

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПРИБОРАХ, ЭЛЕМЕНТАХ И СИСТЕМАХ НАУЧНОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

УДК 621.373.5

А. Ю. НЕМЕЦ, Д. М. ВАВРИВ

PACS numbers: 05.45.Xt,
84.30.NgРадиоастрономический институт НАН Украины,
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина
E-mail: nimets@rian.kharkov.ua

СИНХРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ГЕНЕРАТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ С МОДУЛИРОВАННОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ

Проведено исследование синхронных режимов колебаний генератора Ван дер Поля, в котором собственная частота модулирована на низкой частоте. Показано, что наличие низкочастотной модуляции приводит к возникновению дополнительных областей существования синхронных колебаний. Установлено, что физической причиной возникновения этих областей являются трехчастотные резонансы, обусловленные взаимодействием колебаний с собственной частотой генератора, частотой модуляции и частотой синхронизируемого сигнала. Определены характеристики синхронных колебаний при таких трехчастотных взаимодействиях и проведено их сравнение со случаем синхронизации генератора на основном тоне.

Ключевые слова: синхронизация, осциллятор, автоколебания, генератор, область синхронизации

1. Введение

Управление частотой автоколебаний механических, электронных, биологических и других систем путем подачи внешнего гармонического колебания является хорошо известным решением. Управление заключается в том, что при определенных условиях частота автоколебаний становится равной частоте внешнего воздействия, его гармонике или субгармонике. Этот эффект называется синхронизацией колебаний, и к настоящему времени его теория достаточно подробно развита [1–3]. Среди наиболее существенных последних результатов в этой области следует отметить развитие теории частично синхронизированных систем, а также разработку методов синхронизации генераторов с хаотическим поведением [4–6].

В представленной работе мы рассматриваем задачу синхронизации автогенератора с модулированной собственной частотой внешним гармоническим сигналом. Предполагается, что модуляция осуществляется гармоническим коле-

банием, частота которого существенно меньше собственной частоты. Подобная задача рассматривалась в работе [7], где исследовался случай импульсной модуляции собственной частоты генератора. Предположение об импульсной модуляции позволило свести решение этой задачи к анализу одномерного отображения, исследование которого проведено для некоторых предельных случаев. В настоящей работе предлагается более общий подход к решению подобных задач, который основан на применении повторного усреднения.

Рассматриваемая задача относится к классу задач о взаимодействии низкочастотных и высокочастотных колебаний в нелинейных колебательных системах. Исследование такого взаимодействия проводилось ранее в [8–10] с точки зрения возникновения неустойчивостей в синхронизируемых генераторах, обусловленных развитием хаотических колебаний. В отличие от этих работ здесь мы изучаем условия и механизм возникновения синхронных колебаний при взаимодействии низкочастотных и высокочастотных колебаний. При этом под синхронизацией генератора, как и в случае гармоничес-

кого внешнего сигнала, мы понимаем такой режим возбуждения генератора, при котором в спектре выходных колебаний содержатся те же спектральные составляющие и их линейные комбинации, что и в спектре внешнего воздействия.

В следующем разделе приводятся используемая математическая модель, которая представляет собой обобщенный генератор Ван дер Поля с модулированной собственной частотой при наличии внешнего гармонического воздействия, и вывод соответствующих укороченных уравнений, а также дается краткий обзор известных результатов анализа синхронного режима колебаний в гармонически возбуждаемом генераторе при отсутствии модуляции собственной частоты. В третьем разделе описаны трехчастотные резонансы в генераторе с модуляцией частоты, которые приводят к возникновению дополнительных областей синхронизации колебаний. В четвертом разделе представлены результаты анализа характеристик синхронных колебаний в дополнительных областях синхронизации. В Заключении подытожены основные результаты работы.

2. Математическая модель

Мы рассматриваем следующее обобщенное уравнение осциллятора Ван дер Поля с медленно меняющейся собственной частотой при наличии внешнего высокочастотного воздействия:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega(t)^2 x = 2\omega_0(\alpha - a_2 x^2) \frac{dx}{dt} + 2\omega_0^2 F_e \sin(\omega_e t). \quad (1)$$

Здесь x – обобщенная координата; $\omega(t)$ – собственная частота осциллятора, медленно меняющаяся со временем t по сравнению с $\sin(\omega_e t)$; $\alpha > 0$ – инкремент нарастания колебаний; $a_2 > 0$ – коэффициент, определяющий зависящее от амплитуды колебаний затухание в осцилляторе; F_e , ω_e – амплитуда и частота внешнего высокочастотного воздействия.

Полагаем, что собственная частота осциллятора изменяется по гармоническому закону

$$\omega(t) = \omega_0 [1 + m \cos(\Omega_m t)],$$

где ω_0 – среднее значение собственной частоты осциллятора; m – коэффициент модуляции, значение которого предполагается малым; Ω_m – частота модуляции, которая значительно меньше ω_0 .

Здесь рассматривается случай синхронизации осциллятора на основном тоне, когда

$$\omega_e \approx \omega_0. \quad (2)$$

Предполагая, что слагаемые в правой части уравнения (1) являются малыми, сведем уравнение (1) к уравнениям стандартного вида, которые допускают применение метода усреднения [11]. Для этого перепишем (1) в виде:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x + \psi(x, y, t),$$

где $\psi(x, y, t) = -2m\omega_0^2 \cos(\Omega_m t) - m^2\omega_0^2 \cos^2(\Omega_m t) + 2\omega_0 y [\alpha - a_2 x^2] + 2\omega_0^2 F_e \sin(\omega_e t)$ – функция, которую можно рассматривать как малое возмущение в (3).

Введем новые независимые переменные – амплитуду A и фазу колебаний φ :

$$x = A \cos(\omega_e t + \varphi),$$

$$y = -A\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi).$$

В результате приходим к системе уравнений стандартного вида, в которых правая часть является малой:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\Psi(A, \varphi, t)}{\omega_0} \sin(\omega_e t + \varphi),$$

$$A \frac{d\varphi}{dt} = A(\omega_0 - \omega_e) - \frac{\Psi(A, \varphi, t)}{\omega_0} \cos(\omega_e t + \varphi).$$

Применение к этим уравнениям процедуры усреднения [11] приводит к следующим уравнениям относительно амплитуды и фазы колебаний:

$$\frac{dA}{d\tau} = \alpha A - \frac{a_2 A^3}{4} - F_e \cos \varphi, \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + M_1 + \frac{F_e}{A} \sin \varphi,$$

где $\tau = \omega_0 t$, $\Delta = \frac{\omega_0 - \omega_e}{\omega_0}$, $\Omega = \frac{\Omega_m}{\omega_0}$, $M_1(\tau) = 2m \cos(\Omega\tau) + \frac{m^2}{2} \cos(2\Omega\tau)$.

При выводе этих уравнений мы также воспользовались малостью частоты модуляции по сравнению с ω_e и ω_0 .

При отсутствии модуляции собственной частоты осциллятора ($m = 0$) эти уравнения сводятся к хорошо известным уравнениям, описывающим динамику автоколебательной системы при резонансном гармоническом внешнем воздействии на основном тоне [3]:

$$\frac{dA}{d\tau} = A \left(\alpha - \frac{a_2}{4} A^2 \right) - F_e \cos \varphi, \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + \frac{F_e}{A} \sin \varphi.$$

Полагая в (5) $\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{dA}{d\tau} = 0$, находим следующее кубическое уравнение для определения значений стационарной амплитуды колебаний:

$$\left[\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2} \right)^2 + \frac{\Delta^2}{\alpha^2} \right] \frac{A^2}{A_0^2} = P^2, \tag{6}$$

где $A_0 = 2 \left(\frac{\alpha}{a_2} \right)^{1/2}$ – амплитуда автоколебаний,

$P = \frac{F_e}{\alpha A_0}$ – нормированная амплитуда внешнего воздействия.

При относительно малых уровнях внешнего воздействия, когда

$$P < \frac{4}{27},$$

зависимость амплитуды стационарных колебаний от параметра расстройки частоты Δ (резонансная кривая) имеет вид, представленный на рис. 1. Стационарные значения амплитуды располагаются на двух ветвях, одна из которых приближенно описывается резонансной кривой линейного осциллятора (нижняя ветвь на рис. 1)

$$A = \frac{PA_0}{\sqrt{1 + \Delta^2 / \alpha^2}} \equiv \frac{F_e}{\sqrt{\alpha^2 + \Delta^2}}.$$

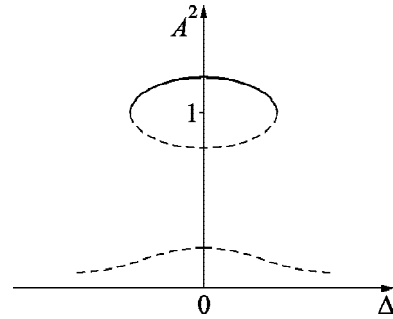


Рис. 1. Зависимость амплитуды стационарных состояний от параметра расстройки при малых амплитудах внешней силы

Эти стационарные значения амплитуды в случае синхронизируемого генератора являются неустойчивыми.

Вторая ветвь резонансной кривой близка по форме к эллипсу. Его уравнение находится из (6) в предположении, что амплитуда колебаний синхронизируемого автогенератора A мало отличается от A_0 , что позволяет искать решения (5) и (6) в виде [3]

$$A = A_0 + x,$$

где x – малая величина, по отношению к которой уравнения (5) переписываются в следующем виде:

$$\frac{dx}{d\tau} = -2\alpha x - F_e \cos \varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta + \frac{F_e}{A_0} \sin \varphi.$$

Из (6) находим уравнение указанного эллипса в координатах A, Δ :

$$\Delta^2 A_0^2 + 4\alpha^2 (A - A_0)^2 = F_e^2. \tag{7}$$

Путем анализа устойчивости стационарных значений, определяемых (7), легко показать, что только значения амплитуды $A > A_0$ являются устойчивыми (см. рис. 1). Из этого условия и из (7) непосредственно следует, что осциллятор синхронизируется на частоте внешнего воздействия, если расстройка частоты Δ удовлетворяет условию

$$-\frac{F_e}{A_0} \leq \Delta \leq \frac{F_e}{A_0},$$

т. е. ширина полосы синхронизации генератора по отношению к частоте колебаний, нормированной на ω_0 , равняется

$$\Delta_s = 2 \frac{F_e}{A_0}. \quad (14)$$

В следующих разделах мы определим условия возникновения синхронных режимов колебаний при низкочастотной модуляции собственной частоты осциллятора. Для этого рассмотрим сначала резонансы, которые возникают в генераторе при таком воздействии.

3. Трехчастотные резонансы

Запишем систему уравнений (4) в новых переменных, U и V , которые связаны с амплитудой и фазой колебаний соотношениями:

$$U = A \cos \varphi, \\ V = A \sin \varphi.$$

Эта система уравнений в новых переменных записывается в следующем виде:

$$\frac{dU}{d\tau} = -\Delta V + F_1(U, V, \tau) - F_e, \quad (9)$$

$$\frac{dV}{d\tau} = \Delta U + F_2(U, V, \tau),$$

где $F_1 = U \left[\alpha - \frac{a_2(U^2 + V^2)}{4} \right] + \frac{M_1(\tau)V}{2}$, $F_2 = V \left[\alpha - \frac{a_2(U^2 + V^2)}{4} \right] - \frac{M_1(\tau)U}{2}$ являются функциями, рассматриваемыми как малое возмущение в системе уравнений (9).

Решение невозмущенного уравнения (9), когда $F_1 = F_2 = 0$, находится аналитически:

$$U = B \cos(\Delta\tau + \psi), \quad (10)$$

$$V = B \sin(\Delta\tau + \psi) + S,$$

где B и ψ – константы интегрирования, $S = F_e/\Delta$.

Таким образом, невозмущенная система представляет собой осциллятор с собственной частотой Δ . Отсюда следует, что в системе (9) могут наблюдаться резонансы, когда характерные частоты изменения во времени $F_1(\tau)$ и $F_2(\tau)$ будут

близки к собственной частоте осциллятора Δ , т. е. при выполнении следующих условий:

$$\Omega \approx \Delta, \quad (11)$$

$$2\Omega \approx \Delta. \quad (12)$$

Отметим, что в отличие от двухчастотного резонанса (2) соотношения (11) и (12) представляют собой условия трехчастотных резонансов в осцилляторе (1), которые обусловлены взаимодействием частоты внешнего воздействия, частоты модуляции и собственной частоты осциллятора (1).

Рассмотрим динамику осциллятора в окрестности каждого из резонансов (11), (12). Для этого, в соответствии с (10), введем новые переменные $B(\tau)$ и $\psi(\tau)$:

$$U = B(\tau) \cos[\Delta\tau + \psi(\tau)],$$

$$V = B(\tau) \sin[\Delta\tau + \psi(\tau)] + S.$$

В этих новых переменных система (9) сводится к стандартному виду, где правые части уравнений являются малыми,

$$\frac{dB}{d\tau} = F_1(U, V, \tau) \cos(n\Omega\tau + \psi) + F_2(U, V, \tau) \sin(n\Omega\tau + \psi), \quad (13)$$

$$B \frac{d\psi}{d\tau} = (\Delta - n\Omega)B - F_1 \sin(n\Omega\tau + \psi) + F_2 \cos(n\Omega\tau + \psi).$$

При $n=1$ и $n=2$ эта система уравнений описывает соответственно резонансы (11) и (12).

Применим к (13) процедуру усреднения. В результате приходим к следующим автономным уравнениям для резонанса (11):

$$\frac{dB}{d\tau} = \left(\alpha_1 - \frac{a_2 B^2}{4} \right) B + \frac{F_e}{\Omega} m \cos \psi, \quad (14)$$

$$B \frac{d\psi}{d\tau} = (\Delta - \Omega)B - \frac{F_e}{\Omega} m \sin \psi,$$

$$\text{где } \alpha_1 = \alpha - \frac{F_e^2}{2\Omega^2} a_2 \equiv \alpha \left(1 - \frac{2F_e^2}{\Omega^2 A_0^2} \right).$$

Для резонанса (12) система укороченных уравнений имеет вид

$$\frac{dB}{d\tau} = \left(\alpha_2 - \frac{a_2 B^2}{4} \right) B + \frac{F_e}{8\Omega} m^2 \cos \psi, \quad (15)$$

$$B \frac{d\psi}{d\tau} = (\Delta - 2\Omega) B + \frac{F_e}{8\Omega} m^2 \cos \psi,$$

$$\text{где } \alpha_2 = \alpha - \frac{F_e^2}{8\Omega^2} a_2 \equiv \alpha \left(1 - \frac{F_e^2}{2\Omega^2 A_0^2} \right).$$

Отметим, что коэффициенты α_1 и α_2 представляют собой инкременты колебаний при наличии внешнего воздействия. Видно, что это воздействие приводит к уменьшению инкремента. Однако если амплитуды воздействия малы по сравнению с амплитудой автоколебаний, то, как следует из выражений для α_1 и α_2 , можно полагать, что

$$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha. \quad (16)$$

Рассмотрим область применимости уравнений (14) и (15). Для применения метода усреднения к уравнению (13) необходимо, чтобы характерный период внешнего воздействия T , который здесь равняется величине порядка $1/\Omega$, был существенно меньше, чем характерное время релаксации системы, равное $1/\alpha$. Это приводит к следующему ограничению на частоту модуляции:

$$\Omega \gg \alpha.$$

По своей структуре уравнения (14), (16) совпадают с уравнениями (5), описывающими синхронизацию генератора на основной частоте, однако условия существования синхронных колебаний при трехчастотных резонансах существенно отличаются. Условия возникновения таких синхронных колебаний и их свойства рассматриваются в следующем разделе.

4. Синхронизация колебаний при трехчастотном резонансе

Как следует из (14) и (15), резонансы (11) и (12) возникают в результате взаимодействия высокочастотных и низкочастотных колебаний, что следует из наличия произведения амплитуд внешнего высокочастотного воздействия и коэффициен-

та модуляции в (14) и (15). Выпишем из (14) уравнение стационарных состояний для резонанса (11):

$$B^2 \left[\left(\alpha_1 - \frac{a_2 B^2}{4} \right)^2 + (\Delta - \Omega)^2 \right] = \frac{m^2 F_e^2}{\Omega^2}.$$

Воспользовавшись методикой анализа синхронных колебаний, описанной в разделе 2, находим, что для данного резонанса синхронные колебания возникают в следующем диапазоне расстройек:

$$\Omega - \frac{mF_e}{\Omega B_{01}} \leq \Delta \leq \Omega + \frac{mF_e}{\Omega B_{01}},$$

$$\text{где } B_{01} = 2 \sqrt{\frac{\alpha_1}{a_2}}.$$

Таким образом, ширина полосы синхронизации для этого резонанса равняется

$$\Delta_{s1} = \frac{2mF_e}{\Omega B_{01}}. \quad (17)$$

При малых уровнях внешнего воздействия выполняется условие (16) и $B_{01} \approx A_0$, что позволяет записать (17) в виде

$$\Delta_{s1} = \frac{2mF_e}{\Omega A_0}. \quad (18)$$

Сравним теперь ширину полосы синхронизации при двухчастотном резонансе и при данном трехчастотном резонансе. Комбинируя выражения (9) и (18), находим:

$$\frac{\Delta_{s1}}{\Delta_s} = \frac{m}{\Omega}.$$

Отсюда следует, что ширина полосы синхронизации при модуляции собственной частоты генератора может быть больше ширины полосы синхронизации при отсутствии такой модуляции.

Рассмотрим теперь резонанс (12), для которого из (15) находим следующее уравнение для стационарных состояний:

$$B^2 \left[\left(\alpha_2 - \frac{a_2 B^2}{4} \right)^2 + (\Delta - 2\Omega)^2 \right] = \frac{m^4 F_e^2}{64\Omega^2}.$$

Для этого резонанса синхронные колебания существуют в диапазоне расстроек частоты

$$2\Omega - \frac{m^2 F_e}{8\Omega B_{02}} \leq \Delta \leq 2\Omega + \frac{m^2 F_e}{8\Omega B_{02}},$$

где $B_{02} = 2\sqrt{\frac{\alpha_2}{a_2}}$.

Соответственно ширина полосы синхронизации для этого резонанса равняется

$$\Delta_{s2} = \frac{F_e m^2}{4\Omega B_{02}}. \tag{19}$$

С учетом (16) это выражение переписывается в следующем виде:

$$\Delta_{s2} = \frac{F_e m^2}{4\Omega A_0}. \tag{20}$$

Отношение величины Δ_{s2} к ширине полосы синхронизации (8) при основном резонансе определяется выражением

$$\frac{\Delta_{s2}}{\Delta_s} = \frac{m^2}{8\Omega}.$$

При этом отношение Δ_{s2} к Δ_{s1} равняется

$$\frac{\Delta_{s2}}{\Delta_{s1}} = \frac{m}{8}.$$

Таким образом, ширина полосы синхронизации при резонансе (12) гораздо меньше полосы синхронизации при резонансе (11).

Из выражений (17), (18) и (19), (20) для ширины полосы синхронизации непосредственно следует, что она определяется произведением амплитуды внешнего высокочастотного воздействия и коэффициента модуляции собственной частоты. Этот факт еще раз подтверждает, что дополнительные области синхронизации возникают именно благодаря взаимодействию высокочастотных и низкочастотных колебаний.

Рассмотрим области существования синхронных колебаний на плоскости параметров: расстройка частоты Δ и нормированная амплитуда высокочастотного воздействия F_e , – которая приведена на рис. 2. Области существования

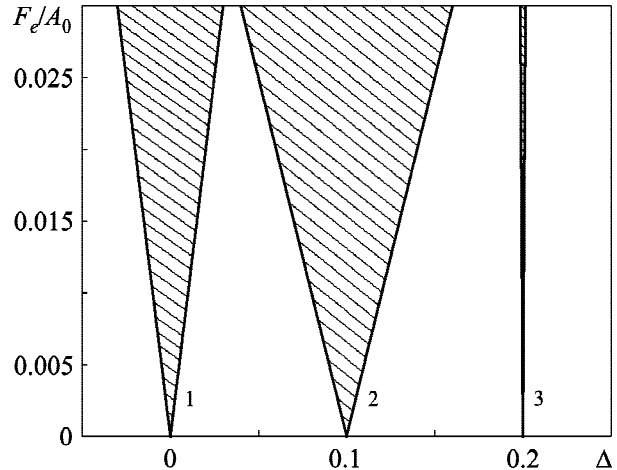


Рис. 2. Области синхронизации на плоскости параметров F_e/A_0 , Δ при $m = 0.2$, $\Omega = 0.1$: 1 – при двухчастотном резонансе, 2 – при трехчастотном резонансе (11), 3 – при трехчастотном резонансе (12)

синхронных колебаний заштрихованы. Эти области представляют собой «клювы» синхронизации, ширина которых для всех трех резонансов увеличивается пропорционально увеличению F_e при относительно небольших значениях этой амплитуды. Расстояние между «клювами» равняется частоте низкочастотной модуляции Ω . Рисунок иллюстрирует также сделанный выше вывод о том, что ширина полосы синхронизации, обусловленная трехчастотным резонансом (11), может быть больше ширины полосы синхронизации при основном резонансе. Это следует из сравнения первого и второго «клювов» на рис. 2.

Зависимость ширины полосы синхронизации от коэффициента модуляции m различна для каждого из резонансов, что иллюстрируется соответствующей плоскостью параметров на рис. 3. Для основного резонанса ширина полосы синхронизации не зависит от m . Для резонанса (11) она увеличивается пропорционально m , а для резонанса (12) – пропорционально m^2 при относительно небольших значениях m , когда выполняется условие (16).

С точки зрения практических приложений важно отметить, что как ширина дополнительных областей синхронизации, так и их расположение на шкале частоты управляются параметрами низкочастотного воздействия – коэффициентом модуляции и частотой воздействия.

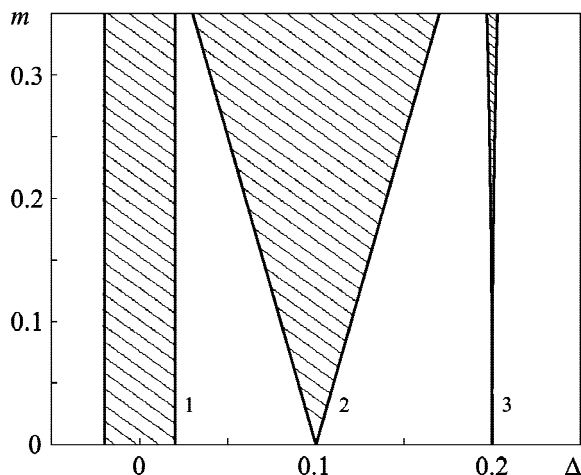


Рис. 3. Области синхронизации на плоскости параметров m , Δ при $F_e/A_0 = 0,02$, $\Omega = 0,1$: 1 – при двухчастотном резонансе, 2 – при трехчастотном резонансе (11), 3 – при трехчастотном резонансе (12)

5. Заключение

Таким образом, в синхронизируемом на основном тоне генераторе Ван дер Поля при модуляции его собственной частоты возникают дополнительные области существования синхронных колебаний. Эти области отстоят по частоте от основной области синхронизации на величину, равную частоте и удвоенной частоте модуляции. Причиной возникновения таких областей является трехчастотное взаимодействие между частотами внешнего высокочастотного и низкочастотного воздействия с собственной частотой колебаний генератора.

Из полученных результатов следует также, что ширина полосы синхронизации при трехчастотном резонансе может быть больше, чем ширина полосы синхронизации при двухчастотном резонансе. Ширина полосы синхронизации при трехчастотном резонансе определяется произведением амплитуд высокочастотного воздействия и коэффициента модуляции. Следовательно существует возможность эффективного управления шириной полосы синхронизации и ее расположением на шкале частот путем изменения параметров низкочастотного воздействия на генератор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R. A Study of Locking Phenomena in Oscillators // Proc. IRE. – 1946. – Vol. 34, Is. 6. – P. 351–357. DOI: 10.1109/JRPROC.1946.229930
2. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1981. – 352 с.

3. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней. – М.: Наука, 1980. – 359 с.
4. Pikovsky A., Roseblum M., and Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. – Cambridge: Cambridge University Press, 2001. – 411 p.
5. González-Miranda J. M. Synchronization and Control of Chaos. An introduction for scientists and engineers. – London: Imperial College Press, 2004. – 212 p.
6. Lai Y. M. and Porter A. M. Noise-induced synchronization, desynchronization, and clustering in globally coupled nonidentical oscillators // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 88, Is. 1. – id. 012905. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012905
7. Ланда П. С., Таранкова Н. Д. Синхронизация генератора с модулированной частотой // Радиотехника и электроника. – 1976. – № 2. – С. 261–265.
8. Белогорцев А. Б., Ваврив Д. М., Третьяков О. А. Хаос в квазилинейном осцилляторе Ван дер Поля // Радиотехника и электроника. – 1990. – Т. 35, № 6. – С. 1300–1307.
9. Ваврив Д. М., Чернышов И. Ю. Экспериментальное исследование стохастической неустойчивости нелинейного осциллятора // Радиотехника и электроника. – 1990. – Т. 35, № 1. – С. 151–158.
10. Belogortsev A. B., Vavriv D. M., and Tretyakov O. A. Destruction of quasiperiodic oscillations in weakly nonlinear systems // Appl. Mech. Rev. – 1993. – Vol. 46, No. 7. – P. 372–384. DOI: 10.1115/1.3120366
11. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. – Киев: АН УССР, 1955. – 283 с.

REFERENCES

1. ADLER, R. A., 1946. Study of Locking Phenomena in Oscillators. Proc. IRE. vol. 34, is. 6, pp. 351–357. DOI: 10.1109/JRPROC.1946.229930
2. BLEKHMANN, I. I., 1981. Synchronization in Nature and Technology. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
3. LANDA, P. S., 1980. Self-Oscillations in Systems with the Finite Number of Degrees of Freedom. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
4. PIKOVSKY, A., ROSEMBLUM, M. and KURTHS, J., 2001. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press.
5. GONZÁLEZ-MIRANDA, J. M., 2004. Synchronization and Control of Chaos. An introduction for scientists and engineers. London: Imperial College Press.
6. LAI, Y. M. and PORTER, M. A., 2013. Noise-induced synchronization, desynchronization, and clustering in globally coupled nonidentical oscillators. Phys. Rev. E. vol. 88, is.1, id. 012905. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012905
7. LANDA, P. S. and TARANKOVA, N. D., 1976. Synchronization of generator with modulated frequency. Radiotekhnika i Elektronika. vol. 2, pp. 261–265 (in Russian).
8. BELOGORTSEV, A. B., VAVRIV, D. M. and TRETIAKOV, O. A., 1990. Chaos in quasilinear Van der Pol oscillator. Radiotekhnika i Elektronika. vol. 35, no. 6, pp. 1300–1307 (in Russian).
9. VAVRIV, D. M. and CHERNYSHOV, I. Y., 1990. Experimental investigation of stochastic instability of nonlinear oscillator. Radiotekhnika i Elektronika. vol. 35, no. 1, pp. 151–158 (in Russian).

10. BELOGORTSEV, A. B., VAVRIV, D. M. and TRET'YAKOV, O. A., 1993. Destruction of quasiperiodic oscillations in weakly nonlinear systems. *Appl. Mech. Rev.*, vol. 46, no 7, pp. 372–384. DOI: 10.1115/1.3120366
11. MITROPOLSKY, Y. A., 1955. *Nonstationary processes in nonlinear dynamical systems*. Kyiv: AN USSR Publ. (in Russian).

A. Y. Nimets and D. M. Vavriv

Institute of Radio Astronomy,
National Academy of Sciences of Ukraine,
4, Chervonopraporna St., Kharkiv, 61002, Ukraine

SYNCHRONOUS OSCILLATIONS IN VAN DER POL GENERATOR WITH MODULATED NATURAL FREQUENCY

The synchronous operation of Van Der Pole generator with the low-frequency modulated natural frequency has been investigated. The presence of low-frequency modulation is shown to lead to formation of additional synchronization regions. The appearance of such regions is found to be caused by three-frequency resonances resulted from the interaction between oscillations of the generator natural frequency, modulation frequency and synchronized signal frequency. Characteristics of synchronous oscillations due to the below mentioned three-frequency interaction are obtained and comparison with the case of synchronization of oscillator on the main mode made.

Key words: synchronization, oscillator, auto-oscillations, generator, region of synchronization

A. Ю. Німець, Д. М. Ваврів

Радіоастрономічний інститут НАН України,
вул. Червонопрапорна, 4, Харків, 61002, Україна

СИНХРОННІ КОЛИВАННЯ В ГЕНЕРАТОРІ ВАН ДЕР ПОЛЯ З МОДУЛЬОВАНОЮ ВЛАСНОЮ ЧАСТОТОЮ

Виконано дослідження синхронних режимів коливань генератора Ван дер Поля, в якому власна частота модульована на низькій частоті. Показано, що наявність низькочастотної модуляції приводить до виникнення додаткових областей існування синхронних коливань. Встановлено, що фізичною причиною виникнення таких областей є трьохчастотні резонанси, зумовлені взаємодією коливань з власною частотою генератора, частотою модуляції та частотою синхронізованого сигналу. Визначено характеристики синхронних коливань при таких трьохчастотних взаємодіях та виконано їх порівняльний аналіз із випадком синхронізації генератора на основному тоні.

Ключові слова: синхронізація, осцилятор, автоколивання, генератор, область синхронізації

Статья поступила в редакцию 21.07.2015