)], \quad (24)$$

$$b_\beta(t) = b_\beta^{(0)}, \quad (25)$$

где $j_n^e(t)$, $i_\alpha^e(t)$ - коэффициенты разложения функции сторонних источников по элементам базиса [3], а $\rho_{nn'}$, $\omega_{n\alpha}$, $\nu_{\alpha n'}$, $\gamma_{\alpha\alpha'}$, - интегралы, определенные формулами:

$$\rho_{nn'} = \frac{1}{V} \int_{V_n} \vec{E}_{n'}^{II}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_n^{II*}(\vec{r}) dV, \quad (26)$$

$$\omega_{n\alpha} = \frac{1}{V} \int_{V_n} \nabla \Phi_\alpha^{II}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_n^{II*}(\vec{r}) dV,$$

$$\nu_{\alpha n'} = \frac{1}{V} \int_{V_n} \vec{E}_{n'}^{II}(\vec{r}) \cdot \nabla \Phi_\alpha^{II*}(\vec{r}) dV, \quad (27)$$

$$\gamma_{\alpha\alpha'} = \frac{1}{V} \int_{V_n} \nabla \Phi_\alpha^{II}(\vec{r}) \cdot \nabla \Phi_{\alpha'}^{II*}(\vec{r}) dV,$$

Решая систему (22)-(25), получаем выражения для вычисления коэффициентов $a_\alpha(t)$ и пару уравнений относительно $e_n(t)$ и $h_n(t)$

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ (1 - \gamma_{\alpha\alpha} \tilde{\alpha}(\tau)) \cdot \tilde{a}_\alpha(\tau) \right\} = \frac{4\pi}{ck_n} \tilde{i}_\alpha^e(\tau), \quad (28)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \tilde{e}_n(\tau) + i\tilde{h}_n(\tau) = -\frac{4\pi}{ck_n} \tilde{j}_n^e(\tau), \\ \frac{d}{d\tau} \tilde{h}_n(\tau) + \frac{i}{1 + \rho_{nn} \tilde{\alpha}(\tau)} \tilde{e}_n(\tau) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь

$$\tilde{e}_n(\tau) = (1 + \rho_{nn} \tilde{\alpha}(\tau)) e_n(\tau), \quad \tilde{h}_n(\tau) \equiv h_n\left(\frac{\tau}{ck_n}\right),$$

$$\tilde{\alpha}(\tau) \equiv \alpha\left(\frac{\tau}{ck_n}\right), \quad \tau = ck_n t.$$

Перепишем систему (29) в матричной форме и будем решать ее как матричное уравнение согласно [6]-[7]. В результате получим формулы для вычисления коэффициентов $\tilde{e}_n(\tau)$ и $\tilde{h}_n(\tau)$:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_n(\tau) = & \left(\rho_{nn} P - \frac{4\pi}{ck_n} L_4 - ih_n^{(0)} \right) \cdot \sin \tau - \\ & - \left(\rho_{nn} Q - \frac{4\pi}{ck_n} L_3 - e_n^{(0)} \right) \cdot \cos \tau, \\ \tilde{h}_n(\tau) = & i \cdot \left[\left(\rho_{nn} P - \frac{4\pi}{ck_n} L_4 - ih_n^{(0)} \right) \cdot \cos \tau + \right. \\ & \left. + \left(\rho_{nn} Q - \frac{4\pi}{ck_n} L_3 - e_n^{(0)} \right) \cdot \sin \tau \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где приняты обозначения:

$$P = \frac{S_1(1+M) + N_1 S_2}{1 - M^2 - N_1 N_2}, \\ Q = \frac{S_2(1-M) + N_2 S_1}{1 - M^2 - N_1 N_2}, \quad M = \rho_{nn} L_1, \\ N_2 = \rho_{nn} L_5, \quad N_1 = -\rho_{nn} L_2, \\ S_1 = -\frac{4\pi}{ck_n} [L_2(\tau)L_3(\tau) + L_1(\tau)L_4(\tau)] + \\ + e_n^{(0)} L_2(\tau) - ih_n^{(0)} L_1(\tau),$$

$$S_2 = -\frac{4\pi}{ck_n} [L_1(\tau)L_3(\tau) + L_4(\tau)L_5(\tau)] + e_n^{(0)}L_1(\tau) - h_n^{(0)}L_5(\tau),$$

$$L_1 = \int_0^\tau \tilde{\alpha}(\tau) \cos \tau \sin \tau d\tau,$$

$$L_2 = \int_0^\tau \cos^2 \tau \tilde{\alpha}(\tau) d\tau, L_3 = \int_0^\tau \cos \xi \tilde{j}_n^e(\xi) d\xi,$$

$$L_4 = \int_0^\tau \sin \xi \tilde{j}_n^e(\xi) d\xi, L_5 = \int_0^\tau \sin^2 \tau \tilde{\alpha}(\tau) d\tau.$$

Далее будем полагать

$$\tilde{j}_n^e(\xi) = m_n \cos(m\xi), \quad \tilde{i}_\alpha^e(\tau) = v_\alpha \cos(v\tau),$$

$$\tilde{\alpha}(\tau) = A(\exp(-b_1\tau) - \exp(-b_2\tau)), \quad b_2 < b_1.$$

Тогда из (28) следует, что $\tilde{\alpha}_\alpha(\tau)$ есть решения дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & (1 - \gamma_{\alpha\alpha} A[\exp(-b_1\tau) - \exp(-b_2\tau)]) \frac{d}{d\tau} \tilde{\alpha}_\alpha(\tau) - \\ & - \gamma_{\alpha\alpha} A[-b_1 \exp(-b_1\tau) + b_2 \exp(-b_2\tau)] \cdot \tilde{\alpha}_\alpha(\tau) = \\ & = \frac{4\pi}{ck_n} v_\alpha \cos(v\tau). \end{aligned}$$

Заметим, что функция $\tilde{\alpha}(\tau)$ вносит наибольший вклад в интегралы L_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) в некотором интервале значений $0 \leq \tau \leq T$, и $\tilde{\alpha}(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ ($\tau > T$). Учитывая это, интегралы $L_1 \div L_5$ легко вычисляются в элементарных функциях. При $\tau > T$ временные коэффициенты из разложений поля по модовому базису, записанные в форме (30), имеют следующий окончательный вид:

$$\tilde{e}_n(\tau) = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sin(\tau - \psi),$$

$$\tilde{h}_n = i\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \cos(\tau - \psi),$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \rho_m P + \\ + \frac{2\pi m_n}{ck_n} \left[\frac{\cos(1+m)T - 1}{1+m} + \frac{\cos(1-m)T - 1}{1-m} \right] - ih_n^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\zeta_2 = \rho_m Q + \frac{2\pi m_n}{ck_n} \left[\frac{\sin(1+m)T}{1+m} + \frac{\sin(1-m)T}{1-m} \right] - ih_n^{(0)},$$

$$\psi = \arctg \frac{\zeta_2}{\zeta_1}.$$

Итак, в рассматриваемом случае коэффициенты разложения для искомого поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ найдены. Числовые коэффициенты из начальных условий для поля - $e_n^{(0)}$, $h_n^{(0)}$, $a_\alpha^{(0)}$, $b_\beta^{(0)}$ - считаем известными.

Выводы

Таким образом, нами определены элементы базиса в пространстве решений рассматриваемой задачи. Приведена общая схема отыскания элементов базиса в пространстве решений и проведены вычисления при наличии малого геометрического параметра. Записаны бесконечные СЛАУ и прямые формулы относительно неизвестных коэффициентов, которые фигурируют в выражениях для компонент полей и представлениях для производящих функций в обеих областях резонатора. Приведены формулы для вычисления нормировочных коэффициентов. Получены дисперсионные уравнения для вычисления собственных частот данного резонатора для общего случая и случая малого параметра, решение которых возможно только при помощи ЭВМ. Выписаны разложения искомого поля по элементам базиса и получена система эволюционных уравнений для коэффициентов, зависящих от времени. Эволюционные уравнения решены для двух случаев заполнения резонатора нестационарной средой и получены временные зависимости поля в явном виде, выраженные в элементарных функциях. Под нестационарностью среды понимается зависимость диэлектрической проницаемости от времени. В материальных уравнениях диэлектрическая проницаемость представлена коэффициентом диэлектрической восприимчивости $\alpha(t)$.

Литература

1. О.А. Третьяков. Радиотехника и электроника. 1986, 31, №6, с. 1071-1082.
2. О.А. Третьяков. Радиотехника и электроника. 1989, 34, №5, с. 917-926.
3. O. A. Tretyakov. Essentials of Non-stationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory. Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory. Edited by M. Hashimoto, M. Idemen, and O. A. Tretyakov. Tokyo, Science House Co., Ltd, 1993, 572 p.

4. A.V. Belogortsev, O.A. Tretyakov, and D.M. Vavriv. Applied Mechanics Review. 1993, 43, p. 372-384.
5. Г. Вейль. Избранные труды. Под ред. В.И. Арнольда. Москва, Наука, 1984, с. 285-308.
6. С. Хаяси. Волны в линиях электропередачи. Под ред. В. Ю. Ломоносова. Москва, Наука, 1960, с. 32-50.
7. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Иностранная литература, 1958, с. 75-121.

Oscillations in the Resonator with Non-Stationary Dielectric

O.A. Tretyakov, S.V. Chumachenko

Problem of oscillations of an electrical type in the cylindrical resonator with two coaxial ledges with non-stationary dielectric is considered. The common scheme of search of elements of basis in space of the solutions is resulted and calculations of basis are carried out at presence of small geometrical parameter. The required field is written down as expansions over elements of basis with time-dependent factors. For the last system of the evolutionary equations with the initial conditions is received by projecting on basis of the initial Maxwell equations and initial conditions for a field. Solution of the evolutionary equations are found and discussed.