

УДК 538.566

О. М. ШАРАБУРА, Д. Б. КУРИЛЯК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України,  
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79060, Україна  
E-mail: shom@ipm.lviv.ua

## ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ЗБУДЖЕННЯ БІКОНУСА, СФОРМОВАНОГО НАПІВНЕСКІНЧЕННИМ ТА ЗРІЗАНИМ НАПІВНЕСКІНЧЕННИМ КОНУСАМИ

Отримано розв'язок осесиметричної задачі дифракції електромагнітної хвилі на ідеально провідній біконічній поверхні, одне плече якої є напівнескінченний конус, а друге – напівнескінченний конус зі зрізаною вершиною. В якості джерела випромінювання використано круговий виток магнітного струму. Задача розв'язана методом власних функцій підобластей із застосуванням процедури аналітичної регуляризації. За умови, що поверхня зрізаного конуса близька до площини з круговим отвором, проаналізовано вплив модового складу поля джерела збудження і геометричних параметрів біконуса на його ширококутні властивості і проникнення електромагнітної енергії через апертуру.

Ключові слова: нескінченний біконус, зрізана вершина, аналітична регуляризація, круговий отвір, конічний провідник

### 1. Вступ

Постійний розвиток засобів безконтактної мікрохвильової діагностики сприяв появі численних наукових праць, присвячених дослідженню електродинамічних характеристик апертур [1–3], щілин [4, 5], зондів [6] та їх поєднань [7, 8]. Такі дослідження виконувались як експериментально [1], так і теоретичними методами [3, 6]. В останні десятиліття широко застосовуються прямі числові методи [7–9], які поєднують з експериментальними дослідженнями [4]. Широке коло таких структур піддається моделюванню з допомогою біконічних поверхонь. Проте, незважаючи на значну кількість публікацій, присвячених їх електродинамічному аналізу, математично строгих досліджень є небагато.

У монографії [10] строгі розв'язки задач дифракції на розгалуженнях плоских і циліндричних хвилеводів та решітках отримані методом аналітичної регуляризації (напівобертання). Метод аналітичної регуляризації для строгого аналізу електродинамічних характеристик симетричних біконусів було розвинуто в [11], а для конічних монополів та диско-конічних розсіювачів у [12, 13]. Тут цей підхід використано для аналізу електродинамічних характеристик біконуса, сформованого з напівнескінченного та напівнескінченного зі зрізаною вершиною конусів. Такою структурою можна моделювати поле випромінювання зонда над отвором або поле випромінювання щілинних антен. У дослідженні вважалося, що залежність

поля від часу задається множителем  $e^{-i\omega t}$ , який опускався.

### 2. Постановка задачі

Розглянемо осесиметричну задачу дифракції  $TM$ -хвилі на ідеально провідній біконічній поверхні  $Q = Q_1 \cup Q_2$ , заданій у сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$Q_1 : \{r \in (0, \infty), \theta = \gamma_1; \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

$$Q_2 : \{r \in (a_1, \infty), \theta = \gamma_2; \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

де  $\gamma_2 > \gamma_1$  (див. рис. 1).

Нехай біконус  $Q$  збуджується витком магнітного струму з густиною, заданою у вигляді

$$J(r, \theta) = I_\varphi^{(m)} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) / (r_0 \sin \theta_0). \quad (1)$$

Тут  $I_\varphi^{(m)}$  – магнітний струм;  $\delta(\dots)$  – дельта функція Дірака;  $r_0, \theta_0$  – координати джерела;  $a_1 < r_0 < \infty$ ;  $\gamma_1 < \theta_0 < \gamma_2$ . Поле магнітного струму (1) має ненульові компоненти  $E_r, E_\theta, H_\varphi$ , які виражаються через  $H_\varphi$ -складову за допомогою співвідношень:

$$E_r = -\frac{1}{i\omega \epsilon} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\varphi), \quad (2)$$

$$E_\theta = \frac{1}{i\omega \epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi),$$

де  $\epsilon$  – діелектрична проникність середовища.

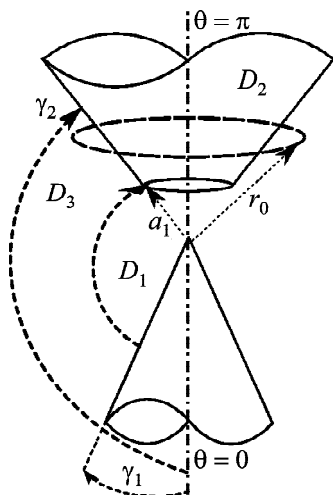


Рис. 1. Геометрія задачі

Беручи до уваги співвідношення (2), задачу дифракції поля витка (1) на біконусі  $Q$  зводимо до змішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца відносно невідомої  $H_\varphi$ -складової дифрагованого поля:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial H_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{H_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + k^2 H_\varphi = 0.$$

Тут  $k$  – хвильове число,  $k = k' + ik'' = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$ ,  $k', k'' > 0$ ;  $\mu$  – магнітна проникність середовища.

На поверхні біконуса  $Q$  повинні виконуватися гранична умова для тангенціальної компоненти повного поля  $E_r^t(r, \theta) = 0$ , а також умова випромінювання та умова обмеженості електромагнітної енергії поля у будь-якому скінченному об'ємі.

Для розв'язання крайової задачі розглянемо області, сформовані біконусом  $Q$ :

$$\begin{aligned} D_1 : \{r \in [0, a_1], \theta \in (\gamma_1, \pi]; \varphi \in [0, 2\pi)\}, \\ D_2 : \{r \in (a_1, \infty), \theta \in (\gamma_2, \pi]; \varphi \in [0, 2\pi)\}, \\ D_3 : \{r \in (a_1, \infty), \theta \in (\gamma_1, \gamma_2); \varphi \in [0, 2\pi)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

У кожній з областей (3) магнітну компоненту повного поля подамо рядами власних функцій у вигляді:

$$H_\varphi^t(r, \theta) = \begin{cases} \frac{i\omega\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(1)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{z_n-1/2}(-\cos \theta) \frac{I_{z_n}(\rho)}{I_{z_n}(\rho_1)}, & (r, \theta) \in D_1; \\ \frac{i\omega\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(2)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\mu_n-1/2}(-\cos \theta) \frac{K_{\mu_n}(\rho)}{K_{\mu_n}(\rho_1)}, & (r, \theta) \in D_2; \\ H_\varphi^i(\rho, \theta) + \\ + \frac{i\omega\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(3)} \Psi_{\nu_n-1/2}(\cos \theta) \frac{K_{\nu_n}(\rho)}{K_{\nu_n}(\rho_1)}, & (r, \theta) \in D_3. \end{cases} \quad (4)$$

Тут  $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}$  – невідомі коефіцієнти розкладу;  $I_\nu(\rho), K_\nu(\rho)$  – відповідно модифікована функція Бесселя та функція Макдональда;  $\rho = sr, \rho_1 = sa_1, s = -ik$ ;  $P_{\chi-1/2}(-\cos \theta)$  – функції Лежандра;

$$\Psi_{\nu-1/2}(\cos \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \theta}, & n = 1, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} [R_{\nu-1/2}(\cos \theta)], & n > 1, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} R_{\nu-1/2}(\cos \theta) &= P_{\nu-1/2}(\cos \theta) P_{\nu-1/2}(-\cos \gamma_1) - \\ &- P_{\nu-1/2}(-\cos \theta) P_{\nu-1/2}(\cos \gamma_1); \end{aligned}$$

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\nu_n\}_{n>1}^{\infty}$  – зростаючі послідовності дійсних додатних коренів трансцендентних рівнянь:

$$\begin{aligned} P_{z_n-1/2}(-\cos \gamma_1) &= 0, \\ P_{\mu_n-1/2}(-\cos \gamma_2) &= 0, \\ R_{\nu_n-1/2}(\cos \gamma_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Множина індексів  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  будується так: перший елемент цієї послідовності  $v_1 = 1/2$  – це мінімальний додатній корінь рівняння  $R_{v_{n-1/2}}(\cos \gamma_2) = 0$ , що враховує формування *ТЕМ*-моди, для  $n > 1$  враховуються тільки корені, залежні від кутових параметрів біконічної області ( $v_n \neq n + 1/2$ ).

Магнітна складова первинного поля  $H_\varphi^i$  визначена в [11] і відповідає  $H_\varphi^i$ -компоненті повного поля витка (1) у нескінченному біконусі:

$$H_\varphi^i(\rho, \varphi) = \frac{i\omega\varepsilon}{\sqrt{\rho\rho_0}} \times \sum_{j=1}^\infty B_j \Psi_{v_j-1/2}(\cos \theta) \begin{cases} K_{v_j}(\rho) I_{v_j}(\rho_0), & r \geq \rho_0, \\ I_{v_j}(\rho) K_{v_j}(\rho_0), & r \leq \rho_0, \end{cases} \quad (6)$$

$(r, \theta) \in D_3$ .

Тут  $\rho_0 = sr_0$ ;  $B_j = -\rho_0 b_j I_\varphi^{(m)} \Psi_{v_j-1/2}(\cos \theta_0)$ ,

$$b_j = \begin{cases} \left[ \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right) \right]^{-1}, & j = 1, \\ \frac{1}{\sin \gamma_2} \frac{2v_j}{v_j^2 - 0.25} \times \left[ \frac{\partial}{\partial v} R_{v_j-1/2}(\cos \gamma_2) \frac{\partial}{\partial \gamma} R_{v_j-1/2}(\cos \gamma_2) \right]^{-1}, & j > 1. \end{cases}$$

Зображення (4), (6) з урахуванням (5) забезпечують виконання граничних умов на  $Q$ , умову випромінювання та умову обмеженості енергії електромагнітного поля у вершині напівнескінченного конуса  $Q_1$ .

### 3. Розв'язання задачі

Використовуючи умови спряження  $E_\theta(a_1 \pm 0, \theta)$  і  $H_\varphi(a_1 \pm 0, \theta)$  компонент поля на сферичному сегменті  $\{r = a_1, \gamma_1 < \theta \leq \pi\}$ , а також вирази (2), (4), (6) і формули перерозкладу функцій Лежандра в конічній та біконічній областях, зводимо задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР), яку після процедури аналітичної регуляризації [14] записуємо у вигляді

$$X - A^{-1}(A - A_{11})X = A^{-1}F. \quad (7)$$

Тут  $X = \{x_n\}_{n=1}^\infty$  – невідомий вектор,  $x_n = x_n^{(1)}(z_n^2 - 0.25)P_{z_n-1/2}(-\cos \gamma_2)$ ;  $A_{11}$  – нескінченна матриця з елементами

$$a_{jn} = \frac{\rho_1 W[K_{\xi_j} I_{z_n}]_{\rho_1}}{\Delta_{jn} K_{\xi_j}(\rho_1) I_{z_n}(\rho_1)},$$

де  $\Delta_{jn} = \xi_j^2 - z_n^2$ ,  $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty : \{v_j\}_{j=1}^\infty \cup \{\mu_j\}_{j=1}^\infty$  – зростаюча послідовність індексів;  $F = \{f_j\}_{j=1}^\infty$  – відомий вектор,

$$f_j = \begin{cases} -\sqrt{\rho_0} I_\varphi^{(m)} \bar{b}_j \Psi_{\xi_j-1/2}(\cos \theta_0) \times \\ \times \frac{K_{\xi_j}(\rho_0)}{K_{\xi_j}(\rho_1)}, & \xi_j \in \{v_p\}_{p=1}^\infty, \\ 0, & \xi_j \notin \{v_p\}_{p=1}^\infty, \end{cases}$$

де

$$\bar{b}_j = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ \left[ \sin \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma} R_{v_j-1/2}(\cos \gamma_2) \right]^{-1}, & j > 1. \end{cases}$$

Матричні елементи регуляризуючих операторів  $A$ ,  $A^{-1}$  записуємо у вигляді [14]:

$$a_{jm} = (\xi_j - z_m)^{-1},$$

$$\tau_{nj} = \left\{ \left[ [M_-(\xi_j)]^{-1} \right]' [M_-(z_n)]' (z_n - \xi_j) \right\}^{-1}.$$

Тут функцію  $M_-(v)$  отримуємо в результаті факторизації парної мероморфної функції

$$M(v) = \frac{P_{v-1/2}(-\cos \gamma_1) \cos(\pi v)}{(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}(-\cos \gamma_2) R_{v-1/2}(\cos \gamma_2)}$$

у вигляді

$$M(v) = M_+(v) M_-(v),$$

де  $M_+(v)$ ,  $M_-(v)$  – регулярні і відмінні від нуля відповідно у півплощинах  $\operatorname{Re}(v) > -1/2$ ,  $\operatorname{Re}(v) < 1/2$ ;  $M_\pm(v) = O(v^{-1/2})$  при  $|v| \rightarrow \infty$  в областях регулярності. Явний вираз для функції  $M_-(v)$  наведений в [11].

НСЛАР (7) допускає розв'язок у класі послідовностей  $x_n = O(n^{-1/2})$  при  $n \rightarrow \infty$ , що забезпечує виконання умови Мейкснера на краю  $Q_2$ .

Вирази для невідомих коефіцієнтів розкладу в (4) знаходимо з розв'язку НСЛАР (7) за формулами:

$$x_n^{(1)} = x_n/q(z_n, \gamma_2), \quad (8)$$

$$x_j^{(2)} = \bar{\alpha}(\mu_j, \gamma_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\mu_j^2 - z_n^2}, \quad (9)$$

$$x_j^{(3)} = \alpha_j(\gamma_1, \gamma_2) K_{\nu_j}(\rho_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\nu_j^2 - z_n^2} \frac{\rho_1 W[I_{\nu_j} I_{z_n}]_{\rho_1}}{I_{z_n}(\rho_1)}. \quad (10)$$

Тут

$$\alpha_j(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} -[\ln(\operatorname{ctg}(\gamma_1/2) \operatorname{tg}(\gamma_2/2))]^{-1}, & j=1, \\ -2\nu_j [(v_j^2 - 0.25) \partial/\partial v R_{\nu_j-1/2}(\cos \gamma_2)]^{-1}, & j>1; \end{cases}$$

$$\bar{\alpha}(\mu_j, \gamma_2) = -2\mu_j \left[ (\mu_j^2 - 0.25) \frac{\partial}{\partial \mu} P_{\mu_j-1/2}(-\cos \gamma_2) \right]^{-1}.$$

Співвідношення (8)–(10) дозволяють визначити компоненти поля у будь-якій точці простору за формулами (2) і (4).

#### 4. Аналіз числових результатів

Досліджено діаграми спрямованості та потужності випромінювання. Ці характеристики визначено відповідно за формулами:

$$D(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} |r H_{\varphi} e^{-ikr}|,$$

$$R = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\beta_1}^{\beta_2} E_{\theta} H_{\varphi}^* r^2 \sin \theta d\theta,$$

де  $\beta_1 = \gamma_2$ ,  $\beta_2 = \pi$  для конічної та  $\beta_1 = \gamma_1$ ,  $\beta_2 = \gamma_2$  для біконічної областей;  $H_{\varphi}^*$  – комплексно спряжена величина до  $H_{\varphi}$ .

У обчисленні аналізувалися безрозмірні величини, які отримані нормуванням  $H_{\varphi}$  на  $i\omega \epsilon I_{\varphi}^{(m)}$ . Крім того, вважалося, що опір середовища

$Z = \sqrt{\mu/\epsilon} = 1$ . У дослідженні тут і надалі в біконічній області  $D_3$  розглядається дифраговане поле, а в конічній  $D_2$  – повне поле. Це пов'язано з тим, що такі поля порівняні за значенням модуля комплексної амплітуди.

На рис. 2 показано залежність похибки обчислення потужності випромінювання в конічну область  $D_2$  від порядку редукції НСЛАР (7), яка знаходилась за формулою

$$\delta = \frac{|R_{N+\Delta} - R_N|}{R_N},$$

де  $N$  – порядок редукції;  $R_N$  – потужність випромінювання, обчислена з порядком редукції  $N$ ;  $\Delta$  – приріст  $N$ .

Як видно із поведінки кривих на рис. 2, для  $ka_1 > 9$  похибка  $\delta$  не перевищує 1% з  $N > 16$ .

Для перевірки умов спряження знаходилась магнітна компонента повного поля в областях  $D_1 - D_3$ . Криві, наведені на рис. 3, ілюструють добре виконання умов спряження для різних геометричних параметрів біконуса.

Досліджено характеристики  $R$  і  $D$  для фіксованого значення кута розхилу конуса  $Q_2$  ( $\gamma_2 = 89^\circ$ ). Виток магнітного струму також поміщали на поверхні  $Q_2$ . Така структура є моделлю площини з круговим отвором, із центра якої виходить напівнескінченний конус  $Q_1$ .

Для в'яснення впливу модового складу поля джерела на розсіюючі властивості біконуса  $Q$  спочатку проаналізовано залежність потуж-

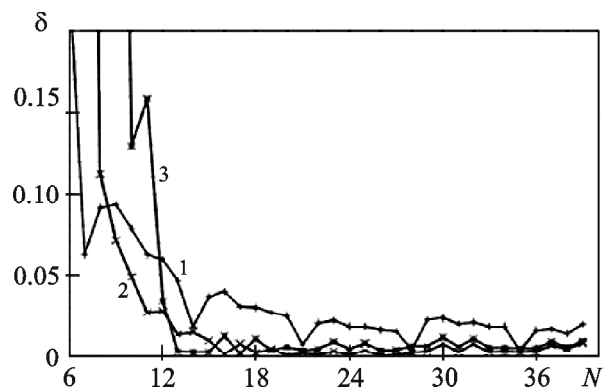


Рис. 2. Відносна похибка обчислення потужності випромінювання в область  $D_2$  для  $\gamma_1 = 20^\circ$ ,  $\gamma_2 = 89^\circ$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$ ;  $kr_0 = 25$ : крива 1 –  $ka_1 = 6.28$ , крива 2 –  $ka_1 = 9.42$ , крива 3 –  $ka_1 = 12.56$

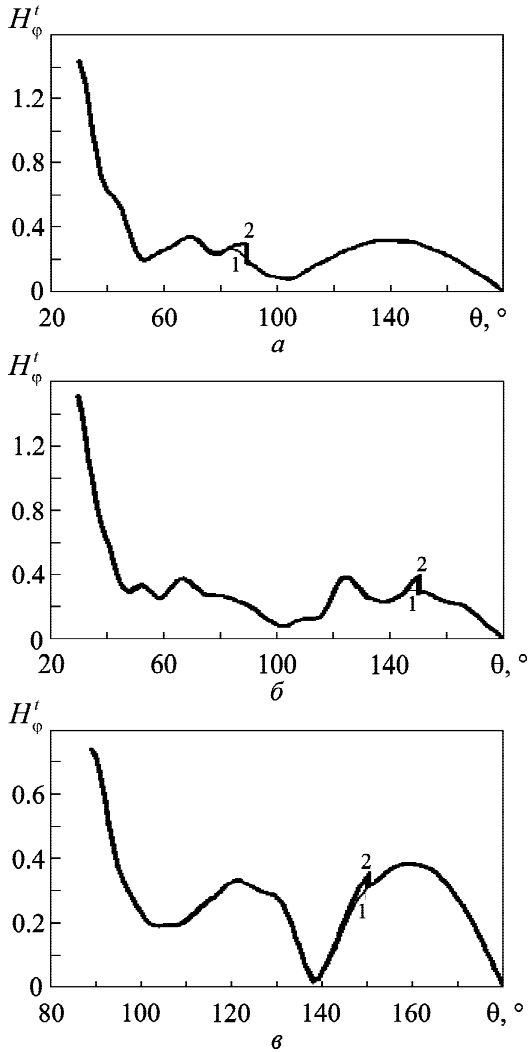


Рис. 3. Перевірка умови спряження  $H'_\phi$  компонент поля на межі підобластей біконуса  $Q$  для  $ka_1 = 7.85$ ,  $kr_0 = 8$ ;  $\theta_0 = \gamma_1$  (крива 1 –  $kr = ka_1 - 0.01$ , крива 2 –  $kr = ka_1 + 0.01$ ): а –  $\gamma_1 = 30^\circ$ ,  $\gamma_2 = 89^\circ$ ; б –  $\gamma_1 = 30^\circ$ ,  $\gamma_2 = 150^\circ$ ; в –  $\gamma_1 = 89^\circ$ ,  $\gamma_2 = 150^\circ$

ності випромінювання у біконічну  $D_3$  та кінчну  $D_2$  області від параметрів біконуса  $Q$ , коли у полі джерела враховувалася лише  $TEM$ -мода. Відповідні залежності показано на рис. 4, а, б. Як видно із поведінки кривих на рис. 4, а, зі зростанням кутового параметра  $\gamma_1$  (для фіксованого  $\gamma_2$  – це відповідає звуженню біконічної області) потужність енергії випромінювання у біконічну область зростає. При цьому для кожного кута  $\gamma_1$  локальний максимум потужності формується, коли хвильовий радіус отвору плоскої діафрагми  $1.7 < ka_1 < 2.1$ . Коли  $ka_1 > 4$ , спостерігаються слабкі осциляції потужності випро-

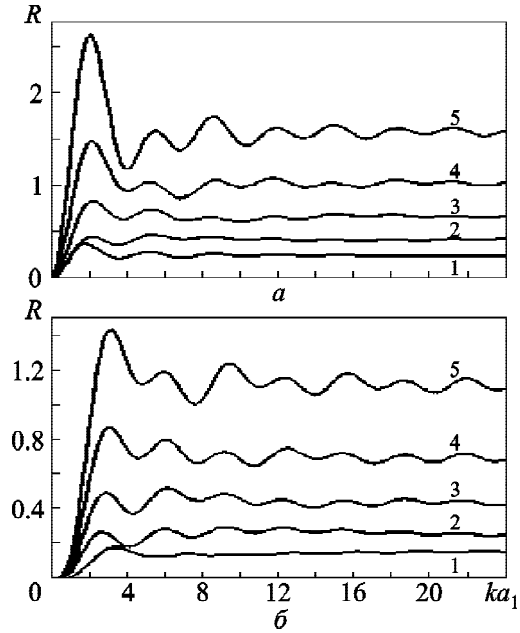
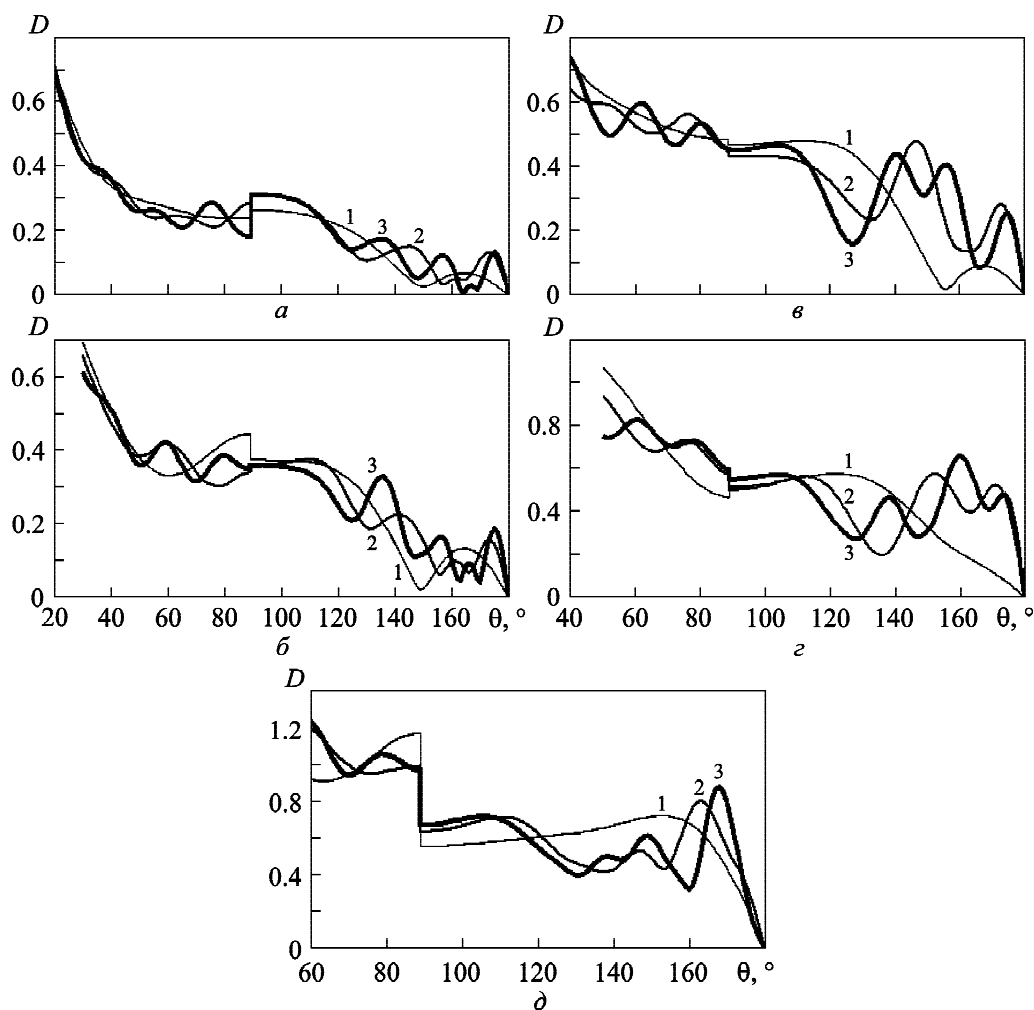


Рис. 4. Залежність потужності випромінювання в біконічну  $D_3$  (а) і кінчну  $D_2$  (б) області від параметра  $ka_1$  зі збудженням біконуса  $Q$   $TEM$ -модю для  $\gamma_2 = 89^\circ$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$ ;  $kr_0 = 25$ : крива 1 –  $\gamma_1 = 20^\circ$ , крива 2 –  $\gamma_1 = 30^\circ$ , крива 3 –  $\gamma_1 = 40^\circ$ , крива 4 –  $\gamma_1 = 50^\circ$ , крива 5 –  $\gamma_1 = 60^\circ$

мінювання відносно постійного для кожного  $\gamma_1$  значення. Для широких біконічних областей (див. криві 1–3 на рис. 4, а) для  $ka_1 > 6$  надходження електромагнітної енергії в біконічну область для фіксованого  $\gamma_2$  практично не залежить від хвильового радіуса отвору діафрагми.

На рис. 4, б проілюстровано вплив кута розхилу  $\gamma_1$  на проникнення електромагнітної енергії через апертуру у доповнюючу кінчну область  $D_2$ . Тобто аналізується вплив кінчного провідника  $Q_1$  на проникнення електромагнітного поля через кругову апертуру в “площині”  $Q_2$  ( $\gamma_2 = 89^\circ$ ). Як видно із поведінки кривих на рис. 4, б, зі зростанням параметра  $\gamma_1$  зростає і потужність енергії електромагнітного поля, яка проходить через отвір у діафрагмі. Тобто спостерігається ефект витіснення електромагнітного поля через отвір у діафрагмі завдяки наближенню кінчної поверхні  $Q_1$  до  $Q_2$ . Оскільки для  $ka_1 > 4$  функція  $R(ka_1)$  є близькою до постійної (див. рис. 4), можна допустити, що діаграми спрямованості біконуса  $Q$  мають властивість широкосмуговості.

Для підтвердження цього припущення досліджено діаграми спрямованості зі збудженням розсіювача  $Q$   $TEM$ -хвилею (рис. 5). Тут обчислення



**Рис. 5.** Діаграми спрямованості в біконічній ( $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$ ) та конічній ( $\gamma_2 < \theta < 180^\circ$ ) областях при збудженні *TEM*-модю для  $\gamma_2 = 89^\circ$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$ ;  $kr_0 = 25$  (крива 1 –  $ka_1 = 6$ , крива 2 –  $ka_1 = 16$ , крива 3 –  $ka_1 = 22$ ): а –  $\gamma_1 = 20^\circ$ ; б –  $\gamma_1 = 30^\circ$ ; в –  $\gamma_1 = 40^\circ$ ; г –  $\gamma_1 = 50^\circ$ ; д –  $\gamma_1 = 60^\circ$

характеристик розсіяння виконувались за фіксованого значення  $kr_0$ , а широкосмуговість оцінювалась за їх залежністю від  $ka_1$ .

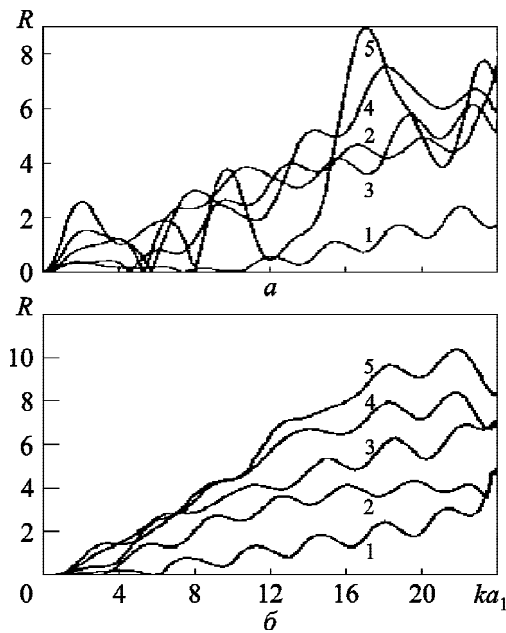
Як видно із поведінки кривих на рис. 5, а, б, для малих значень кутового параметра  $\gamma_1$  (це відповідає широкій біконічній області) широкосмугові властивості діаграм спрямованості спостерігаються практично в усьому діапазоні зміни кутового параметра  $\gamma_1 \leq \theta \leq \gamma_2$  для  $ka_1 > 6$ .

Зі зростанням параметра  $\gamma_1$  і, відповідно, звуженням кутових розмірів біконічної області, широкосмугові властивості діаграм спрямованості проявляються у вужчому кутовому діапазоні для  $ka_1 > 16$  (див. рис. 5, в–д). Важливо відзначити також, що, як видно з поведінки кривих на рис. 5, параметр  $\gamma_1$  суттєвим чином впливає на інтен-

сивність та характер розподілу поля, яке проникає через щілину і проходить в область тіні ( $\gamma_2 < \theta < 180^\circ$ ).

Далі досліджувалася потужність випромінювання у біконічну  $D_3$  і конічну  $D_2$  області, коли у полі джерела збудження враховано *TEM* і вищі *TM* моди. Як видно із порівняння кривих на рис. 4 і рис. 6, збудження вищих мод джерела випромінювання суттєво змінює характер залежності потужності випромінювання від параметрів розсіювача.

На рис. 6, а наведено сімейство кривих залежності потужності випромінювання дифрагованого поля у біконічній області  $D_3$  від хвильового радіуса отвору діафрагми. Для широких біконічних областей ( $\gamma_2 - \gamma_1 \geq 50^\circ$ , криві 1–3) залежності



**Рис. 6.** Залежність потужності випромінювання в  $D_3$  (а) і  $D_2$  (б) областях від  $ka_1$  зі збудженням біконуса  $Q$   $TEM$  і вищими  $TM$  модами первинного поля для  $\gamma_2 = 89^\circ$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$ ;  $kr_0 = 25$ : крива 1 –  $\gamma_1 = 20^\circ$ , крива 2 –  $\gamma_1 = 30^\circ$ , крива 3 –  $\gamma_1 = 40^\circ$ , крива 4 –  $\gamma_1 = 50^\circ$ , крива 5 –  $\gamma_1 = 60^\circ$

$R(ka_1)$  зі збільшенням  $ka_1$  слабо осцилюють відносно монотонно зростаючих кривих. Проте для  $\gamma_1 > 40^\circ$  ( $\gamma_2 - \gamma_1 < 50^\circ$ ) спостерігається сильний вплив кута розхилу  $\gamma_1$  на форму кривих  $R(ka_1)$ , що проявляється в утворенні глибоких осциляцій амплітуди. З ростом  $\gamma_1$  зростає глибина і спадає частота осциляцій кривих  $R(ka_1)$ . Отже для вузьких біконічних областей ( $\gamma_2 - \gamma_1 < 30^\circ$ ) за допомогою зміни параметра  $\gamma_1$ , що у нашому випадку еквівалентно зміні кутової ширини біконічної області, можна проводити частотну селекцію поля (див. криву 5 на рис. 6, а).

На рис. 6, б показано залежності потужності випромінювання в конічну область  $\gamma_2 < \theta < \pi$  (тіньова область). Оскільки покладали  $\gamma_2 = 89^\circ$ , криві на рис. 6, б характеризують проникнення електромагнітної енергії через круглу апертуру в площині. Із поведінки кривих на рис. 6, б видно, що залежності  $R(ka_1)$  тут також є слабо осцилюючими уздовж монотонно зростаючих кривих для усіх кутів  $\gamma_1$ . Тобто із поведінки цих кривих на рис. 6, б спостерігається зростання проникнення електромагнітної енергії через кругову апертуру в площині зі зростанням радіуса щілини і кута розхилу конуса  $Q_1$ , вершина якого розміщена

в центрі апертури. Останнє відповідає звуженню біконічної області у зв'язку з притисканням поверхні безмежного конуса до площини з отвором, а отже також спостерігається ефект “витіснення” поля через щілину конічним провідником.

На рис. 7 наведено діаграми спрямованості, отримані з урахуванням у полі джерела випромінювання  $TEM$ -хвилі та вищих  $TM$ -мод. Як видно із поведінки кривих на цьому рисунку, зі збудженням біконуса  $Q$  полем джерела, яке, крім  $TEM$ -моди, інтенсивно випромінює і вищі  $TM$ -моди, широкосмугові властивості діаграм спрямованості в області  $D_3$  погіршуються. Це пов'язано зі зростанням осциляцій потужності електромагнітного випромінювання в  $D_3$  як функції параметра  $ka_1$  (див. рис. 6, а).

Як видно із поведінки кривих на рис. 7, кутовий параметр  $\gamma_1$  суттєво впливає на рівень і пелюсткову структуру діаграм спрямованості електромагнітного поля, що проходить через щілину в область  $D_2$ . На відміну від випадку, коли біконус  $Q$  збуджується тільки  $TEM$ -хвилею джерела (див. рис. 5), залучення вищих  $TM$ -мод джерела збудження дозволяє сформувати інтенсивне випромінювання через щілину у плоскій діафрагмі, яке співмірне (див. рис. 7, а-з) або перевищує (див. рис. 7, д) рівень випромінювання у біконічну область. Причому, як видно із поведінки кривих на рис. 7, за допомогою параметра  $\gamma_1$  можна регулювати напрямок максимальної інтенсивності випромінювання.

На рис. 8 показано діаграми спрямованості поля в біконічній області  $D_3$ , коли параметри біконуса  $Q$  забезпечують екстремуми потужності випромінювання, що відповідають кривій 5 на рис. 6, а.

Із поведінки кривих на рис. 8 видно, що за допомогою зміни параметра  $ka_1$  можна сформувати симетричний за кутовою координатою розподіл поля в біконічній області. Такий розподіл поля отримуємо, коли геометричні параметри біконуса забезпечують локальний максимум потужності випромінювання для  $ka_1 = 9.7$  і локальний мінімум для  $ka_1 = 21.1$  (див. криву 5 на рис. 6, а). У першому випадку маємо мінімальне значення поля випромінювання в центрі біконічної області, а у другому – спостерігаємо у центрі біконічної області максимум випромінювання. Зауважимо, що у цих двох випадках потужність випромінювання є практично однаковою. Такі властивості

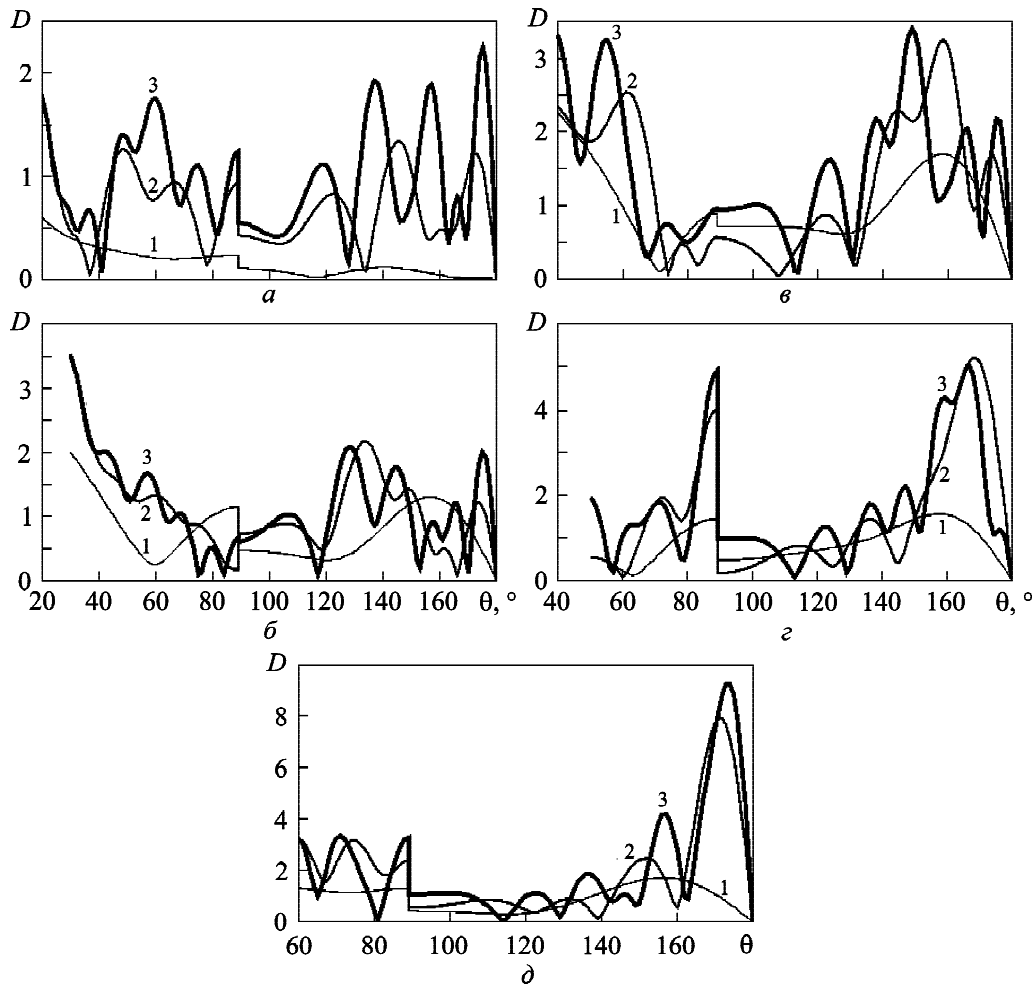


Рис. 7. Діаграми спрямованості у конічній ( $\gamma_2 < \theta < 180^\circ$ ) та біконічній ( $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$ ) областях зі збудженням біконуса  $Q$   $TEM$  і вищими  $TM$  модами первинного поля для  $\gamma_2 = 89^\circ$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$ ;  $kr_0 = 25$  (крива 1 –  $ka_1 = 6$ , крива 2 –  $ka_1 = 16$ , крива 3 –  $ka_1 = 22$ ): а –  $\gamma_1 = 20^\circ$ ; б –  $\gamma_1 = 30^\circ$ ; в –  $\gamma_1 = 40^\circ$ ; г –  $\gamma_1 = 50^\circ$ ; д –  $\gamma_1 = 60^\circ$

можна використати у формуванні необхідного розподілу поля в нерегулярних біконічних хвилеводах [15] і резонаторах [16].

## 5. Висновок

Отримано математично строгий розв’язок задачі дифракції поля витка магнітного струму на металевому біконусі, одне плече якого є напівнескінченний конус, а друге – напівнескінченний конус зі зрізаною вершиною. Задачу зведено до розв’язку НСЛАР другого роду, яка допускає розв’язок з заданою точністю.

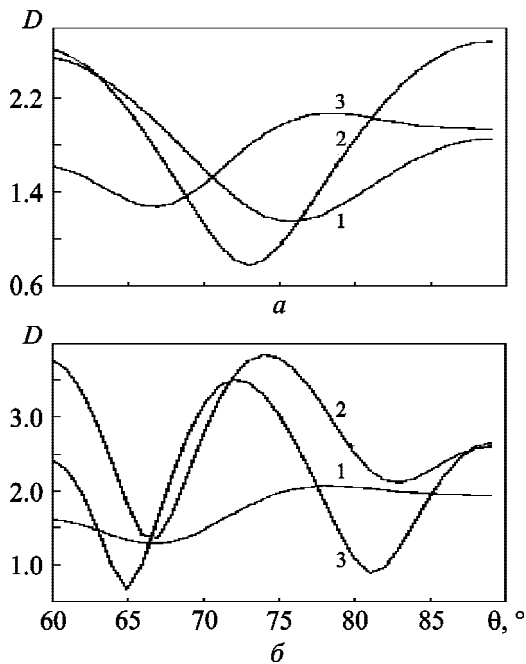
Досліджено формування електромагнітного поля в електродинамічній системі “площина з круговою апертурою, з центру якої виходить напівнескінченний конічний провідник, – виток магнітного струму”. Таку систему отримано з

біконуса, коли зрізаний напівнескінченний конус переходить у площину з круговим отвором, а напівнескінченний виходить з центру отвору.

Показано, що зі збудженням  $TEM$ -хвилею біконічної області, утвореній площиною з круглою апертурою і конічним провідником, забезпечується широкосмуговість діаграм спрямованості у широкому діапазоні зміни геометричних розмірів біконуса і частоти. Зі збудженням вищих типів  $TM$ -мод у біконічній області широкосмугові властивості діаграм спрямованості погіршуються, звужується область значень параметрів, де широкосмуговість можна спостерігати. Для вузьких біконічних областей спостерігаються частотно селективні властивості досліджуваної структури.

Показано, що з розміщенням вершини конічного провідника в центрі кругової апертури і збуд-





**Рис. 8.** Діаграми спрямованості у біконічній області для  $\gamma_1 = 60^\circ$ ,  $\gamma_2 = 89^\circ$ ,  $\theta_0 = \gamma_2$ ;  $kr_0 = 25$ : а –  $ka_1 = 8.1$  (крива 1),  $ka_1 = 9.7$  (крива 2),  $ka_1 = 11.9$  (крива 3); б –  $ka_1 = 11.9$  (крива 1),  $ka_1 = 17.1$  (крива 2),  $ka_1 = 21.1$  (крива 3)

женням такої структури *TEM* і вищими *TM* типами хвиль можна досягти суттєвого покращення ефективності проникнення електромагнітної енергії через апертуру. За допомогою кутового параметра напівнескінченного конічного провідника можна регулювати як інтенсивність проникнення поля, так і напрямок головного максимуму.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Ash E. A. and Nicholls G. Super-resolution Aperture Scanning Microscope // Nature. –1972. – Vol. 237, No. 5357. – P. 510–512.
2. Lee T., Lee E., Oh. S., and Hahn J. W. Imaging heterogeneous nanostructures with a plasmonic resonant ridge aperture // Nanotechnology. – 2013. – Vol. 24, No. 14. – id. 145502 (7 pp).
3. Kuznetsova T. I., Lebedev V. S., and Tsveti A. M. Optical fields inside a conical waveguide with a subwavelength-sized exit hole // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2004. – Vol. 6, No. 4. – P. 338–348.
4. Lindquist N. C., Johnson T. W., Nagpal P., Norris D. J., and Oh S. Plasmonic nanofocusing with a metallic pyramid and an integrated C-shaped aperture // Scientific Reports. –2013. – Vol. 3. – id. 1857. – doi:10.1038/srep01857.
5. Lee Y., Alu A., and Zhang J. X. J. Efficient apertureless scanning probes using patterned plasmonic surfaces // Opt. Express. – 2011. – Vol. 19, No. 27. – P. 25990–25999.
6. Drezet A., Woehl J. C., and Huan S. Diffraction by a small aperture in conical geometry: Application to metal coated

- tips used in near-field scanning optical microscopy // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 65, Is. 4. – id. 046611.
7. Bilotti F., Tricarico S., Pierini F., and Vegni L. Cloaking apertureless near-field scanning optical microscopy tips // Opt. Lett. – 2011. – Vol. 36, No 2. – P. 211–213.
8. Furukawa H. and Kawata S. Local field enhancement with an apertureless near-field-microscope probe // Opt. Commun. – 1998. – Vol. 148, Is. 4–6. – P. 221–224.
9. Mustonen A., Beaud P., Kirk E., Feuer T., and Tsujino S. Efficient light coupling for optically excited high-density metallic nanotip arrays // Scientific Reports. – 2012. – Vol. 2. – id. 915. – doi:10.1038/srep00915.
10. Шестопалов В. П., Куриленко А. А., Масалов С. А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции – Киев: Наукова Думка, 1984. – 294 с.
11. Куриляк Д. Б., Шарбура О. М. Електромагнітне збудження біконуса, сформованого із напівнескінченної та скінченної зі зрізаною вершиною конічних поверхонь // Радиофизика и радиоастрономия. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 138–146.
12. Куриляк Д. Б., Шарбура О. М. Осесиметричне поле випромінювання конічного монополя // Радиофизика и радиоастрономия. – 2013. – Т. 18, № 4. – С. 323–330.
13. Куриляк Д. Б., Шарбура О. М. Осесиметричне електромагнітне збудження металевого диско-конічного розсіювача // Радиофизика и электроника. – 2014. – Т. 5 (19), № 2. – С. 3–9.
14. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. – Київ: Наук. думка. – 2006. – 280 с.
15. Нефедов Е. И. Открытые коаксиальные резонансные структуры. – М.: Наука. – 1982. – 220 с.
16. Дробахин О. О., Привалов Е. Н., Салтыков Д. Ю. Расчет резонансных частот коаксиального биконического резонатора с диэлектрическим цилиндром в разрыве центрального проводника // Вісник ДНУ. Сер. Фізика. Радіоелектроніка. – 2002. – Вип. 9. – С. 91–94.

О. М. Шарбура, Д. Б. Куриляк

Физико-механический институт  
им. Г. В. Карпенко НАН Украины,  
ул. Научная, 5, г. Львов, 79060, Украина

**ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ БИКОНУСА, СФОРМИРОВАННОГО ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ И СРЕЗАННЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ КОНУСАМИ**

Получено решение осесимметричной задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящей биконической поверхности, одно плечо которой – полубесконечный конус, а второе – полубесконечный конус со срезанной вершиной. В качестве источника возбуждения использован круговой виток магнитного тока. Задача решена методом собственных функций подобластей с применением процедуры аналитической регуляризации. При условии, что поверхность срезанного конуса близка к плоскости с круговым отверстием, проанализировано влияние модового состава поля источника возбуждения и геометрических параметров биконуса на широкополосные свойства и проникновение электромагнитной энергии сквозь апертуру.

*O. M. Sharabura and D. B. Kuryliak*

Karpenko Physico-Mechanical Institute,  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
5, Naukova St., Lviv, 79060, Ukraine

AXIALLY-SYMMETRIC EXCITATION OF BICONE  
FORMED BY SEMI-INFINITE AND SEMI-INFINITE  
TRUNCATED CONES

The problem of axially-symmetric electromagnetic wave diffraction by a perfectly conducting bi-conical surface, which one arm

is a semi-infinite cone and the other is a semi-infinite truncated cone, is solved rigorously using the mode-matching method and analytical regularization technique. The bi-cone is excited by a ring magnetic source. This structure is analyzed under the condition of the cutting cone approaching the plane. The influence of the geometrical parameters and the exciting modes on the wide-band properties of the bi-cone and on the electromagnetic energy penetration through its aperture is analyzed.

*Стаття надійшла до редакції 23.12.2014*