

РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

УДК 621.371.332

А. С. БРЮХОВЕЦКИЙ, А. В. ВИЧКАНЬ

PACS number: 94.20.ws

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: bryu@ire.kharkov.ua

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН ЗВУКОВЫМ ИМПУЛЬСОМ В АТМОСФЕРЕ

Предмет и цель работы: Теоретически исследуется рассеяние радиоволн звуковым импульсом в атмосфере.

Методы и методология работы: С использованием квадратичного разложения фазы и гауссовых диаграмм направленности излучающих систем анализируется асимптотика рассеянного поля в приближении дифракции Френеля.

Результаты работы: Показано, что для малых углов обратного рассеяния поле определяется эффектами фокусировки. Заключение: Предлагается объяснение фокусировки наличием “вырожденных” седловых точек фазы исследуемой подынтегральной функции.

Ключевые слова: рассеяние волн, осциллирующий интеграл, стационарная фаза, “вырожденная” седловая точка

1. Введение

Радиоакустическое зондирование (РАЗ) – достаточно известный в настоящее время дистанционный метод изучения атмосферы. Основой многих теоретических расчетов этого метода является модель рассеяния, впервые предложенная одним из авторов данной работы в 1969–1970 гг., о чем упоминалось в [1]. Суть модели заключается в замене диаграмм направленности излучающих систем гауссовыми и конечных пределов интегрирования по соответствующим переменным на бесконечные. Для случая однопозиционной локации такой прием позволяет вычислить рассеянное поле в аналитическом виде [2, 3] как функцию внешних физических параметров (частота, дальность, скорость ветра и т. д.).

Позже указанная модель использовалась другими авторами при анализе иных случаев локации [4].

Обращение к этой отнюдь не новой теме исследований обусловлено несколькими причинами. Во-первых, некоторые важные свойства рассматриваемого явления могут быть выяснены с помощью общих асимптотических методов [5],

сформировавшихся в последние десятилетия. Во-вторых, имеющиеся результаты расчетов [4] и их интерпретация требуют уточнений. В-третьих, опыт вычислений в [2, 6] позволяет указать связь используемой модели рассеяния с известным асимптотическим методом перевала.

Проведение исследований в соответствии с вышеперечисленными пунктами составляет цель настоящей работы.

2. Интегральное представление рассеянного поля

Поле, рассеянное неоднородностями диэлектрической проницаемости $\epsilon_1(\vec{r}, t)$, в точке наблюдения \vec{R}_2 может быть представлено борновским приближением для решения задачи рассеяния волн слабонеоднородной средой ([3], с. 433; [7], с. 145):

$$\vec{E}_1(\vec{R}_2, t) \cong \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \exp\{-i\omega t\} \times \int_V d^3\vec{r} |\vec{R}_2 - \vec{r}|^{-1} \epsilon_1(\vec{r}, t) [\vec{n} [\vec{E}_0(\vec{r}) \vec{n}]] \exp\{ik(\vec{R}_2 - \vec{r})\}, \quad (1)$$

$$\vec{n} = (\vec{R}_2 - \vec{r}) / |\vec{R}_2 - \vec{r}|.$$

Здесь V – объем, занимаемый указанными неоднородностями; $\epsilon_0 \cong 1$ – невозмущенное значение диэлектрической проницаемости воздуха; $\exp\{-i\omega t\}\vec{E}_0(\vec{r})$ – напряженность электрического поля падающей волны. Для источника с диаграммой направленности $G_1(\vec{m})$, расположенного в точке \vec{R}_1 , поле в дальней зоне передающей антенны

$$\vec{E}_0(\vec{r}) \cong \vec{E}_0 |\vec{R}_1 - \vec{r}|^{-1} G_1(\vec{m}) \exp\{ik|\vec{R}_1 - \vec{r}|\}, \quad (2)$$

$$\vec{m} = (-\vec{R}_1 + \vec{r}) / |\vec{R}_1 + \vec{r}|.$$

Если регистрация поля в точке \vec{R}_2 производится с помощью антенны с диаграммой направленности $G_2(\vec{n})$, то его значение (см. [7], с. 158)

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{R}_2, t) &\cong \frac{k^2}{4\pi} A_e \exp\{-i\omega t\} \times \\ &\times \int_V d^3\vec{r} |\vec{R}_1 + \vec{r}|^{-1} |\vec{R}_2 - \vec{r}|^{-1} \epsilon_1(\vec{r}, t) G_1(\vec{m}) G_2(\vec{n}) \times \\ &\times [\vec{n}[\vec{E}_0, \vec{n}]] \exp\{ik|\vec{R}_1 + \vec{r}| + ik|\vec{R}_2 - \vec{r}|\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь A_e – константа, связанная со свойствами антенны (эффеkтивная площадь, коэффициент направленного действия и т. д.).

Возмущение $\epsilon_1(\vec{r}, t)$, вызванное излучением расположенного в точке \vec{R}_a импульсного акустического источника в однородной атмосфере имеет вид ([3], с. 435; [8], с. 66)

$$\begin{aligned} \epsilon_1(\vec{r}, t) &= A_a U\left(t - |\vec{R}_a + \vec{r}|/c_a\right) |\vec{R}_a + \vec{r}|^{-1} \times \\ &\times \cos\left\{-\Omega_a t + K_a |\vec{R}_a + \vec{r}| + K_a (\vec{v}/c_a)(\vec{R}_a - \vec{r})\right\} G_a(\vec{m}_a), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\vec{m}_a = (-\vec{R}_a + \vec{r}) / |\vec{R}_a + \vec{r}|,$$

где A_a – константа, определяемая мощностью звукового источника и его направленностью; $G_a(\vec{m}_a)$ – звуковая диаграмма направленности излучения; Ω_a – частота звука; $K_a = \Omega_a/c_a$ – волновое число; c_a – невозмущенная скорость звука; \vec{v} – скорость ветра, $U(t)$ – форма (оглабляющая) звукового импульса.

Особенностью рассматриваемой задачи является зависимость от большого числа внешних параметров: $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_a, \omega, k, \Omega_a, K_a, \vec{v}/c_a, G_1,$

G_2, G_a . Даже при наличии точного аналитического решения возникает необходимость фиксации значений большинства из них, чтобы проследить закономерности поведения решения при изменении значений двух-трех параметров. Поэтому в целях выяснения физического механизма рассеяния ограничимся (как и в [4], глава 4) случаем безветренной атмосферы ($\vec{v} = 0$) и векторами $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_a$, лежащими в одной плоскости ($y = 0$). Начало декартовой системы координат $\vec{r} = 0$ поместим в точку пересечения заднего волнового фронта (при импульсном излучении звука) с направлением $\vec{m}_a = (0, 0, 1)$ звуковой диаграммы. При таком выборе ось Oz ориентирована в направлении излучения звукового импульса (рис. 1), а $\vec{R}_1 = (x_1, 0, z_1), \vec{R}_2 = (x_2, 0, z_2), \vec{R}_a = (0, 0, -z_a)$.

Обозначив $\epsilon_s = A_a/2$ и представив $\cos\{\dots\}$ в (4) суммой двух экспонент, приходим к следующему выражению для $\vec{E}_1(\vec{R}_2, t)$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{R}_2, t) &\cong \frac{k^2}{4\pi} A_e \epsilon_s \sum_{j=\pm 1} \exp\{-i(\omega + j\Omega_a)t\} \times \\ &\times \int_V d^3\vec{r} |\vec{R}_1 + \vec{r}|^{-1} |\vec{R}_2 - \vec{r}|^{-1} |\vec{R}_a + \vec{r}|^{-1} [\vec{n}[\vec{E}_0, \vec{n}]] \times \\ &\times G_1(\vec{m}) G_2(\vec{n}) G_a(\vec{m}_a) U\left[t - |\vec{R}_a + \vec{r}|/c_a\right] \exp\{i\Phi(\vec{r})\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Phi(\vec{r}) = k|\vec{R}_1 + \vec{r}| + k|\vec{R}_2 - \vec{r}| + jK_a |\vec{R}_a + \vec{r}| \quad - \quad (6)$$

фаза подынтегрального выражения.

Форма импульса $U(t)$ будет детализирована в ходе дальнейших вычислений.

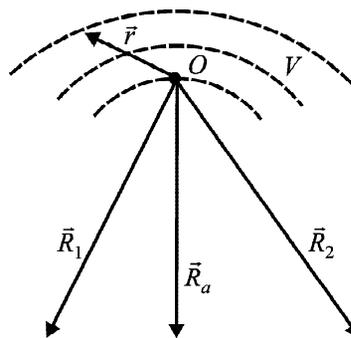


Рис. 1. Геометрия рассеяния

Интеграл (5) относится к типу осциллирующих (интегралов от осциллирующих знакопеременных функций), общим методом асимптотических вычислений которых является метод стационарной фазы и его модификации при наличии катастроф фазового фронта [5].

3. Условие фокусировки рассеянного поля

В соответствии с методикой [1] представим фазу $\Phi(\vec{r})$ разложением (до квадратичных по $\vec{r} = (x, y, z)$ членов разложения), характерным для приближения дифракции Френеля. Так, разложение первого слагаемого в (6) в окрестности начала координат $\vec{r} = 0$ имеет вид

$$k|-\vec{R}_1 + \vec{r}| \cong kR_1 + k(\vec{m}_1\vec{r}) + O_{1,2} + O_{1,3} + O_{1,4} + \dots, \quad (7)$$

где

$$\vec{m}_1 = -\vec{R}_1/R_1, \quad (8)$$

$$\begin{cases} O_{1,2} = (k/2R_1)[r^2 - (\vec{m}_1\vec{r})^2], \\ O_{1,3} = -(k/2R_1^2)(\vec{m}_1\vec{r})[r^2 - (\vec{m}_1\vec{r})^2] \cong -\frac{(\vec{m}_1\vec{r})}{R_1}O_{1,2}, \\ O_{1,4} = (k/8R_1^3)[r^2 - (\vec{m}_1\vec{r})^2][5(\vec{m}_1\vec{r})^2 - r^2] \cong \\ \cong \frac{5(\vec{m}_1\vec{r})^2 - r^2}{4R_1^2}O_{1,2}. \end{cases} \quad (9)$$

Возможность ограничения квадратичными членами разложения требует малости членов третьего $O_{1,3}$ и четвертого $O_{1,4}$ порядков. Для случая $|(\vec{m}_1\vec{r})| \sim r$ достаточно условия

$$|O_{1,3}| \sim (k/2R_1^2)|(\vec{m}_1\vec{r})|[r^2 - (\vec{m}_1\vec{r})^2] \ll 1. \quad (10)$$

Если же $|(\vec{m}_1\vec{r})| \ll r$, то достаточным условием будет требование

$$|O_{1,4}| \sim (kr^4)/(8R_1^3) \ll 1. \quad (11)$$

Авторы [4] на с. 76 указывают именно такой критерий применимости своих разложений, что накладывает ограничения на продольный размер области разложений $|(\vec{m}_1\vec{r})| \ll r$ (“тонкий” звуковой пакет).

Аналогичным образом выглядят выражения для разложений второго ($O_{2,2}, O_{2,3}, O_{2,4}$) и третьего ($O_{a,2}, O_{a,3}, O_{a,4}$) слагаемых в фазе (6) с заменами $(-\vec{R}_1)$ на \vec{R}_2 и $(-\vec{R}_a)$, \vec{m}_1 на $\vec{n}_2 = \vec{R}_2/R_2$ и $\vec{m}_a = -\vec{R}_a/R_a$ соответственно. В результате получим

$$\Phi(\vec{r}) \cong \Phi_0 + \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) + \dots, \quad (12)$$

$$\Phi_0 = kR_1 + kR_2 + jK_aR_a, \quad (13)$$

$$\Phi_1(\vec{r}) = \left(\frac{d\Phi}{d\vec{r}} \right)_0 \cdot \vec{r} \equiv (\vec{a}\vec{r}) = a_x x + a_y y + a_z z, \quad (14)$$

$$\Phi_2(\vec{r}) = a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + a_{xz}xz, \quad (15)$$

$$a_{xx} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{m_{1z}^2}{R_1} + \frac{n_{2z}^2}{R_2} \right) + j \frac{K_a}{2} \frac{m_{az}^2}{R_a}, \quad (16)$$

$$a_{yy} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + j \frac{K_a}{2} \frac{1}{R_a}, \quad (17)$$

$$a_{zz} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{m_{1x}^2}{R_1} + \frac{n_{2x}^2}{R_2} \right), \quad (18)$$

$$a_{xz} = \frac{2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right)_0 = -k \left(\frac{m_{1x}m_{1z}}{R_1} + \frac{n_{2x}n_{2z}}{R_2} \right). \quad (19)$$

Нижний индекс “0” означает, что производные берутся в точке $\vec{r} = 0$.

Заметим, что возможна ситуация, когда малость членов разложений 3-го и 4-го порядков каждой из трех составляющих фазы (6) недостаточна для выполнения неравенств (10) и (11), однако их сумма в некоторой области значений K_a/k может быть достаточно малой, чтобы ею можно было пренебречь. Такая ситуация из практики РАЗ будет рассмотрена позднее в ходе конкретных вычислений.

В общем случае $a_{xz} \neq 0$ и разложение (12) фазы содержит слагаемые второго порядка со смешанным произведением xz . Преобразование $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ поворота системы координат вокруг оси Oy (см [1], формулу (21)) на угол

$$\varphi = (1/2) \arctg[a_{xz}/(a_{xx} - a_{zz})] \quad (20)$$

приводит $\Phi_1(\vec{r})$ к виду

$$\Phi_1(\vec{r}) \equiv \Phi_1(\vec{r}') = \vec{a}'\vec{r}', \quad (21)$$

где \vec{a}' – результат поворота \vec{a} .

При этом преобразовании квадратичная часть разложения приобретает канонический вид квадратичной формы

$$\Phi_2(\vec{r}) \equiv \Phi_2(\vec{r}') = A_{xx}x'^2 + A_{yy}y'^2 + A_{zz}z'^2. \quad (22)$$

Величины A_{xx}, A_{yy}, \dots определяются формулами ([1], формулы (16))

$$\begin{cases} A_{xx} = a_{xx} \cos^2 \varphi + a_{zz} \sin^2 \varphi + a_{xz} \sin \varphi \cos \varphi, \\ A_{yy} = a_{yy}, \\ A_{zz} = a_{xx} \sin^2 \varphi + a_{zz} \cos^2 \varphi - a_{xz} \sin \varphi \cos \varphi, \\ A_{xz} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Последующее преобразование сдвига

$$\vec{r}' = \vec{r}_s + \vec{R} \quad (24)$$

позволяет в разложении убрать члены первого порядка, в результате чего

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{R}) = \Phi_s + A_{xx}X^2 + A_{yy}Y^2 + A_{zz}Z^2, \quad (25)$$

$$\Phi_s = \Phi_0 - A_{xx}x_s'^2 - A_{yy}y_s'^2 - A_{zz}z_s'^2. \quad (26)$$

В этих формулах $\vec{R} = (X, Y, Z)$, а компоненты радиус-вектора стационарной (седловой) точки $\vec{r}'_s = (x'_s, y'_s, z'_s)$ определяются уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x'_s} = a'_x + x'_s 2A_{xx} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y'_s} = a'_y + y'_s 2A_{yy} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z'_s} = a'_z + z'_s 2A_{zz} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Характерные масштабы осцилляций экспоненты с фазой (25) вдоль осей X, Y, Z порядка $l_x \sim |\pi/A_{xx}|^{1/2}, l_y \sim |\pi/A_{yy}|^{1/2}, l_z \sim |\pi/A_{zz}|^{1/2}$.

Соответствующие масштабы изменений предэкспоненциального множителя под знаком интеграла в (5) порядка $V_{ef}^{1/3}$ (где V_{ef} фактически является областью взаимного пересечения диаграмм

в пределах звукового импульса). В случае, когда

$$l_x, l_y, l_z \ll V_{ef}^{1/3}, \quad (28)$$

для стационарных точек, принадлежащих V_{ef} , асимптотическая оценка (5) по методу стационарной фазы ([9], с. 186, формула (2.6')) приводит к результату

$$\vec{E}_1(\vec{R}_2, t) \sim l_x l_y l_z \vec{f}(\vec{r}'_s) \exp\{i\sigma\pi/4\} \exp\{i\Phi_s\}. \quad (29)$$

Здесь σ – сигнатура квадратичной формы (25), а $\vec{f}(\vec{r}'_s)$ – значение предэкспоненциального множителя в стационарной точке.

В противоположном случае, $l_x, l_y, l_z \gg V_{ef}^{1/3}$, что реализуется в области значений внешних параметров, при которых $A_{xx}, A_{yy}, A_{zz} \rightarrow 0$, обычный метод стационарной фазы становится неприменим. При этом согласно (22) в повернутой системе координат $\Phi_2(\vec{r}') \rightarrow 0$, и вычисление интеграла (5) в силу линейной зависимости $\Phi(\vec{r}') \equiv \Phi_0 + \Phi_1(\vec{r}')$ в этом случае сводится к процедуре асимптотической оценки преобразования Фурье от предэкспоненциального множителя $\vec{f}(\vec{r}')$. Максимум модуля этой оценки достигается при $\vec{a}' \rightarrow 0$. Согласно (14) условие $\vec{a}' = 0$ можно записать в виде

$$k(\vec{m}'_1 - \vec{n}'_2) + jK_a \vec{m}'_a = 0. \quad (30)$$

При этом оценка интеграла (5) ввиду отсутствия осцилляций подинтегрального выражения сводится к теореме о среднем значении

$$\vec{E}_1(R_2, t) \sim V_{ef} \vec{f}(\vec{r}'_c) \exp\{i\Phi_0\}. \quad (31)$$

где $\vec{f}(\vec{r}'_c)$ – значение в некоторой средней точке \vec{r}'_c , принадлежащей V_{ef} . Из сравнения (29) и (31) с учетом (28) следует, что во втором случае рассеянное поле намного больше.

Величины A_{xx}, A_{yy}, A_{zz} в базисе \vec{R} с точностью до множителя 2 совпадают с элементами матрицы Гесса, являющейся в этом базисе диагональной. Их обращение в нуль означает вырождение этой матрицы, что является признаком фокусировки рассеянного поля ([5], с. 1555; [10], с. 431–433).

Значения физических величин, отвечающих этому явлению, можно получить, выразив нулевые значения A_{xx}, A_{yy}, A_{zz} через значения внешних параметров, заданных в исходном базисе \vec{r} .

Складывая первое и третье равенство (23) с учетом (16)–(19), получим

$$A_{xx} + A_{zz} = a_{xx} + a_{zz} \equiv a_{yy} = A_{yy}. \quad (32)$$

Процедура вычитания этих же равенств приводит к

$$A_{xx} - A_{zz} = (a_{xx} - a_{zz}) \cos 2\varphi + a_{xz} \sin 2\varphi. \quad (33)$$

Имея ввиду (20), это выражение можно переписать в виде

$$A_{xx} - A_{zz} = \sqrt{(a_{xx} - a_{zz})^2 + a_{xz}^2}. \quad (34)$$

Если $A_{yy} = 0$, то из (32) следует

$$a_{xx} + a_{zz} = 0, \quad (35)$$

а из условия $A_{xx} = A_{zz} = 0$ в соответствии с (34) –

$$a_{xx} - a_{zz} = 0, \quad (36)$$

$$a_{xz} = 0. \quad (37)$$

Вычитая (36) из (35), получим

$$a_{zz} = \frac{k}{2} \left(\frac{m_{1x}^2}{R_1} + \frac{n_{2x}^2}{R_2} \right) = 0, \quad (38)$$

что может быть выполнено лишь при $m_{1x}^2 = n_{2x}^2 = 0$. Это влечет за собой $m_{1z}^2 = n_{2z}^2 = 1$, поскольку $\vec{m}_1, \vec{n}_2, \vec{m}_a$ лежат в плоскости $y = 0$.

В результате

$$a_{xx} = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + j \frac{K_a}{2} \frac{1}{R_a} = a_{yy} = A_{yy} = 0. \quad (39)$$

Условие (37) для a_{xz} при таких \vec{m}_1 и \vec{n}_2 также выполняется. Условие (39) может быть выполнено лишь для разностной гармоники в рассеянном поле ($j = -1$), причем оно сводится к требованию

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{K_a}{k} \frac{1}{R_a}. \quad (40)$$

С учетом полученных ограничений, $j = -1$, $\vec{m}_1 = (0, 0, m_{1z})$, $\vec{n}_2 = (0, 0, n_{2z})$, и по условию задачи, $\vec{m}_a = (0, 0, 1)$, условие обращения в нуль вектора

$$\vec{a} = \left(\frac{d\Phi}{d\vec{r}} \right)_0 \text{ сводится к требованию}$$

$$a_z = k(m_{1z} - n_{2z}) - K_a = 0. \quad (41)$$

При расположении всех антенн в полупространстве $z < 0$ имеем $m_{1z} = +1$, $n_{2z} = -1$ и условие (41) можно переписать в виде

$$K_a/k = 2. \quad (42)$$

Подставив (42) в (40) получаем формулу сферического зеркала ([11], с. 422):

$$\frac{2}{R_a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (43)$$

которая связывает фокусное расстояние $R_a/2$ вогнутого сферического зеркала с расстояниями от зеркала до источника R_1 и изображения R_2 .

Рассмотрим случай симметричного расположения $\vec{R}_1 = (-\rho, 0, R_a)$ и $\vec{R}_2 = (\rho, 0, R_a)$ относительно $\vec{R}_a = (0, 0, R_a)$, когда

$$R_1 = R_2 = \sqrt{R_a^2 + \rho^2} \cong R_a + \rho^2/2R_a + \dots,$$

при этом $m_{1x} = n_{2x} = \rho/R_1$, $m_{1z} = -n_{2z} = R_a/R_1$.

При такой симметрии $a_{xz} = 0$. В результате $A_{xx} = a_{xx}$, $A_{yy} = a_{yy}$, $A_{zz} = a_{zz}$. Из соотношения (32) следует, что обратиться в нуль могут либо все три величины, либо одна из них. Первый случай (при $\rho = 0$) проанализирован выше, поэтому исследуем возможность осуществления второго случая. Пусть

$$A_{yy} = 0 = \frac{k}{R_1} - \frac{K_a}{2R_a}, \quad (44)$$

а

$$A_{xx} = -A_{zz} = -k \frac{m_{1x}^2}{R_1} \neq 0. \quad (45)$$

Из равенства (44) следует, что условием такой одномерной фокусировки является соотношение

$$\frac{K_a}{k} = 2 \frac{R_a}{R_1} \cong 2 - \frac{\rho^2}{R_a^2} + \dots = 2m_{1z}. \quad (46)$$

Компоненты вектора \vec{a} согласно (14) равны: $a_x = 0$, $a_y = 0$, $a_z = k(2m_{1z} - K_a/k) = 0$. Следовательно, и в этом случае $\vec{r} = 0$ является вырожденной особой точкой, внутренней по отношению к V_{ef} . Равенство (44) является при этом условием одномерной фокусировки ([5], с. 1155).

В случае равенства нулю A_{xx} имеем:

$$A_{xx} = k \frac{m_{1z}^2}{R_1} - \frac{K_a}{2} \frac{1}{R_a} = 0, \quad (47)$$

$$A_{yy} = A_{zz} = k \frac{m_{1x}^2}{R_1}. \quad (48)$$

Из (47) получаем условие

$$K_a/k = 2m_{1z}^2 \frac{R_a}{R_1} = 2m_{1z}^3 \cong 2 - 3 \frac{\rho^2}{R_a^2} + \dots \quad (49)$$

При этом $a_x = 0$, $a_y = 0$, $a_z = k(2 - K_a/k) = 2km_{1z}m_{1x}^2 \neq 0$, что свидетельствует о том, что $\vec{r} = 0$ не является в этом случае стационарной точкой. Согласно (27) координаты стационарной точки: $x_s = 0$, $y_s = 0$, $z_s = -a_z/2A_{zz} = -R_1m_{1z} = -R_a$. Данная точка не имеет физического смысла, поскольку нарушено основное требование применимости френелевского приближения ($r_s/R_a \ll 1$), положенного в основу расчетов.

Случай $A_{zz} = 0$, $A_{yy}, A_{xx} \neq 0$ при $\rho \neq 0$ не может быть реализован, поскольку $A_{zz} = \frac{k}{R_1} m_{1x}^2 = \frac{k}{R_1^3} \rho^2 \neq 0$.

При фокусировке характерные масштабы изменения фазы и предэкспоненциального множителя в (5) сопоставимы, из-за чего обычный метод стационарной фазы неприменим. Одним из выполнимых способов оценки в этом случае является модель рассеяния, предложенная в [2], о чем говорилось во введении. Ниже будет показана связь этой модели с более общим асимптотическим методом – методом перевала в комплексной плоскости.

4. Рассеянное поле в основной схеме РАЗ

Расчетам рассеяния для схемы РАЗ, обычно используемой на практике и названной авторами [4] (см. с. 73) основной, присущи по крайней мере два недостатка.

Во-первых, сумма разложений трех слагаемых в фазе (6), представленных в трех различных точках $\vec{r} = (-\rho, 0, 0)$, $\vec{r} = (+\rho, 0, 0)$ и $\vec{r} = (0, 0, 0)$ соответственно, не является, в общем смысле слова, разложением фазы в точке $\vec{r} = (0, 0, 0)$. С некоторой погрешностью такая сумма может пред-

ставлять требуемое разложение фазы лишь для точек взаимного пересечения областей сходимости трех вышеназванных разложений. Очевидно, что подобная ситуация реализуется только при близком расположении всех трех антенн. Критерии такой близости можно получить, сравнив разложение в [4] с разложением, представленным формулой (12). При его выполнении рассеяние можно назвать “малоугловым обратным рассеянием”. Для него согласно условиям (42) и (46) возможна фокусировка рассеянного поля.

Второй недостаток расчетов [4] связан с рассмотрением частного случая симметричного расположения радиоантенн относительно звуковой, что не позволяет судить об оптимальности зондирования в зависимости от расположения передающей и приемной радиоантенн относительно акустической.

Рассмотрим разложение фазы (12) для основной схемы РАЗ в “малоугловом” приближении в общем случае несимметричного расположения антенн: $\vec{R}_1 = (\rho_1, 0, -z_a)$, $\vec{R}_2 = (\rho_2, 0, -z_a)$, $\vec{R}_a = (0, 0, -z_a)$. Проведем оценку $O_{1,3}$ и $O_{1,4}$, определяемых равенствами (10) и (11), для условий $z/r_{\perp} \leq 1$, $(\rho_1/z_a), (\rho_2/z_a) \leq r_{\perp}/z_a$, означающих, что продольный размер z рассеивающего объема, и разнесения ρ_1, ρ_2 радиоантенн относительно звуковой не превышают поперечного размера r_{\perp} рассеивающего объема. При выполнении этих требований

$$O_{1,3} \sim \frac{kr_{\perp}^2}{2z_a^2} z < \frac{kr_{\perp}^3}{2z_a^2}, \quad (50)$$

$$O_{1,4} \sim \frac{kr_{\perp}^3}{2z_a^2} \frac{5}{4} \frac{r_{\perp}}{z_a} \ll \frac{kr_{\perp}^3}{2z_a^2}. \quad (51)$$

Очевидно, что малость $O_{1,3}$ влечет за собой малость и $O_{1,4}$.

Таким образом, для ограничения квадратичными членами в данном случае достаточно выполнения (50). При этом разложение фазы (12) приобретает вид, определяемый формулами (13)–(19) с конкретными значениями величин:

$$R_1 = z_a \left(1 + \rho_1^2/z_a^2\right)^{1/2}, \quad R_2 = z_a \left(1 + \rho_2^2/z_a^2\right)^{1/2}, \\ R_a = z_a,$$

$$\Phi_0 \cong kz_a \left[2 + j(K_a/k) + (\rho_1^2 + \rho_2^2)/2z_a^2 + \dots \right], \quad (52)$$

$$\begin{cases} \Phi_{1x} \equiv a_x x \approx -kx(\rho_1/z_a + \rho_2/z_a) + \dots, \\ \Phi_{1y} \equiv a_y y = 0, \\ \Phi_{1z} \equiv a_z z = kz \left[2 + j(K_a/k) - (\rho_1^2 + \rho_2^2)/2z_a^2 + \dots \right], \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} \Phi_{2x} \equiv a_{xx} x^2 = (kx^2/2z_a) \left[2 + j(K_a/k) - (3/2)(\rho_1^2 + \rho_2^2)/z_a^2 + \dots \right], \\ \Phi_{2y} \equiv a_{yy} y^2 = (ky^2/2z_a) \left[2 + j(K_a/k) - (\rho_1^2 + \rho_2^2)/2z_a^2 + \dots \right], \\ \Phi_{2z} \equiv a_{zz} z^2 = (kz^2/2z_a) \left[(\rho_1^2 + \rho_2^2)/z_a^2 + \dots \right], \\ \Phi_{2xz} \equiv a_{xz} xz = (kxz/z_a) \left[(\rho_1 + \rho_2)/z_a + \dots \right]. \end{cases} \quad (54)$$

Многоточие в этих формулах означает отброшенные более высокие степени величин ρ_1/z_a и ρ_2/z_a .

При симметричном расположении радиоантенн ($\rho_2 = -\rho_1$) имеем $\Phi_{2xz} = 0$. Если же $(\rho_1 + \rho_2) \neq 0$, но не превышает размера x объема V , то

$$|\Phi_{2xz}| \leq \left| 2 \frac{kx^2}{2z_a^2} z \right| \sim 2 |O_{1,3}| \ll 1 \quad (55)$$

согласно условиям (50), (51), наложенным ранее. Поэтому поправкой Φ_{2xz} в фазе можно пренебречь, как и Φ_{2z} , поскольку $|\Phi_{2z}| \leq |O_{1,3}| |z/z_a|$.

Положив $\rho_2 = -\rho_1 = \rho_0$ в наших разложениях, можно сравнить исходное для последующих вычислений выражение для фазы с тем, которое получено в [4] на с. 76 при подстановке в формулу (4.9) выражений для E_0 и ϵ_s^* , определяемых формулой (4.11) там же:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv (2k - q + k\rho_0^2/z_a^2)z_a + \\ &+ (2k - q)z' + (1/2z_a)(2k - q)\rho^2. \end{aligned} \quad (56)$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv (2k + jK_a + k\rho_0^2/z_a^2)z_a + (2k + jK_a)z + \\ &+ (1/2z_a)(2k + jK_a)(x^2 + y^2) + O(\rho_0^2/z_a^2), \end{aligned} \quad (57)$$

где $O(\rho_0^2/z_a^2)$ – соответствующие поправки в формулах (53), (54).

Учитывая соответствие обозначений $z' \leftrightarrow z$, $q \leftrightarrow K_a$, $\rho'^2 \leftrightarrow (x^2 + y^2)$ получаем для разностной гармоники ($j = -1$) в рассеянном поле совпадение (56) и (57) до членов порядка $O(\rho_0^2/z_a^2)$.

Для проведения вычислений интеграла в формуле (5) необходимо задать конкретный вид диаграммных множителей и формы $U(t)$ звукового импульса. Будем рассматривать $U(t)$ двух видов:

1) $U(t)$ для импульса прямоугольной формы, $U(t) = U_1(t) = 1$ на интервале $0 \leq t \leq \tau_0$ и $U_1(t) = 0$ при $t > \tau_0$;

2) $U(t)$ для гауссовой формы импульса, $U(t) = U_2(t) = \exp\left\{-[(t - \tau_0/2)/\Delta\tau]^2\right\} U_1(t)$ на интервале $0 \leq t \leq \tau_0$ и $U(t) = 0$ при $t > \tau_0$.

Диаграммы направленности выберем гауссовыми:

$$G_1(\vec{m}) = \exp\left\{-\alpha_{1e}^2(\vec{r}_\perp - \vec{\rho}_1)^2\right\},$$

$$G_2(\vec{n}) = \exp\left\{-\alpha_{2e}^2(\vec{r}_\perp - \vec{\rho}_2)^2\right\},$$

$$G_a(\vec{m}_a) = \exp\left\{-\alpha_s^2 r_\perp^2\right\},$$

где

$$\alpha_{1e}^2 = k^2 a_e^2 / 2R_1^2 \cong k^2 a_e^2 / 2z_a^2,$$

$$\alpha_{2e}^2 = k^2 a_e^2 / 2R_2^2 \cong k^2 a_e^2 / 2z_a^2,$$

$$\alpha_s^2 = K_a^2 a_s^2 / 2z_a^2.$$

Для достаточно узких диаграмм положим

$$[\vec{n}[\vec{E}_0 \vec{n}]] \approx [\vec{n}_2[\vec{E}_0 \vec{n}_2]] \equiv \vec{e}_1.$$

В результате формула (5) примет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{R}_2, t) &\approx \frac{k^2 \vec{e}_1}{4\pi z_a^3} A_{1e} \epsilon_s \times \\ &\times \sum_{j=\pm 1} \exp\left\{-i(\omega + j\Omega_a)t - \alpha_{1e}^2(\rho_1^2 + \rho_2^2)\right\} I_{1,2}, \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int dx dy \int_{z_i}^{z_u} dz U_{1,2}(T) \times \\ &\times \exp\left\{i\Phi - (2\alpha_{1e}^2 + \alpha_s^2)(x^2 + y^2) + 2\alpha_{1e}^2(\rho_1 + \rho_2)x\right\}, \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь $T = t - \left| -\vec{R}_a + \vec{r} \right| / c_a$, а z_u и z_l – точки на переднем и заднем волновых фронтах звукового импульса соответственно:

$$c_a t = \sqrt{(z_a + z_u)^2 + r_\perp^2} \approx z_a + z_u + r_\perp^2 / 2(z_a + z_u) + \dots,$$

$$c_a(t - \tau_0) = \sqrt{(z_a + z_l)^2 + r_\perp^2} \approx z_a + z_l + r_\perp^2 / 2(z_a + z_l) + \dots$$

С той же степенью точности для $0 \leq T \leq \tau_0$

$$c_a(t - T) \approx z_a + z + r_\perp^2 / 2(z_a + z) + \dots,$$

где $z_l \leq z \leq z_u$. Отсюда, обозначив $\zeta = c_a T$, получим

$$z \cong (\Delta z - r_\perp^2 / 2z_a - \zeta)(1 + r_\perp^2 / 2z_a^2 + \dots). \quad (60)$$

Если во второй скобке пренебречь величиной $r_\perp^2 / 2z_a^2 \ll 1$ (об условиях правомерности этой процедуры несколько позже) и перейти от z к новой переменной $0 \leq \zeta \leq \Delta z$, то

$$I_{1,2} = \exp\{i\Phi_0\} I_x I_y \exp\{ia_z \Delta z\} I_{\zeta 1,2}, \quad (61)$$

где

$$I_x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{b_{xx} x^2 + b_x x\} dx, \quad (62)$$

$$I_y = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{b_{yy} y^2\} dy, \quad (63)$$

$$\exp\{ia_z \Delta z\} I_{\zeta 1,2} = \exp\{ia_z \Delta z\} \int_0^{\Delta z} f_{1,2}(\zeta) \exp\{-ia_z \zeta\} d\zeta, \quad (64)$$

причем

$$b_{xx} = -(2\alpha_{1e}^2 + \alpha_s^2) - (ik/2z_a)(\rho_1^2 + \rho_2^2) / 2z_a^2 \approx -(2\alpha_{1e}^2 + \alpha_s^2), \quad (65)$$

$$b_x = 2\alpha_{1e}^2(\rho_1 + \rho_2) + ia_x, \quad (66)$$

$$b_{yy} = -(2\alpha_{1e}^2 + \alpha_s^2), \quad (67)$$

а $f_1(\zeta) \equiv 1$ для прямоугольного импульса $U(t)$ и $f_2(\zeta) = \exp\left\{-\left[(\zeta - \Delta z/2)/c_a \Delta \tau\right]^2\right\}$ для гауссового импульса $U(t)$.

Интегралы (62), (63) являются табличными. Согласно [12] (с. 344, формула (11)):

$$I_x = l_x \exp\{-b_x^2 / 4b_{xx}\}, \quad l_x = \sqrt{-\pi/b_{xx}}, \quad (\text{Re } b_{xx} < 0), \quad (68)$$

$$I_y = l_y \equiv \sqrt{-\pi/b_{yy}}, \quad (\text{Re } b_{yy} < 0). \quad (69)$$

Интеграл в (64) является преобразованием Фурье от $f_{1,2}(\zeta)$ на интервале $0 \leq \zeta \leq \Delta z$:

$$\exp\{ia_z \Delta z\} I_{\zeta 1,2} = l_\zeta \exp\{ia_z \Delta z/2\} F_{1,2}, \quad (70)$$

где

$$l_\zeta = \Delta z \equiv c_a \tau_0, \quad (71)$$

$$F_1 = \frac{\sin(a_z \Delta z/2)}{(a_z \Delta z/2)}, \quad (72)$$

$$F_2 = \exp\left\{-\left(a_z c_a \Delta \tau/2\right)^2\right\} \times (\Delta \tau/\tau_0) \left(\sqrt{\pi}/2\right) [\text{erf}(\mu_u) - \text{erf}(\mu_l)], \quad (73)$$

$$\mu_u = (\Delta z/2c_a \Delta \tau) \left[1 + i(a_z/\Delta z)(c_a \Delta \tau)^2\right], \quad (74)$$

$$\mu_l = (\Delta z/2c_a \Delta \tau) \left[-1 + i(a_z/\Delta z)(c_a \Delta \tau)^2\right]. \quad (75)$$

При $(\Delta z/2c_a \Delta \tau) \equiv (\tau_0/2\Delta \tau) \rightarrow \infty$, $\mu_u \rightarrow +\infty$, $\mu_l \rightarrow -\infty$ и

$$l_\zeta F_2 \rightarrow \sqrt{\pi}(c_a \Delta \tau) \exp\left\{-\left(a_z c_a \Delta \tau/2\right)^2\right\}. \quad (76)$$

Зависимость $|F_1|^2$ и $|F_2|^2$ от $a_z \Delta z/2$ для ряда значений $m = 2\Delta \tau/\tau_0$, представленная на рис. 2, свидетельствует об уменьшении “резонансности” рассеяния с уменьшением $2\Delta \tau/\tau_0$.

Оценку отброшенных членов в фазе $ia_z z$ при замене (60) имеет смысл проводить для значений a_z , не слишком отклоняющихся от значений, приводящих к фокусировке поля, т. е. для $|a_z \Delta z/2| < \pi$.

Оценка отброшенного члена пропорционального $(\Delta z - \zeta)$ приводит к условию

$$|a_z(\Delta z - \zeta)r_\perp^2/2z_a^2| \leq \pi(r_\perp^2/z_a^2) \ll 1,$$

легко выполняемому при $r_\perp \ll z_a$. Оценка отброшенного члена $\sim r_\perp^2/2z_a^2$,

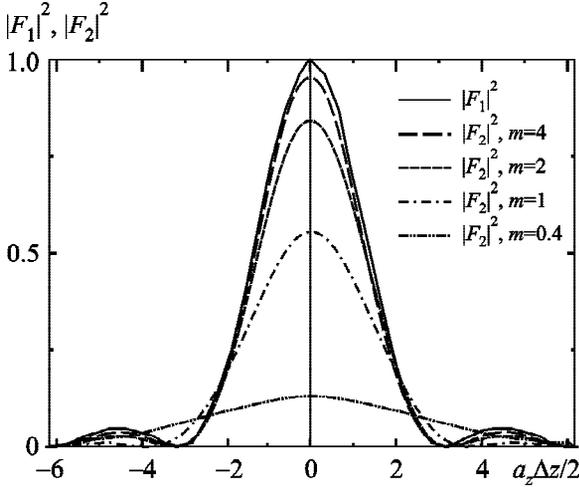


Рис. 2. Резонансные множители $|F_1|^2$, $|F_2|^2$

$$\left| \left(a_z r_\perp^2 / 2z_a \right) \left(r_\perp^2 / 2z_a^2 \right) \right| \leq \left(k r_\perp^4 / 2z_a^3 \right) (\pi / k \Delta z) \approx \approx O_{1,4} (\lambda / 2 \Delta z) \ll O_{1,4},$$

также приводит к малым поправкам, если $O_{1,4} \leq 1$.

Подставив (62), (63) и (70) в (61), а (61) в (58), получим

$$\begin{aligned} \bar{E}_1(\bar{R}_2, t) &\approx \frac{k^2 \bar{e}_1}{4\pi z_a^3} A_{1e} \varepsilon_s \times \\ &\times \sum_{j=\pm 1} \exp\{-i(\omega + j\Omega_a)t + i\Phi_0 + ia_z \Delta z / 2\} \times \\ &\times l_x l_y l_{z1,2} F_{1,2} \exp\{-\alpha_{1e}^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2) - b_x^2 / 4b_{xy}\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Абсолютная величина (77) при изменении ρ_1 и ρ_2 определяется зависимостью от этих величин множителя $F_{1,2}$ и показателя экспоненты:

$$\varphi(\rho_1, \rho_2) = -\alpha_{1e}^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2) - b_x^2 / 4b_{xx}, \quad (78)$$

где для условий дальней зоны ($ka_e^2 / z_a \ll 1$) второе слагаемое в (78)

$$\begin{aligned} -b_x^2 / 4b_{xx} &\approx -\gamma^2 (\rho_1 + \rho_2)^2 \equiv \\ &\equiv -\left[4a_e^2 (1 + 2a_s^2 / a_e^2) \right]^{-1} (\rho_1 + \rho_2)^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Характерный масштаб изменений $(\rho_1 + \rho_2)$ для этой величины

$$|\rho_1 + \rho_2| \sim 2\alpha_e \sqrt{1 + 2a_s^2 / a_e^2}. \quad (80)$$

Значительные изменения первого слагаемого в (78) наступают при

$$(\rho_1^2 + \rho_2^2) \geq \alpha_{1e}^{-2} \approx \frac{2z_a^2}{k^2 a_e^2} \sim r_\perp^2 \gg a_e^2, a_s^2. \quad (81)$$

Аналогичные изменения $F_{1,2}$, как это следует из (71), происходят при

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 \sim 4\pi (z_a^2 / k \Delta z). \quad (82)$$

Отношение (82) к (81) порядка $4\pi^2 (a_e / \Delta z) \times (a_e / \lambda)$. При характерных для практики величинах $a_e / \Delta z > 0.1$ это отношение больше $4(a_e / \lambda) \gg 1$, что обеспечивает значительно более медленные изменения $F_{1,2}$ по сравнению с экспонентой.

Это является основанием при определении точек экстремумов (77) считать $F_{1,2}$ постоянной величиной для $|\rho_1|, |\rho_2| \leq r_\perp$ и учитывать лишь изменения показателя экспоненты (78).

При фиксированном значении ρ_1 максимум $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ достигается при

$$\rho_2 = \rho_{2m} \equiv -\rho_1 \gamma^2 / (\gamma^2 + \alpha_{1e}^2) \approx -\rho_1 + O(ka_e^2 / z_a), \quad (83)$$

т. е. практически в “зеркальной” точке $\bar{R}_2 = (-\rho_1, 0, z_a)$. В этой точке

$$\varphi(\rho_1, \rho_{2m}) \approx -2\alpha_{1e}^2 \rho_1^2. \quad (84)$$

Как функция ρ_1 эта величина максимальна при $\rho_1 = \rho_{1M} = 0$, т. е. в условиях однопозиционной локации.

Характерный масштаб $\Delta\rho_1$ убывания поля с увеличением ρ_1 в точке $\rho_2 = \rho_{2m}$ согласно (84)

$$\Delta\rho_1 \approx (2\alpha_{1e}^2)^{-1/2} = z_a / ka_e \sim r_\perp. \quad (85)$$

Характерный масштаб $\Delta\rho_2$ убывания поля при уходе из “зеркальной” точки $\rho_2 = \rho_{2m} + \Delta\rho_2$ определяется из условия

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_1, \rho_{2m}) - \varphi(\rho_1, \rho_{2m} + \Delta\rho_2) &= \\ = -(\gamma^2 + \alpha_{1e}^2) (\Delta\rho_2)^2 &= -1 \end{aligned}$$

и равен

$$|\Delta\rho_2| \approx (\gamma^2 + \alpha_{1e}^2)^{-1/2} = \gamma^{-1} \ll r_\perp, \quad (86)$$

что равнозначно оценке (80).

Таким образом, при заданном ρ_1 для вектора $\vec{R}_1 = (\rho_1, 0, -z_a)$ месторасположения передающей радиоантенны рассеянное поле сосредоточено в окрестности “зеркальной” точки $\vec{R}_2 = (\rho_2, 0, -z_a)$, где $\rho_2 \approx -\rho_1 + \Delta\rho_2$, а $\Delta\rho_2 \sim 2a_e \sqrt{1 + 2a_s^2/a_e^2}$. С удалением передающей антенны рассеянное поле в “зеркальной” точке убывает как $\exp\{-2\alpha_{1e}^2 \rho_1^2\}$. Характерным масштабом этого убывания $\Delta\rho_1$ является поперечный размер r_\perp рассеивающего объема.

Поле (77) представлено суммой двух гармоник: суммарной ($j = +1$) и разностной ($j = -1$). Суммарной можно пренебречь, поскольку для нее

$$\frac{a_z \Delta z}{2} = \frac{k \Delta z}{2} \left[2 + \frac{j K_a}{k} - \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2z_a^2} \right] \geq k \Delta z \gg 1,$$

а множитель $F_{1,2} \ll 1$. Разностная же гармоника имеет резонансную природу, связанную с синфазным сложением полей, рассеянных отдельными элементами $d^3\vec{r}$ рассеивающего объема V , при значениях внешних параметров, отвечающих одномерной фокусировке (формула (46)). Для этой гармоники $a_z \Delta z / 2 \rightarrow 0$ при $K_a / k \rightarrow 2 - (\rho_1^2 + \rho_2^2) / 2z_a^2$ и, соответственно, $F_{1,2} \rightarrow 1$. При этом согласно формулам (52)–(54) фаза $\Phi(\vec{r}) \approx \Phi_0 \approx \text{const}$ для всех точек \vec{r} , принадлежащих V .

Частота рассеянного поля (77) определяется производной по времени $\Phi'(t)$ фазы, которая при $\rho_2 = -\rho_1 = \rho$ выглядит следующим образом:

$$\Phi'(t) \approx -\omega + kc_a (\cos \theta_{1a} + \cos \theta_{2a}) + \dots$$

Здесь $\cos \theta_{1a} = R_a / R_1 = R_a / R_2 = \cos \theta_{2a} \approx 1 - \rho^2 / z_a^2$ – проекция направления скорости движения “вырожденной” седловой точки $r_s = 0$ фазы на направления $-\vec{R}_1$ и $-\vec{R}_2$ соответственно.

В обоснование замечания о возможном нарушении неравенств (10) и (11) проведем оценки $O_{1,3}$ и $O_{1,4}$, взяв за исходные данные значения длин радиоволн $\lambda = \lambda_e$ и ширин диаграмм $2\theta_e$, приведенные в табл. 2 на с. 24 в [4]. Аналогично [3] оценим радиус апертуры a_e из соотношения $a_e \approx \lambda_e / 2\theta_e$, как при дифракции на щели, а расстояние R^{tr} до переходной зоны $R^{tr} \approx 2\pi a_e^2 / \lambda_e$. Полагая $R_1 \approx z_a$, $r_\perp / z_a \approx \theta_e$, для $O_{1,3}$ имеем оценку

$$O_{1,3} \approx \theta_e^2 k \Delta z / 2,$$

а для $O_{1,4}$ –

$$O_{1,4} \approx \left[4(\Delta z)^2 - r_\perp^2 \right] \theta_e^2 k / 8z_a.$$

Расчеты проводились для $N = \Delta z / \lambda_e = 25, 50$ и 100 и $M = z_a / R^{tr} = 5, 10$ и 20 . Расчетные данные для $O_{1,3}$ сведены в табл. 1, а для $O_{1,4}$ – в табл. 2. Данные для $O_{1,3}$ подтверждают нарушение неравенства (10) с ростом $N = \Delta z / \lambda_e$.

При нарушении условий (10) и (11) ограниченные квадратичными членами разложения фазы (6) требует малости сумм:

$$|O_3| = |O_{1,3} + O_{2,3} + O_{a,3}| \ll 1, \quad (10')$$

$$|O_4| = |O_{1,4} + O_{2,4} + O_{a,4}| \ll 1. \quad (11')$$

Кроме того, малость Φ_{2xz} и Φ_{2z} в формулах (54) уже не обеспечивается условиями (10) и (11). Эта малость должна обеспечиваться за счет ограничений на ρ_1 , ρ_2 и z . Так, при условии $(\rho_1^2 + \rho_2^2) / r_\perp^2 \leq 1$ имеем

$$|\Phi_{2z}| \leq \frac{kr_\perp^2}{2z_a} \left(\frac{z}{z_a} \right)^2 \leq |O_{1,3}| \left(\frac{z}{z_a} \right) \ll 1,$$

Таблица 1. Значения $O_{1,3}$ для различных λ_e

M	N	$\lambda_e = 3$ см, $2\theta_e = 4.5^\circ$	$\lambda_e = 10$ см, $2\theta_e = 7^\circ$	$\lambda_e = 30$ см, $2\theta_e = 7^\circ$
5	100	0.484	1.17	1.17
10	50	0.242	0.58	0.58
20	25	0.121	0.29	0.29

Таблица 2. Значения $O_{1,4}$ для различных λ_e

M	N	$\lambda_e = 3$ см, $2\theta_e = 4.5^\circ$	$\lambda_e = 10$ см, $2\theta_e = 7^\circ$	$\lambda_e = 30$ см, $2\theta_e = 7^\circ$
5	100	0.014	0.099	0.099
5	50	0	0.016	0.016
5	25	-0.0036	-0.004	-0.004
10	100	0	0.03	0.03
10	50	-0.0071	-0.009	-0.009
10	25	-0.0089	-0.0195	-0.0195
20	100	-0.014	-0.018	-0.018
20	50	-0.017	-0.039	-0.039
20	25	-0.0187	-0.044	-0.044

и малость при $|O_{1,3} \geq 1|$ может быть обеспечена за счет $z/z_a \gg 1$.

Неравенство

$$|\Phi_{2xz}| \leq \frac{kr_{\perp}^2}{2z_a} \frac{z}{z_a} 2 \frac{|\rho_1 + \rho_2|}{r_{\perp}} \approx |O_{1,3}| 2 \frac{|\rho_1 + \rho_2|}{r_{\perp}} \ll 1$$

при $|O_{1,3} \geq 1|$ может быть обеспечено за счет $|\rho_1 + \rho_2| \ll r_{\perp}/2$, что при $|\rho_1|, |\rho_2| \sim r_{\perp}$ возможно только при $\rho_2 = -\rho_1 + \delta\rho$, если $|\delta\rho| \ll r_{\perp}/2$.

Малость O_3 и O_4 требует дополнительных условий, накладываемых на волновые числа k и K_a .

Приближенно O_3 можно записать, воспользовавшись связью (9) между $O_{1,3}$ и $O_{1,2}$ и аналогичными выражениями для $O_{2,3}$ и $O_{a,3}$, следующим образом:

$$O_3 \cong -\frac{z}{z_a}(O_{1,2} + O_{2,2} + O_{a,2}) + \frac{x}{z_a} \left(\frac{\rho_1}{z_a} O_{1,2} + \frac{\rho_2}{z_a} O_{2,2} \right) + o \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2z_a^2} \right),$$

где $o \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2z_a^2} \right)$ – члены, меньшие в $\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2z_a^2}$ раз по сравнению с явно выписанными. При этом согласно (53)–(54)

$$\begin{aligned} \frac{z}{z_a} O_2 &= \frac{z}{z_a}(O_{1,2} + O_{2,2} + O_{a,2}) = \frac{z}{z_a} \Phi_2(\bar{r}) \cong \\ &\cong a_z z \frac{r_{\perp}^2}{2z_a^2} + o \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2z_a^2} \right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{\rho_1}{z_a} O_{1,2} + \frac{\rho_2}{z_a} O_{2,2} \cong \frac{kr_{\perp}^2}{2z_a} \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{z_a} + o \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2z_a^2} \right).$$

В результате для $|O_3|$ можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} |O_3| &\leq \frac{kz}{2} \left| 2 + j \frac{K_a}{k} - \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2z_a^2} \frac{r_{\perp}^2}{z_a^2} + \frac{kr_{\perp}^4}{2z_a^3} \frac{|\rho_1 + \rho_2|}{r_{\perp}} + \dots \right| \approx \\ &\approx \pi \frac{r_{\perp}^2}{z_a^2} + |O_{1,4}| \frac{|\rho_1 + \rho_2|}{r_{\perp}} + \dots \ll \pi + |O_{1,4}| + \dots, \end{aligned}$$

если рассматривать K_a/k вблизи резонансных значений, при которых $|a_z \Delta z/2| \ll \pi$.

Оценка таким же образом $|O_4|$ приводит к еще меньшим величинам:

$$|O_4| \leq \pi \frac{r_{\perp}^2}{z_a^2} \frac{\Delta z}{z_a} + \pi \frac{1}{4k \Delta z} \frac{r_{\perp}^2}{z_a^2} + \frac{2.5r_{\perp}^2}{z_a^2} |\Phi_{2xz}| + \dots$$

5. Связь используемой модели рассеяния с методом перевала

Вычисление интегралов I_x и I_y с заменой пределов интегрирования на бесконечные в формулах (62) и (63) можно рассматривать как результат асимптотической оценки методом перевала ([13], с. 465) интегралов типа

$$I_{\alpha\beta}(\Omega) = \int_{\tilde{z}_{\alpha}}^{\tilde{z}_{\beta}} f(\tilde{z}) \exp\{\Omega q(\tilde{z})\} d\tilde{z}, \quad (87)$$

где $f(\tilde{z})$ и $q(\tilde{z})$ – аналитические функции комплексной переменной \tilde{z} (в используемом нами приближении Френеля это полиномы), а Ω – большой параметр задачи (у нас это b_{xx} и b_{yy} соответственно).

Если $\text{Re}[\Omega q(\tilde{z}_{\alpha,\beta}) - \Omega q(\tilde{z}_s)] < 0$, где \tilde{z}_s – седловая точка $q(\tilde{z})$, то основной вклад в значение интеграла (87) дает окрестность этой точки, так что ([13], с. 473)

$$I_{\alpha\beta}(\Omega) \approx I(\Omega) \approx \sqrt{-\frac{2\pi}{\Omega q''(\tilde{z}_s)}} f(\tilde{z}_s) \exp\{\Omega q(\tilde{z}_s)\}, \quad (88)$$

$\Omega \rightarrow \infty$.

Здесь \approx – знак асимптотического равенства при $\Omega \rightarrow \infty$, а

$$I(\Omega) = \int_P f(\tilde{z}) \exp\{\Omega q(\tilde{z})\} d\tilde{z}, \quad (89)$$

где P – контур, проходящий через \tilde{z}_s , концевые точки которого лежат на бесконечности.

Продemonстрируем это на примере интеграла I_y , представленного формулой (63). Конкретно в этом случае $f(\tilde{z}) \equiv 1$ (хотя можно было учесть и поправки, содержащие степени y/R_1 , y/R_2 , y/R_a), а

$$\Omega q(\tilde{z}) = b_{yy} \tilde{z}^2 + b_y \tilde{z},$$

$$\Omega \frac{dq}{dz} \Big|_{z=\tilde{z}_s} = 2b_{yy}\tilde{z}_s + b_y = 0 -$$

условие стационарности $q'(\tilde{z}_s) = 0$ в точке \tilde{z}_s . В этой точке, $\tilde{z}_s = -b_y/2b_{yy}$, нетрудно вычислить:

$$\Omega q(\tilde{z}_s) = -b_y^2/4b_{yy},$$

$$\Omega q''(\tilde{z}_s) = 2b_{yy}.$$

Если учесть, что $b_y = 0$, $f(\tilde{z}_s) = 1$ и $-2\pi/q''(\tilde{z}_s) = -\pi/b_{yy} = \pi/(2\alpha_{1e}^2 + \alpha_s^2)$, то подстановка этих значений в формулу (88) приводит к результату (69). Аналогичный результат получается и для интеграла I_x , определяемого выражением (62).

Если используется нулевой член разложения предэкспоненциального множителя $f(\tilde{z}) \approx 1$, то интегралы I_x и I_y в конечных пределах интегрирования выражаются через разность интегралов вероятности $\text{erf}(\tilde{z}_\beta) - \text{erf}(\tilde{z}_\alpha)$ (как в формуле (72)), асимптотика которых ([14], с. 122, формула 7.1.23) снова приводит к выражениям (68) и (69) для I_x и I_y . Такое совпадение вполне ожидаемо, поскольку интеграл вероятности является “каноническим” в методе перевала ([13], с. 458).

6. Заключение

Полученные результаты указывают на то, что радиоакустическое зондирование в энергетическом отношении эффективно при “малоугловом” обратном рассеянии в области значений внешних параметров, при которых происходит фокусировка рассеянного поля. Двумерная фокусировка возможна лишь при соосном расположении всех антенн, когда они находятся на одной прямой, являющейся общей осью диаграмм направленности их излучения, и отношении волновых чисел $K_a/k = 2$. При несоосном, но симметричном расположении $R_1 = R_2 \neq R_a$ антенн возможна одномерная фокусировка, если выполнено соотношение $K_a/k = 2R_a/R_1$. “Расфокусировка” в поперечном направлении при некоторых ограничениях на Δz и ρ является несущественной, о чем говорит малость мнимой части b_{xx} в формуле (68).

Приведенное выше соотношение $K_a/k = 2$ при двумерной фокусировке в некоторых исследованиях называют условием Брэгга, хотя оно не имеет непосредственного отношения к известным условиям Вульфа и Брэгга, связывающим волновые векторы плоских волн, рассеянных пе-

риодической структурой, с обратным вектором этой структуры. Для рассматриваемых сферических волн вообще отсутствует понятие “волнового вектора”. Они характеризуются лишь волновыми числами $K_a = \Omega_a/c_a$, $k = \omega/c$. Ход вычислений, приводящий к равенствам (40), (46), указывает на то, что они являются условиями, которыми определяется местоположение “вырожденной” седловой точки фазы, вклад которой в асимптотику осциллирующего интеграла является определяющим ([10], с. 431). При этом условие (41) нулевого значения вектора

$$\vec{a} = \left(\frac{d\Phi}{d\vec{r}} \right)_0 = k(\vec{m}_1 - \vec{n}_2) - K_a \vec{m}_a = 0$$

можно трактовать как связь между “локальными” волновыми векторами падающей волны $k\vec{m}_1$, рассеянной волны $k\vec{n}_2$ и “локальным” обратным вектором $-K_a \vec{m}_a$ звуковой решетки в “вырожденной” стационарной точке.

В заключение благодарим рецензента за полезные замечания, которые были учтены авторами в процессе доработки текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюховецкий А. С. Об учете сферичности волновых фазовых фронтов в теории рассеяния волн турбулентной атмосферой // Радиофизика и радиоастрономия. – 2014. – Т. 19, № 3. – С. 217–228.
2. Брюховецкий А. С. Рассеяние электромагнитных волн в искусственно создаваемых средах: дис. ... к. ф.-м. н. ИРЭ АН УССР, г. Харьков, 1970. – 149 с.
3. Брюховецкий А. С. Радиолокационное отражение от звукового импульса // Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т. 10, № 4. – С. 432–441.
4. М. А. Каллистратова, Кон А. И. Радиоакустическое зондирование атмосферы. – М.: Наука, 1985. – 197 с.
5. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А., Растягаев Д. С. Волновые катастрофы-фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн (обзор) // Радиотехника и электроника. – 2006. – Т. 51, № 10. – С. 1155–1192.
6. Брюховецкий А. С. Переход от ближней к дальней зоне в двухпозиционном рассеянии волн статистически неровной поверхностью // Радиофизика и радиоастрономия. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 244–256.
7. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548 с.
8. Крайцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
9. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.

10. Ипатов Е. Б., Палкин Е. А. Исследование сканирующих и многолучевых зеркальных антенн методами волновой теории катастроф // Радиотехника и электроника. – 1999. – Т. 44, № 4. – С. 431–441.
11. Кузьмичев В. Е. Законы и формулы физики. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1989. – 864 с.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
13. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 47 с.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

REFERENCES

1. BRYUKHOVETSKI, A. S., 2014. Account for sphericity of wave phase fronts in the theory of wave scattering by turbulent atmosphere. *Radio Physics and Radio Astronomy*. vol. 19, no 3, pp. 217–228 (in Russian).
2. BRYUKHOVETSKI, A. S., 1970. *Scattering of electromagnetic waves in the artificially created environments*. PhD thesis ed. O.Ya.Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of NASU, Kharkiv, Ukraine (in Russian).
3. BRYUKHOVETSKI, A. S., 2005. Radar reflection from acoustic pulse. *Radio Physics and Radio Astronomy*. vol. 10, no 4, pp. 432–441 (in Russian).
4. KALLISTRATOVA, M. A. and KON, A. I., 1985. *Radio-acoustic Sensing of the Atmosphere*. Moscow : Nauka Publ. (in Russian).
5. KRYUKOVSKI, A. S., LUKIN, D. S., PALKIN, E. A. and RASTYAGAEV, D. S., 2006. Wave catastrophes: types of focusing in diffraction and propagation of electromagnetic waves. *Radiotekhnika i Elektronika*. vol. 51, no. 10, pp. pp.1155–1192 (in Russian).
6. BRYUKHOVETSKI, A. S., 2013. Near-to-far zone transition in a two-point wave scattering by a statistically rough surface. *Radio Physics and Radio Astronomy*. vol. 18, no 3, pp. 244–256 (in Russian).
7. TATARSKI, V. I., 1967. *Wave Propagation in a Turbulent Atmosphere*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
8. KRAVTSOV, YU. A. and ORLOV, YU. I., 1980. *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
9. FEDORYUK, M. V., 1987. *Asymptotics: Integrals and Series*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
10. IPATOV, E. B. and PALKIN, E. A., 1999. Investigation of Scanning and Multibeam Reflector Antennas by the Methods of the Theory of Wave Catastrophes. *Radiotekhnika i Elektronika*. vol. 44, no. 4, pp. 431–441 (in Russian).
11. KUZ'MICHEV, V. E., 1989. *Laws and formulas of physics. Directory*. Kiev: Naukova Dumka Publ. (in Russian).
12. PRUDNIKOV, A. P., BRYCHKOV, YU. A. and MARICHEV, O. I., 1981. *Integrals and series*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).

13. FELSEN, L. B. and MARKUVITZ, N., 1978. *Radiation and Scattering of Waves*. Vol. 1. Moscow: Mir Publ. (in Russian).
14. ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., 1979. *Handbook of Special Functions*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).

A. S. Bryukhovetski and A. V. Vichkan'

O. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics,
National Academy of Sciences of Ukraine,
12, Akad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

ON PECULIARITIES OF RADIO WAVE SCATTERING BY A SOUND PULSE IN THE ATMOSPHERE

Purpose: Scattering of radio waves by a sound pulse in the atmosphere is investigated theoretically.

Design/methodology/approach: The asymptotic of the scattered field in the approximation of the Fresnel diffraction is analyzed using the quadratic expansion of the phase and Gaussian directional patterns of radiating systems.

Findings: It is shown that for small angles of backscattering the field is determined by the focusing effects.

Conclusions: Explanation of the focus by “degenerate” saddle points of the studied integrand phase is suggested.

Keywords: waves scattering, oscillating integral, stationary phase, “degenerate” saddle point

A. С. Брюховецький, О. В. Вічкань

Інститут радіофізики та електроніки
ім. О. Я. Усікова НАН України,
вул. Ак. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна

ЩОДО ОСОБЛИВОСТЕЙ РОЗСІЯННЯ РАДІОХВИЛЬ ЗВУКОВИМ ІМПУЛЬСОМ В АТМОСФЕРІ

Предмет і мета роботи: Теоретично досліджується розсіяння радіохвиль звуковим імпульсом в атмосфері.

Методи та методологія роботи: З використанням квадратичного розкладання фаз та гаусових діаграм спрямованості випромінюючих систем аналізується асимптотика розсіяного поля у наближенні дифракції Френеля.

Результати роботи: Показано, що для малих кутів зворотного розсіяння поле визначається ефектами фокусування.

Висновок: Пропонується пояснення фокусування наявністю “вироджених” сідлових точок фази досліджуваної підінтегральної функції.

Ключові слова: розсіяння хвиль, осцилюючий інтеграл, стаціонарна фаза, “вироджена” сідлова точка

Статья поступила в редакцию 23.11.2015