

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПРИБОРАХ, ЭЛЕМЕНТАХ И СИСТЕМАХ НАУЧНОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

---

УДК 621.373.5

Д. М. ВАВРИВ, А. Ю. НЕМЕЦ

Радиоастрономический институт НАН Украины,  
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина  
E-mail: vavriv@rian.kharkov.ua

---

## ГИСТЕРЕЗИС ТОРОВ

*Представлены теоретические исследования динамики нелинейного осциллятора с кубической и квадратичной нелинейностями при одновременном низкочастотном и высокочастотном внешнем воздействии. Обнаружен новый механизм возникновения бистабильности и гистерезиса в результате такого взаимодействия. Этот механизм проявляется как бистабильность и гистерезис торов, формируемых в фазовом пространстве осциллятора. Проведен сравнительный анализ поведения осциллятора при резонансном гармоническом воздействии и при двухчастотном воздействии.*

*Ключевые слова:* осциллятор, бистабильность, гистерезис, фазовый портрет, предельный цикл, тор

### 1. Введение

Бистабильность и связанный с ней гистерезис относятся к фундаментальным и хорошо известным эффектам, характерным для нелинейных систем. Они проявляются в самых разнообразных электронных, оптических, механических, химических и других системах, оказывая существенное влияние на их свойства [1–5]. Одно из основных свойств бистабильности и гистерезиса заключается в том, что установившееся состояние системы (например, ее координаты или скорость движения) определяется не только параметрами системы или внешнего воздействия, а и предысторией системы. Существует достаточно много приложений этих эффектов, включая создание логических элементов, систем регулирования, кодирования информации.

Несмотря на то что бистабильность проявляется в самых разнообразных системах, ее математическое описание во многих случаях основывается на использовании относительно простых моделей нелинейных осцилляторов, например, уравнения Дуффинга с внешним гармоническим воздействием [6]. Наличие бистабильности в гармонически возбуждаемом осцилляторе прояв-

ляется в том, что при определенных параметрах системы в фазовом пространстве осциллятора возникает два притягивающих множества – предельные циклы. Каждое из состояний характеризуется своей областью начальных условий, при выборе которых реализуется данное состояние. В этом случае все пространство начальных условий делится на соответствующие “бассейны притяжения” по количеству состояний. При изменении параметров системы, например, внешнего воздействия, возникает гистерезис предельных циклов. На практике обычно это гистерезис гармонических колебаний с различной амплитудой.

В представленной работе мы покажем, что бистабильность и гистерезис могут возникать в результате взаимодействия низкочастотных и высокочастотных колебаний, когда система является моностабильной при наличии только гармонического воздействия. В результате такого взаимодействия в фазовом пространстве системы формируются торы, поэтому мы называем этот эффект гистерезисом торов.

Целью работы является определение физических причин и условий возникновения бистабильности и гистерезиса в результате взаимодействия высокочастотных и низкочастотных колебаний путем анализа динамики диссипативного осциллятора с квадратичной и кубической нелинейностями.

© Д. М. Ваврив, А. Ю. Немец, 2014

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана математическая модель осциллятора с низкочастотным и высокочастотным воздействиями, получены укороченные уравнения. Здесь описаны также известный механизм возникновения бистабильности при гармоническом воздействии и его основные свойства. В разделе 3 показано, что при наличии низкочастотного воздействия в системе возникают дополнительные резонансы, которые могут приводить к появлению бистабильности. Методом повторного усреднения получены укороченные уравнения, описывающие поведение осциллятора в окрестности этих резонансов. В разделе 4 приведены результаты анализа бистабильных состояний, возникающих в результате взаимодействия низкочастотных и высокочастотных колебаний. В разделе 5 представлено обсуждение основных результатов работы.

## 2. Математическая модель

В качестве исходной математической модели рассмотрим уравнение осциллятора с учетом диссипации, квадратичной и кубической нелинейности, а также при наличии внешнего двухчастотного воздействия:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -2\alpha \frac{dx}{dt} - \gamma x^3 - \sigma x^2 + F \cos(\omega_e t) + N \cos(\Omega t). \quad (1a)$$

Здесь  $x$  – обобщенная координата;  $\omega_0$  – собственная частота осциллятора;  $\alpha > 0$  – коэффициент затухания;  $\gamma$ ,  $\sigma$  – коэффициенты кубической и квадратичной нелинейности;  $F$  и  $N$  – амплитуды внешнего высокочастотного и низкочастотного воздействий на частотах  $\omega_e$  и  $\Omega$ . Мы будем рассматривать случай основного резонанса, когда частота  $\omega_e$  близка к собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ ,

$$\omega_e \approx \omega_0. \quad (1б)$$

Частота низкочастотного воздействия  $\Omega$  существенно меньше  $\omega_e$  и соответственно  $\omega_0$ . Приведенное уравнение осциллятора использовалось в [7] для анализа механизмов возникновения хаоса при взаимодействии высокочастотных и низкочастотных колебаний. В настоящей работе эта модель используется для исследования возникновения бистабильности при таком взаимодействии.

Легко показать, что в случае квазилинейного осциллятора, когда все слагаемые в правой части уравнения (1а) являются малыми, взаимодействие между высокочастотными и низкочастотными колебаниями не происходит. Такое взаимодействие может реализоваться только при не малых уровнях низкочастотного воздействия. Этот случай и рассматривается в представленной работе.

Если слагаемое  $N \cos(\Omega t)$  в (1а) не является малым, а остальные слагаемые в правой части (1а) являются малыми, то это уравнение может быть сведено к уравнению квазилинейного осциллятора. Для этого воспользуемся заменой переменных [7]

$$x = z + L(t), \quad (2)$$

где  $L(t) = \frac{N}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \approx \frac{N}{\omega_0^2} \cos(\Omega t)$ . В результате приходим к следующему квазилинейному уравнению осциллятора относительно  $z$ :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = f(z, t), \quad (3)$$

где

$$f(z, t) = -2\alpha \frac{d(z + L(t))}{dt} - \gamma(z + L(t))^3 - \sigma(z + L(t))^2 - F \cos(\omega_e t).$$

К этому уравнению можно применить метод усреднения [8]. Для этого запишем (3) в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 z + f(z, t). \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы уравнений (4) будем искать методом вариации произвольных постоянных.

Записав решение однородного уравнения (3) в виде

$$\begin{aligned} z &= U \cos(\omega_e t) + V \sin(\omega_e t), \\ y &= -U \omega_e \sin(\omega_e t) + V \omega_e \cos(\omega_e t), \end{aligned}$$

сводим (4) к уравнениям стандартного вида, в которых правая часть является малой:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -\frac{\sin(\omega_e t)}{\omega_e} \times \\ \times [(\omega_0^2 - \omega_e^2)(U \cos(\omega_e t) + V \sin(\omega_e t)) + f(U, V, t)], \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\cos(\omega_e t)}{\omega_e} \times \\ \times [(\omega_0^2 - \omega_e^2)(U \cos(\omega_e t) + V \sin(\omega_e t)) + f(U, V, t)]. \end{cases} \quad (5)$$

После применения процедуры усреднения к (5) приходим к следующей системе укороченных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \\ = -\alpha U - \Delta V + \beta V(U^2 + V^2 + 4L^2(t)) + \eta L(t)V, \\ \frac{dV}{dt} = \\ = -\alpha V + \Delta U - \beta U(U^2 + V^2 + 4L^2(t)) - \eta L(t)U - R, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\beta = \frac{3\gamma}{8\omega_e}, \quad \Delta = \frac{(\omega_0^2 - \omega_e^2)}{2\omega_e}, \quad \eta = \frac{\sigma}{\omega_e}, \quad R = \frac{F}{2\omega_e}.$$

Таким образом, мы пришли к системе дифференциальных уравнений с периодически меняющимися коэффициентами. Период изменения коэффициентов определяется периодом низкочастотного воздействия на осциллятор. Эта система уравнений описывает динамику огибающей высокочастотных колебаний, возбуждаемых в осцилляторе (1а). Для удобства последующего анализа перепишем (6) в терминах амплитуды  $A$  и фазы  $\theta$  огибающей колебаний:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\alpha A - R \sin \theta, \\ A \frac{d\theta}{dt} = A(\Delta - \beta A^2 + 4L^2(t)) - \eta L(t)A - R \cos \theta. \end{cases} \quad (7)$$

Амплитуда  $A$  и фаза  $\theta$  связаны с  $U$  и  $V$  следующими соотношениями:

$$U = A \cos \theta, \quad V = A \sin \theta.$$

В отсутствие низкочастотного воздействия  $L(t)$  система уравнений (7) сводится к хорошо известным уравнениям

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\alpha A - R \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \Delta - \beta A^2 - \frac{R}{A} \cos \theta, \end{cases} \quad (8)$$

которые описывают динамику квазилинейного осциллятора, возбуждаемого на частоте, близкой к его собственной частоте.

Напомним основные свойства стационарных колебаний в таком осцилляторе [6], которые нам понадобятся для дальнейшего анализа. Для этого рассмотрим качественные изменения резонансной кривой осциллятора при различных уровнях амплитуды внешнего высокочастотного сигнала. В принятых обозначениях резонансная кривая представляет собой зависимость интенсивности стационарных колебаний  $I \equiv A_0^2$  от параметра расстройки частоты  $\Delta = \frac{(\omega_0^2 - \omega_e^2)}{2\omega_e} \approx \omega_0 - \omega_e$ . Значения интенсивности колебаний находятся из уравнения для стационарных состояний, которое следует из (8),

$$\alpha^2 I + I(\Delta - \beta I)^2 = R^2. \quad (9)$$

Типичные резонансные кривые, определяемые этим уравнением, приведены на рис. 1. При  $R \rightarrow 0$  резонансная кривая симметрична относительно  $\Delta = 0$  и стремится к резонансной кривой линейного осциллятора (кривая 1 на рис. 1)

$$I = R^2 / (\alpha^2 + \Delta^2).$$

Как следует из (9), при увеличении  $R$  резонансная кривая становится ассиметричной (см. кривую 2 на рис. 1). Положение максимума резонансной кривой на оси  $\Delta$  определяется величиной  $\beta R^2 / \alpha^2$ , но при этом значение максимальной интенсивности колебаний, равное  $R^2 / \alpha^2$ , не зависит от параметра нелинейности. При превышении  $R$  некоторого критического значения  $R_{кр}$  происходит “опрокидывание” резонансной кривой и в некотором диапазоне расстроек частот  $\Delta$  существуют три стационарных состояния (см. кривую 3 на рис. 1). Определим значение  $R_{кр}$ . Для этого из (9) находим выражение для производной  $dI/d\Delta$ :

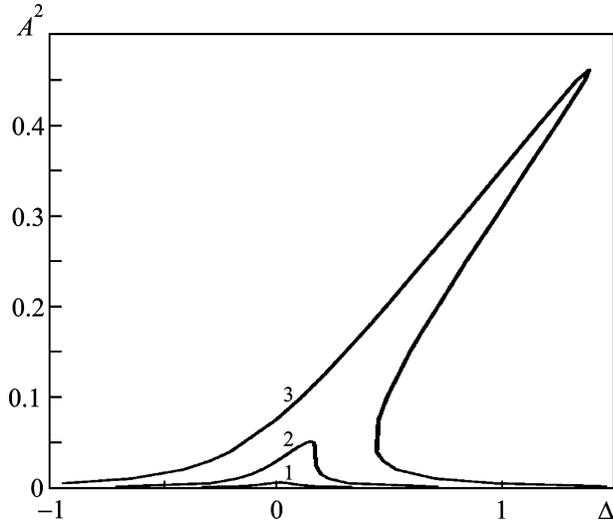


Рис. 1. Качественные изменения резонансной кривой осциллятора в зависимости от амплитуды внешнего воздействия

$$\frac{dI}{d\Delta} = \frac{2\beta I^2 - 2\Delta I}{3\beta^2 I^2 - 4\Delta\beta I + \alpha^2 + \Delta^2}.$$

Значение производной на границах области существования трех стационарных состояний стремится к бесконечности. Для этого необходимо, чтобы выражение в знаменателе могло принимать нулевые значения, т. е. чтобы существовали действительные корни квадратного уравнения

$$3\beta^2 I^2 - 4\Delta\beta I + \alpha^2 + \Delta^2 = 0$$

относительно  $I$ . Началу “опрокидывания” резонансной кривой соответствует случай, когда эти корни совпадают. Это позволяет найти значение  $R_{срп}$ , а также соответствующее значение  $\Delta$ :

$$R_{срп} \equiv \frac{2\alpha}{3} \left( \frac{2\alpha\sqrt{3}}{\beta} \right)^{1/2}, \quad (10a)$$

$$\Delta_{срп} \equiv \text{sign}(\beta)\sqrt{3}\alpha. \quad (10б)$$

Напомним, что  $\Delta = \omega_0 - \omega_e$  представляет собой разницу между собственной частотой осциллятора и частотой внешнего высокочастотного воздействия. Таким образом, критическое значение  $\Delta_{срп}$  определяется только знаком параметра нелинейности и значением параметра диссипации. При увеличении амплитуды внешнего воздействия размеры петли гистерезиса монотонно растут.

Анализ устойчивости стационарных состояний осциллятора проводится стандартным способом путем определения корней характеристического уравнения. Для системы уравнений (8) характеристические числа определяются выражением

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{(\beta I_{st} - \Delta)(\Delta - 3\beta I_{st})}.$$

Здесь  $I_{st}$  – значения стационарных состояний, определяемых уравнением (9). Анализ выражения для  $\lambda_{1,2}$  совместно с этим уравнением показывает, что при однозначной зависимости  $I(\Delta)$  и для рассматриваемого случая  $\alpha > 0$  стационарное состояние всегда устойчиво. При возникновении трех стационарных состояний два из них (с максимальным и минимальными значениями интенсивности) устойчивы, а третье состояние является неустойчивым типа “седло”. Таким образом, система становится бистабильной и в ней возникает гистерезис при изменении частоты внешнего воздействия. Возбуждение верхней или нижней гистерезисной петли резонансной кривой зависит от направления изменения частоты воздействия, т. е. от предыстории системы.

Наличие седловых состояний приводит к возникновению хаоса в таком квазилинейном осцилляторе при дополнительном периодическом возмущении системы. Таким возмущением может быть, например, дополнительное высокочастотное или низкочастотное гармоническое воздействие [7, 9, 10]. Механизм возникновения хаоса связан с пересечением устойчивого и неустойчивого многообразий указанного седлового состояния.

В следующем разделе мы покажем, что дополнительное периодическое низкочастотное воздействие может вызывать также возникновение других седловых состояний, которые приводят к возникновению нового типа бистабильности и гистерезиса.

### 3. Вторичное усреднение

Представим систему уравнений (6) в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -\Delta V + F_1(U, V, t), \\ \frac{dV}{dt} = +\Delta U - R + F_2(U, V, t), \end{cases} \quad (11)$$

где  $F_1(U, V, t) = -\alpha U + \beta V(U^2 + V^2 + 4L^2(t)) +$

$\eta L(t)V$ ,  $F_2(U, V, t) = -\alpha V - \beta U(U^2 + V^2 + 4L^2(t)) - \eta L(t)U$  – функции, рассматриваемые как малое возмущение в (11).

Запишем решение системы невозмущенных уравнений (11), когда  $F_1 = F_2 = 0$ :

$$U = B \cos(\Delta t + \psi) + R/\Delta, \tag{12}$$

$$V = B \sin(\Delta t + \psi),$$

где  $B$  и  $\psi$  – константы интегрирования. Таким образом, невозмущенная система представляет собой осциллятор с собственной частотой  $\Delta$ . Отсюда следует, что в системе уравнений (11) может наблюдаться резонанс при условии, если характерные частоты изменения  $L(t)$  и  $L^2(t)$  будут близки к  $\Delta$ , т. е. при

$$\Omega \approx \Delta, \tag{13a}$$

$$2\Omega \approx \Delta. \tag{13б}$$

Отметим, что эти условия, в отличие от (16), соответствуют вторичному резонансу в системе, который реализуется в результате трехчастотного взаимодействия с частотами  $\Omega$ ,  $\omega_e$  и  $\omega_0$ .

Для анализа динамики системы (11) для каждого из этих резонансов перейдем к новым переменным:

$$U = B(t) \cos[n\Omega t + \psi(t)] + R/\Delta, \tag{14}$$

$$V = B(t) \sin[n\Omega t + \psi(t)],$$

где  $B(t)$  и  $\psi(t)$  рассматриваются как новые независимые переменные. Значение  $n=1$  соответствует резонансу (13a), а  $n=2$  – резонансу (13б).

Система (11) в этих переменных записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = (-\Delta B \sin(n\Omega t + \psi) + F_1(U, V, t)) \times \\ \times \cos(n\Omega t + \psi) + (\Delta B \cos(n\Omega t + \psi) + F_2(U, V, t)) \times \\ \times \sin(n\Omega t + \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} = (nB\Omega - \Delta B \sin(n\Omega t + \psi) + F_1(U, V, t)) \times \\ \times \sin(n\Omega t + \psi) + (\Delta B \cos(n\Omega t + \psi) + F_2(U, V, t)) \times \\ \times \cos(n\Omega t + \psi). \end{cases} \tag{15}$$

Применяя к этим уравнениям процедуру усреднения, приходим к следующим уравнениям для первого резонанса ( $n=1$ ):

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = -\alpha B - \frac{\sigma NR}{2\Omega\omega_0^3} \sin \psi, \\ B \frac{d\psi}{dt} = B(\Delta' - \beta B^2) - \frac{\sigma NR}{2\Omega\omega_0^3} \cos \psi, \end{cases} \tag{16}$$

$$\text{где } \Delta' = \Delta - \Omega - \frac{2\beta R^2}{\Omega^2} - \frac{2\beta N^2}{\omega_0^4}.$$

Аналогичные усредненные уравнения для второго резонанса ( $n=2$ ) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = -\alpha B - \frac{\beta RN^2}{2\Omega\omega_0^4} \sin \psi, \\ B \frac{d\psi}{dt} = B(\Delta'' - \beta B^2) - \frac{\beta RN^2}{2\Omega\omega_0^4} \cos \psi, \end{cases} \tag{17}$$

где  $\Delta'' = \Delta - 2\Omega - \frac{2\beta R^2}{\Delta^2} - \frac{2\beta N^2}{\omega_0^4}$ . При записи этих уравнений мы воспользовались тем, что  $\omega_0 \approx \omega_e \gg \Omega$ .

Отметим область применимости полученных уравнений. Для применения метода усреднения к уравнению (15) необходимо, чтобы характерный период внешнего воздействия  $T$ , который здесь равен  $2\pi/(n\Omega)$ , ( $n=1, 2$ ), был существенно меньше характерного времени релаксации системы, равного  $1/\alpha$ . Это приводит к следующему ограничению на частоту модуляции:

$$n\Omega \gg 2\pi\alpha.$$

Поскольку системы уравнений (16) и (17) были получены при условии выполнения резонансных условий (13), приведенное выше соотношение накладывает также следующее ограничение на величину расстройки частоты:

$$|\Delta| \gg 2\pi\alpha.$$

Запишем связь исходной переменной  $x(t)$  (см. (1)) с введенными новыми независимыми переменными. Учитывая (2) и (14), находим

$$x(t) = B \cos(\omega_e t - n\Omega t + \psi) + \frac{R}{\Delta} \cos(\omega_e t) + \frac{N}{\omega_0^2} \cos(\Omega t). \tag{18}$$

Как и следовало ожидать, колебания в осцилляторе представляют собой суперпозицию низкочастотных и высокочастотных колебаний на частотах внешнего воздействия (два последних слагаемых), а также колебания на частоте  $\omega_e - n\Omega$ , возникновение которого обусловлено наличием нелинейности в осцилляторе. В фазовом пространстве исходного уравнения (1а) такому колебанию соответствует возникновение двумерного тора. Путем последовательного применения двух процедур усреднения мы свели задачу об исследовании бифуркаций двумерных торов к исследованию бифуркаций состояний равновесия автономных систем дифференциальных уравнений (16), (17).

#### 4. Гистерезис при взаимодействии высокочастотных и низкочастотных колебаний

По своей структуре уравнения (16) и (17) аналогичны уравнениям (8). Применим к ним методику определения условий возникновения гистерезиса, описанную в разделе 2. В результате находим, что в системах (16) и (17) при определенных значениях  $\Delta$  существует три стационарных состояния, два из которых – устойчивые и одно – седловое, при выполнении соответственно следующих условий:

$$NR > (NR)_{crs1} \equiv \frac{4\Omega\omega_0^3\alpha}{3\sigma} \left( \frac{2\alpha\sqrt{3}}{\beta} \right)^{1/2}, \quad (19)$$

$$N^2R > (N^2R)_{crs2} \equiv \frac{4\Omega\omega_0^3\alpha}{3\beta} \left( \frac{2\alpha\sqrt{3}}{\beta} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Таким образом, здесь гистерезис (бистабильные состояния) возникает только в результате взаимодействия высокочастотных и низкочастотных колебаний, воздействующих на осциллятор. Это следует из того, что порог возникновения бистабильности, как и интенсивность возбуждаемых колебаний, определяется произведением амплитуд колебаний внешнего воздействия. Гистерезис при выполнении резонансного условия (13а) возникает только при наличии квадратичной и кубической нелинейностей в осцилляторе (1а). В случае второго резонанса ( $2\Omega \approx \Delta$ ) наличие квадратичной нелинейности не требуется и гистерезис возникает только при нали-

чии кубической нелинейности. Для этого резонанса порог возникновения гистерезиса более существенно зависит от амплитуды низкочастотного воздействия, чем для первого резонанса.

Рассмотрим теперь расположение гистерезисной петли на шкале частот в терминах параметра  $\Delta$ , определяющего разницу частот высокочастотного воздействия и собственной частоты исходного осциллятора (1а). Модифицируя критерий (10б) для этих случаев, находим, что гистерезисная петля начинает возникать при

$$\Delta_{crs} = n\Omega + \frac{2\beta R^2}{(n\Omega)^2} + \frac{2\beta N^2}{\omega_0^4} + \text{sign}(\beta)\sqrt{3}\alpha,$$

где  $n=1$  для резонанса (13а) и  $n=2$  для резонанса (13б). Здесь имеются также существенные отличия от случая гармонически возбуждаемого осциллятора. Критическое значение расстройки частоты зависит не только от значения диссипации, но и от значения параметра кубической нелинейности, от амплитуд внешнего воздействия и от частоты модуляции.

Проиллюстрируем условия возникновения бистабильности в рассматриваемом осцилляторе на плоскости параметров  $R/R_{crp}$ ,  $N/N_0$ , приведенной на рис. 2. Здесь для нормировки амплитуд внешнего воздействия использовались величина  $R_{crp}$ , определяемая выражением (10а), и величина

$$N_0 = \frac{2\Omega\omega_0^3}{\sigma}.$$

При такой нормировке прямая  $R/R_{crp} = 1$  (линия 1 на рис. 2) разделяет плоскость параметров на две

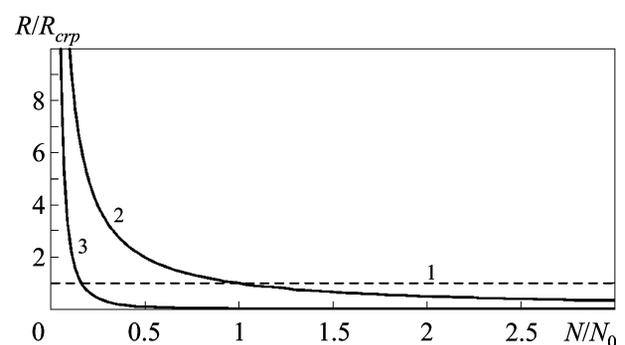


Рис. 2. Границы областей возникновения бистабильности для различных резонансов. Бистабильность может возникать в областях, расположенных над приведенными кривыми

области. При выборе параметров осциллятора из области выше этой прямой может возникать бистабильность при высокочастотном гармоническом воздействии, а из области ниже этой прямой бистабильность возникать не может.

Граница возникновения бистабильности при двухчастотном воздействии для вторичного резонанса (13а) определяется уравнением

$$R/R_{crp} = N_0/N$$

и обозначена кривой 2 на рис. 2. Для резонанса (13б) уравнение кривой, разделяющей области моностабильности и бистабильности, записывается в виде

$$\frac{R}{R_{crp}} = \frac{\sigma^2}{2\Omega\beta\omega_0^2} \frac{N_0^2}{N^2}.$$

На рис. 2 это кривая 3, которая построена для следующих параметров осциллятора:  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.001$ ,  $\Omega = 0.05$ ,  $\gamma = 0.001$ ,  $\sigma = 0.001$ . Выбор  $\omega_0 = 1$  означает, что все частоты, входящие в (1а), нормированы на эту частоту и введено безразмерное время  $t\omega_0$ .

Возвращаясь к плоскости параметров, приведенной на рис. 2, отметим, что бистабильность, соответствующая резонансам (1а), (13а), (13б), возникает в областях выше соответствующих кривых. В зависимости от параметров осциллятора в нем может реализоваться от одного до трех типов бистабильности при соответствующем выборе частоты внешнего воздействия. Важным является то, что гистерезис при двухчастотном воздействии может возникать при амплитуде высокочастотного воздействия, гораздо меньше той, которая требуется для возникновения бистабильности при гармоническом воздействии. Как следует из рис. 2 и из выражения (19), значение этой амплитуды может быть как угодно малым.

Примеры резонансных кривых для резонансов (19) и (20) приведены на рис. 3 и рис. 4 соответственно при тех же параметрах осциллятора, при которых построен рис. 2. Здесь амплитуда высокочастотного воздействия  $R$  выбрана равной  $R_{crp}/2$ , т. е. только при высокочастотном воздействии бистабильность возникать не может. Из приведенных кривых видно, что размер петли гистерезиса увеличивается с ростом амплитуды низкочастотного воздействия. Особенно существ-

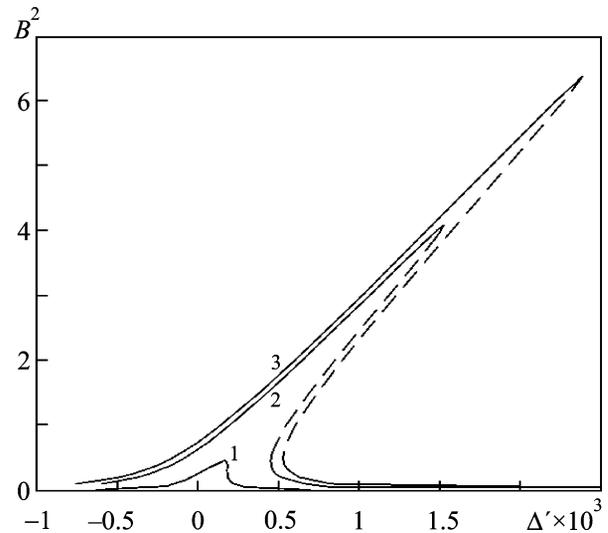


Рис. 3. Резонансные кривые для первичного резонанса (19) при  $R/R_{crp} = 0.5$  и различных значениях амплитуды внешнего низкочастотного воздействия:  $N = N_{crs1}/2$  — кривая 1,  $N = 2N_{crs1}$  — кривая 2,  $N = 2.5N_{crs1}$  — кривая 3

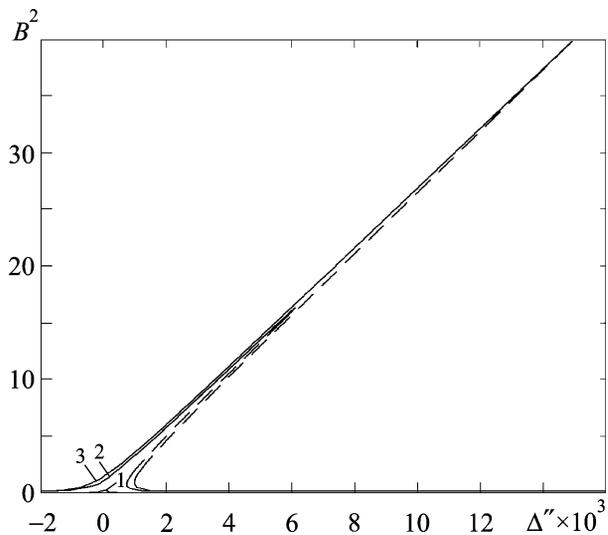


Рис. 4. Резонансные кривые для вторичного резонанса (20) при  $R/R_{crp} = 0.5$  и различных значениях амплитуды внешнего низкочастотного воздействия:  $N = N_{crs1}/2$  — кривая 1,  $N = 2N_{crs1}$  — кривая 2,  $N = 2.5N_{crs1}$  — кривая 3

венным является такое увеличение для случая резонанса (20).

Как уже отмечалось, образом возбуждаемых колебаний в фазовом пространстве исходного осциллятора являются двумерные торы. В области гистерезиса в фазовом пространстве сосуществуют два тора со своими «бассейнами притяжения». Пример сосуществования торов

приведен на рис. 5 для случая, отвечающего условию (19). Внутренний тор соответствует возбуждению колебаний на нижней ветке, а внешний тор – на верхней ветке гистерезисной петли, приведенной на рис. 3.

## 5. Обсуждение и заключение

Таким образом, мы показали, что взаимодействие низкочастотных и высокочастотных колебаний приводит к возникновению нового типа бистабильности и гистерезиса в нелинейном осцилляторе. Физической причиной такой бистабильности являются вторичные резонансы, которые возникают в результате трехчастотного взаимодействия между частотами внешнего воздействия и собственной частотой осциллятора. Для определения условий возникновения бистабильности использована техника повторного усреднения, что позволило получить аналитические выражения для границ областей параметров с различным числом стационарных состояний.

Указанная бистабильность возникает при наличии как кубической, так и квадратичной нелинейности. Это отличает ее от бистабильности, возникающей при высокочастотном гармоническом воздействии на осциллятор, когда только

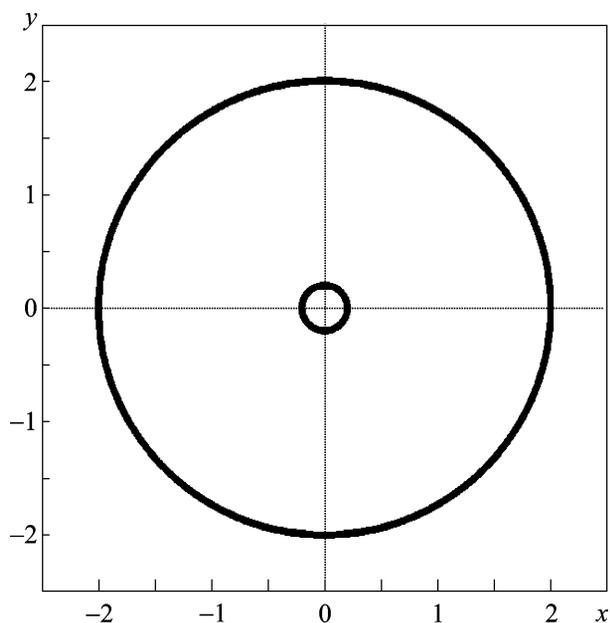


Рис. 5. Фазовый портрет осциллятора для случая сосуществования двух торов, соответствующих колебаниям на разных ветках гистерезисной кривой на рис. 3 при  $\Delta' = 0.6$  и  $N = 2.5N_{crs1}$

кубическая нелинейность может приводить к ее появлению. Другое важное отличие этих двух случаев заключается в том, что при двухчастотном воздействии бистабильность может возникать при сколь угодно малых (но конечных) значениях амплитуды высокочастотного воздействия. То есть даже в осцилляторе, для которого резонансная кривая практически не отличается от резонансной кривой линейной системы, может возникать бистабильность при достаточно большом уровне низкочастотного воздействия.

Двумерные торы, возникающие в фазовом пространстве осциллятора при двухчастотном воздействии, являются образом возбуждаемых колебаний, поэтому мы говорим о бистабильности и гистерезисе торов применительно к рассматриваемому случаю. Тем самым мы подчеркиваем тот факт, что обнаруженный механизм бистабильности не может реализоваться для случая предельных циклов, которые формируются в фазовом пространстве осциллятора при его гармоническом возбуждении.

Обнаруженные явления в силу достаточной общности исходной математической модели могут наблюдаться в разнообразных физических, механических, биологических и других системах. Перспективным представляется применение полученных результатов для исследования конкретных систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. – М.: Мир, 1988. – 518 с.
2. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
3. Бозорт Р. Ферромагнетизм. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 784 с.
4. Solomon M. J. Hysteresis meets the cell cycle // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 2003. – Vol. 100, No. 3. – P. 771–772.
5. Guidi G. M. and Goldbeter A. Bistability without Hysteresis in Chemical Reaction Systems: A Theoretical Analysis of Irreversible Transitions between Multiple Steady States // J. Phys. Chem. A. – 1997. – Vol. 101, Is. 49. – P. 9367–9376.
6. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 392 с.
7. Ваврис Д. М., Шугимага Д. В. Хаос в осцилляторе Дуффинга с высокочастотным и низкочастотным внешним воздействием // Радиофизика и радиоастрономия. – 2000. – Т. 5, № 3. – С. 256–265.

8. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. – Киев: Из-во АН УССР, 1955. – 286 с.
9. Vavriv D. M. and Oksasoglu A. Stability of varactor circuits // Electron. Lett. – 1994. – Vol. 30, Is. 6. – P. 462–463.
10. Belogortsev A. V., Vavriv D. M. and Tretyakov O. A. Destruction of quasiperiodic oscillations in weakly nonlinear systems // Appl. Mech. Rev. – 1994. – Vol. 46, No. 7. – P. 372–384.

*Д. М. Ваврив, А. Ю. Німець*

Радіоастрономічний інститут НАН України,  
вул. Червонопрапорна, 4, м. Харків, 61002, Україна

#### ГІСТЕРЕЗИС ТОРІВ

Наведено результати теоретичних досліджень динаміки нелінійного осцилятора з кубічною та квадратичною нелінійністю при одночасному низькочастотному та високочастотному впливові. Знайдено новий механізм виникнення бістабільності та гістерезиса в результаті такої взаємодії. Встановлено, що цей механізм проявляється як бістабільність

та гістерезис торів, що утворюються в фазовому просторі осцилятора. Виконано порівняльний аналіз поведінки осцилятора при резонансному гармонічному впливові та двох-частотному впливові.

*D. M. Vavriv and A. Yu. Nimets*

Institute of Radio Astronomy,  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
4, Chervonopraporna St., Kharkiv, 61002, Ukraine

#### TORUS HYSTERESIS

Theoretical studies of the dynamics of a nonlinear oscillator with cubic and quadratic nonlinearities simultaneously excited by low- and high-frequency external forcing are presented. A new mechanism of the appearance of bistability and hysteresis due to such an interaction is discovered. This mechanism manifests as the bistability and hysteresis of tori formed in the oscillator phase space. A comparative analysis of the oscillator behavior under the resonant harmonic excitation and under the dual frequency excitation is made.

*Стаття поступила в редакцію 08.05.2014*