Радіофізика і радіоастрономія. 2018, Т. 23, № 1, с. 60–71

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ЯВИЩА В ПРИЛАДАХ, ЕЛЕМЕНТАХ І СИСТЕМАХ НАУКОВОГО ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

DOI: https://doi.org/10.15407/rpra23.01.060

УДК 537.862

PACS numbers: 42.65.Ky, 05.45.Xt, 47.20.Lz

В. А. БУЦ [1,2,3], Д. М. ВАВРИВ [2]

[1] Национальный научный центр “Харьковский физико-технический институт”, ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

[2] Радиоастрономический институт НАН Украины, ул. Мистецтв, 4, г. Харьков, 61002, Украина

[3] Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: vbuts@kipt.kharkov.ua, vavriv@rian.kharkov.ua

РОЛЬ НЕВЗАИМНОСТИ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Предмет и цель работы: *Исследуется динамика связанных линейных осцилляторов при наличии невзаимной связи между ними с целью определения возможности перекачки энергии низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных колебаний.*

Методы и методология: *Были использованы методы теории динамических систем, в частности, сингулярная теория возмущений, теория вторичных резонансов и метод усреднения. Были использованы также методы численного анализа. Вначале проведен анализ динамики системы двух одинаковых линейных высокочастотных осцилляторов. Эти осцилляторы связаны слабой невзаимной связью. Параметры коэффициентов связей модулировались внешним низкочастотным возмущением. Было показано, что при наличии невзаимной связи комплексные амплитуды высокочастотных осцилляторов могут быть параметрически усилены. Если связи были взаимными – такое усиление отсутствовало.*

Далее была изучена динамика большого числа высокочастотных линейных осцилляторов. Было показано, что при взаимной связи между осцилляторами их первоначальная энергия практически не менялась. При наличии невзаимности возникала возможность параметрического усиления амплитуд высокочастотных колебаний. Была рассмотрена также динамика двух связанных нелинейных осцилляторов. Была использована сингулярная теория возмущений и показано, что если коэффициенты связи взаимны, то существует интеграл, который не позволяет трансформировать энергию низкочастотных внешних возмущений в энергию высокочастотных осцилляторов. Наличие невзаимных связей разрушает этот интеграл, и канал преобразования энергии открывается. Анализ численных результатов полностью подтвердил полученные аналитические результаты. В заключение анализировались возможности использования обнаруженного канала. Потенциально он может быть использован в любом интервале частот. Реально, в настоящее время, он полезен в миллиметровом, субмиллиметровом и терагерцевом диапазонах.

Результаты: *Показано, что наличие невзаимной связи между высокочастотными колебательными степенями свободы открывает канал перекачки энергии от низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных колебаний.*

Ключевые слова: *осцилляторы, невзаимная связь, генерация колебаний, динамические системы*

1. Введение

Теория колебаний систем линейных связанных осцилляторов хорошо изучена. Она излагается как в многочисленных учебниках, так и во многих монографиях и пособиях (см., например, [1–3]). Анализ динамики системы связанных нелинейных осцилляторов может быть осуществлен в подавляющем большинстве случаев только численными методами. Для нас наиболее существенным результатом теории динамики систем связанных линейных осцилляторов является выделение в ней таких понятий, как парциальные частоты и нормальные частоты. При этом нормальные частоты играют ключевую роль при взаимодействии системы связанных осцилляторов с внешним окружением. Действительно, извест-

© В. А. Буц, Д. М. Ваврив, 2018

но (см., например, [2], главу 2 или [3], главу 8), что внешнее возмущение, частота которого совпадает с одной из нормальных частот системы связанных осцилляторов, может резонансно возбудить колебания этой системы. Воздействие внешнего возмущения на других частотах мало влияет на динамику системы осцилляторов. Отметим, что такую систему осцилляторов можно также возбудить параметрически, если частота изменения параметров будет в кратное число раза больше частоты одного из нормальных колебаний системы [2, 3].

В отличие от этих известных результатов в настоящей работе показано, что если связи между осцилляторами обладают свойствами невзаимности, то некоторые внешние возмущения на других частотах могут резонансно возбудить систему осцилляторов. При этом существенно, что можно резонансно возбуждать систему высокочастотных осцилляторов внешним низкочастотным (параметрическим) возмущением.

Чтобы понять основной результат работы, полезно рассмотреть следующий простой пример. Пусть у нас имеется два одинаковых невзаимодействующих линейных осциллятора. Чтобы эффективно возбудить каждый из них, мы должны использовать внешнее возмущение на частоте этих осцилляторов. Осцилляторы можно также возбудить, меняя их параметры (у электрических осцилляторов, например, можно менять либо их емкости, либо их индуктивности). Для наиболее эффективного возбуждения частота изменения параметров при этом должна равняться удвоенной частоте осцилляторов (первая зона параметрического возбуждения). Пусть теперь осцилляторы связаны слабой связью. Колебательная система, состоящая из этих двух связанных осцилляторов, обладает двумя нормальными частотами. Известно, что при слабой связи одна нормальная частота слегка больше парциальной частоты отдельных осцилляторов, вторая – слегка меньше, т. е. при наличии связи происходит расщепление частоты [2, 3]. Для эффективного (резонансного) возбуждения этой колебательной системы необходимо использовать внешнее возмущение, частота которого должна равняться одной из нормальных частот. Обратим внимание, что при слабой связи эти частоты мало отличаются от парциальных частот отдельных осцилляторов. Это хорошо известные результаты. Известен также результат, который заключается в том, что если в начальный момент времени в системе одинаковых связанных осцилляторов один осциллятор покоится, а второй колеблется с некоторой амплитудой, то по истечении некоторого времени энергия колебаний второго осциллятора переходит в энергию колебаний первого осциллятора. В итоге второй осциллятор оказывается в покое, а первый колеблется. Процесс перекачки энергии является периодическим. Это также широко известный результат. Отметим, что время перекачки энергии между осцилляторами оказывается обратно пропорциональным величине связи между осцилляторами. При малой связи это время достаточно большое. Таким образом, колебательная система, состоящая из двух слабосвязанных осцилляторов, приобрела новую динамику – низкочастотную динамику. Можно ожидать, что этой низкочастотной динамикой можно воспользоваться для возбуждения колебаний этой системы осцилляторов, используя низкочастотное возмущение. В этом случае открывается заманчивая возможность использовать внешнее низкочастотное возмущение для возбуждения высокочастотных осцилляторов. При этом открывается новый канал взаимодействия высокочастотных и низкочастотных колебаний. Во всяком случае, авторы не знают работ, в которых указывалось бы на существование такого канала.

Цель настоящей работы – показать, что такая возможность резонансного возбуждения высокочастотных колебаний энергией низкочастотных колебаний действительно имеет место. Однако для ее реализации, как будет видно ниже, необходимо, чтобы связь между осцилляторами была невзаимной. Именно доказательству этого факта и посвящена эта работа. Отметим, что в приведенном выше простом примере эффективная низкочастотная динамика возникает только в том случае, когда между осцилляторами реализуется эффективное резонансное взаимодействие. Это означает, что их характеристики (прежде всего частоты) должны быть как можно ближе друг к другу. Такое резонансное взаимодействие, порождающее низкочастотную динамику осцилляторов, мы будем называть первичным резонансным взаимодействием (первичным резонансом). Когда низкочастотная динамика связанных высокочастотных осцилляторов используется для резонансного возбуждения системы связанных высокочастотных осцилляторов путем воздействия на эту систему внешнего низкочастотного возмущения, такое резонансное воздействие будем называть вторичными резонансами. Отметим, что теория вторичных резонансов достаточно детально изучена в теории гамильтоновых систем (см., например, [4]). Ниже мы будем пользоваться идеями сингулярной теории возмущений [4], в которой резонансы, возникающие на фоне первичных резонансов, называются вторичными резонансами. Однако в этой теории показано, что эффективность вторичных резонансов мала. Действительно, если величина возмущения мала $(\varepsilon \ll 1)$, то эффекты, связанные с вторичными резонансами, малы (например, ширина вторичных нелинейных резонансов) и пропорциональны $1/\left((1/\varepsilon)!\right)$. Как будет видно ниже, механизм вторичного резонанса при наличии невзаимности достаточно эффективен для практического использования. В нем малые возмущения (связи осцилляторов) только порождают низкочастотную динамику и мало влияют на эффективность резонансного возбуждения системы осцилляторов.

2. Система двух связанных линейных осцилляторов

Рассмотрим для простоты систему из двух линейных связанных осцилляторов. Запишем гамильтониан такой системы:

$$H = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\dot{x}_i^2}{2} + \frac{\omega_i^2}{2}x_i^2\right] + \mu(t)x_1x_2. \qquad (1)$$

Будем считать, что частоты этих осцилляторов совпадают $(\omega_1 = \omega_2 = 1)$. Тогда система уравнений, которая описывает динамику такой связанной системы, приобретет вид:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \mu(t)x_2,$$
$$\ddot{x}_2 + x_2 = \mu(t)x_1.$$

Традиционный путь анализа динамики этой системы заключается в нахождении нормальных колебаний этой системы. В данном случае уравнения для нормальных мод можно записать в виде:

$$\begin{aligned}&\ddot{u}_1 + (1-\mu)u_1 = 0,\\ &\ddot{u}_2 + (1+\mu)u_2 = 0.\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $u_1 = x_1 + x_2$, $u_2 = x_1 - x_2$.

Видно, что колебания нормальных мод стали независимыми. Таким образом, в рассматриваемом случае колебания системы двух связанных линейных осцилляторов характеризуются двумя частотами, т. е. произошло расщепление парциальной частоты исходных осцилляторов:

$$\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu = \text{const}, \qquad \omega^2 \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases}1-\mu,\\ 1+\mu.\end{cases}$$

Хорошо известно, что если мы хотим эффективно (резонансно) возбудить рассматриваемую систему внешней силой, то частота этой внешней силы должна быть близкой к одной из нормальных частот. При параметрическом возбуждении необходимо менять параметры системы с частотой, которая близка к удвоенной частоте одной из нормальных мод (первая параметрическая зона возбуждения). Если связи слабые $(\mu_k \ll 1)$, то во всех этих случаях резонансное возбуждение возможно только при использовании сил, частоты которых близки к парциальным частотам.

Пусть теперь у нас имеется такая же система, состоящая из двух связанных линейных осцилляторов. Однако будем теперь считать, что связи между осцилляторами в рассматриваемой системе могут быть невзаимными и малыми $(\mu_1 \neq \mu_2,\ \mu_i \ll 1)$. Систему уравнений, которая описывает динамику таких осцилляторов, можно представить в виде:

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_1 + x_1 = \mu_1(t)x_2,\\ &\ddot{x}_2 + x_2 = \mu_2(t)x_1.\end{aligned} \qquad (3)$$

Так как связи малые, то анализ системы (3) удобно проводить с помощью метода усреднения (смотри, например, [5]):

$$x_k = a_k \exp(it) + b_k \exp(-it),$$
$$\dot{x}_k = i\left[a_k \exp(it) - b_k \exp(-it)\right].$$

Здесь a_k, b_k – новые зависимые переменные.

В этом случае получим следующую систему уравнений, которая описывает динамику амплитуд осцилляторов:

$$\dot{a}_1 = -i\mu_1 a_2, \quad \dot{a}_2 = -i\mu_2 a_1;$$
$$\dot{b}_1 = -i\mu_1 b_2, \quad \dot{b}_2 = -i\mu_2 b_1. \tag{4}$$

Пусть, например, $\mu_1 = \text{const}$, а $\mu_2 = \mu_2(t)$, тогда из системы (4) можно найти уравнения, описывающие динамику амплитуд взаимодействующих осцилляторов:

$$\ddot{a}_1 + \mu_1\mu_2(t)a_1 = 0,$$
$$\ddot{b}_1 + \mu_1\mu_2(t)b_1 = 0. \tag{5}$$

Системы уравнений (4) и (5) содержат в явном виде некоторые особенности динамики двух связанных линейных осцилляторов, которые не видны при использовании нормальных мод. Первая особенность заключается в том, что в явном виде (при $\mu_2 = \text{const}$) видна динамика обмена энергией между осцилляторами. Так, если один из осцилляторов в начальный момент времени был возбужден, а второй находился в покое, то по истечении времени $T = 2\pi/\sqrt{\mu_1\mu_2}$ первый осциллятор окажется покоящимся, а второй – колеблющимся. Отметим, что если знать об этой особенности, то ее можно обнаружить при анализе решений для нормальных мод (анализируя решения системы уравнений (2)). Вторая особенность связана с невзаимностью $(\mu_1 \neq \mu_2)$. Прежде всего, отметим, что для осцилляторов, которые связаны невзаимной связью, нельзя написать гамильтониан в виде (1). Действительно, в гамильтониане (1) член, который описывает взаимодействие, содержит только один коэффициент связи $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$, т. е. связи могут быть только взаимны. Кроме того, наличие невзаимности приводит к тому, что, как следует из уравнений (5), в такой системе возможно параметрическое возбуждение осцилляторов, $\mu_2 = \mu\left[1 + m\cos\left(\sqrt{\mu\mu_1}t\right)\right]$. Причем, что является наиболее важным, при слабой связи $(\mu_k \ll 1)$ частота внешнего параметрического возбуждения может быть значительно ниже парциальной частоты связанных осцилляторов. Таким образом, видно, что наличие невзаимной связи между линейными осцилляторами открывает новые возможности для возбуждения высокочастотных колебаний (парциальных частот) осцилляторов внешними низкочастотными колебаниями. Следует, однако, заметить, что одной невзаимности недостаточно для параметрического возбуждения осцилляторов. Действительно, как видно из (4), если отношение коэффициентов связи между осцилляторами будет постоянной величиной $(\mu_1/\mu_2 = C)$, то система (4) обладает следующими интегралами:

$$a_1^2 - Ca_2^2 = \text{const},$$
$$b_1^2 - Cb_2^2 = \text{const}.$$

При таком соотношении между коэффициентами связи система (4) не имеет нарастающих решений. Таким образом, для возбуждения высокочастотных колебаний полями низкочастотных колебаний необходимо не только чтобы связь была невзаимной, но и чтобы отношение коэффициентов связи не равнялось константе $(\mu_1/\mu_2 \neq C)$.

Возникает вопрос: при каких условиях внешние низкочастотные возмущения могут передавать свою энергию ансамблю взаимодействующих осцилляторов?

Выше мы видели, что для системы из двух линейных осцилляторов такая передача возможна, если внешнее низкочастотное возмущение модулирует параметры коэффициентов связи, а связи – невзаимные. Возникает новый вопрос: является ли невзаимность коэффициентов связи обязательным условием для параметрического усиления высокочастотных сигналов? Возможно, что рассмотренная особенность является особенностью только двух связанных осцилляторов. Не изменится ли результат, если мы будем рассматривать большое количество связанных осцилляторов? Кроме того, не изменит ли результат наличие нелинейностей у осцилляторов? Ниже мы покажем, что ни большое число связанных линейных осцилляторов, ни нелинейности не меняют полученного результата. Во всех случаях для эффективной передачи энергии от низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных колебаний требуется наличие невзаимной связи между осцилляторами.

3. Система большого числа связанных линейных осцилляторов

Рассмотрим теперь систему, состоящую из N связанных линейных осцилляторов. Параметры каждого из этих осцилляторов (частота, коэффициент затухания), а также коэффициенты связи между осцилляторами в общем случае зависят от времени. Такая динамическая система описывается следующей системой уравнений:

$$\ddot{x}_k + \nu_k(t)\dot{x}_k + \omega_k^2(t)x_k = \sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}(t)x_j. \qquad (6)$$

Нас будет интересовать простейшая система, состоящая из одинаковых осцилляторов. В этом случае все невозмущенные частоты мы выбираем равными друг другу $(\omega_k = \omega)$. Кроме того, будем считать, что потери всех осцилляторов одинаковы и не зависят от времени $(\nu_k(t) = \nu)$. При этом систему (6) можно переписать в виде:

$$\ddot{z}_k + \omega^2 z_k = \sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}(t)z_j,$$

где $z_k = x_k \exp(\nu t/2)$, $\omega^2 = \omega_k^2(t) - \nu^2/4$.

Далее нам будут интересны системы осцилляторов, у которых коэффициенты связей малы. Если бы они отсутствовали полностью, то мы имели бы систему независимых осцилляторов, каждый из которых колебался бы с частотой ω. Наличие малых связей приводит к изменению динамики каждого из осцилляторов. Чтобы описать это изменение, решение системы (6) будем искать, используя метод усреднения:

$$z_k = A_k(t)\exp(i\omega t) + B_k(t)\exp(-i\omega t),$$

$$\dot{z}_k = i\omega\left[A_k(t)\exp(i\omega t) - B_k(t)\exp(-i\omega t)\right].$$

Здесь A_k, B_k – новые переменные, которые медленно меняются ($\ddot{A}_k \ll \omega\dot{A}_k$). Систему уравнений для отыскания новых переменных можно представить в виде:

$$\dot{A}_k = -\frac{i}{\omega}\sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}A_j,$$
$$\dot{B}_k = \frac{i}{\omega}\sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}B_j. \qquad (7)$$

Удобно также ввести комплексно-сопряженные уравнения:

$$\dot{A}_k^* = \frac{i}{\omega}\sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}A_j^*,$$
$$\dot{B}_k^* = -\frac{i}{\omega}\sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}B_j^*. \qquad (8)$$

Используя (7) и (8), получаем следующие соотношения:

$$\dot{B}_k B_k^* + B_k\dot{B}_k^* = \frac{i}{\omega}\sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}\left(B_j B_k^* - B_k B_j^*\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=0}^{N}|B_k|^2\right) = \frac{2i}{\omega}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}\,\mathrm{Im}\left(B_j B_k^*\right), \quad k \ne j. \qquad (9)$$

Легко видеть, что выполняется такое равенство:

$$\mathrm{Im}\left(B_j B_k^*\right) = -\mathrm{Im}\left(B_k B_j^*\right).$$

Используя это равенство, правую часть системы (9) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\mu_{kj}\,\mathrm{Im}\left(B_j B_k^*\right) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\mu_{kj} - \mu_{jk}\right)\mathrm{Im}\left(B_j B_k^*\right). \qquad (10)$$

Если связи взаимные $(\mu_{jk} = \mu_{kj})$, то правая часть (10) обращается в ноль. В этом случае мы имеем интеграл

$$\sum_{k=0}^{N}|B_k|^2 = \mathrm{const}. \qquad (11)$$

Аналогично из (7) и (8) мы получим интеграл, связывающий переменные A_k:

$$\sum_{k=0}^{N}|A_k|^2 = \mathrm{const}. \qquad (12)$$

Наличие интегралов (11) и (12) указывает на тот факт, что первоначальная энергия, которая была запасена в системе линейных осцилляторов, меняться не может. Это, в свою очередь, означает, что никакие изменения параметров рассматриваемой системы во времени не могут приводить к увеличению энергии этих осцилляторов. Таким образом, только при наличии невзаимных связей можно рассчитывать на параметрическое усиление внешними низкочастотными возмущениями высокочастотных колебаний связанных линейных осцилляторов.

4. Система, состоящая из двух нелинейных связанных осцилляторов

Можно предположить, что наличие нелинейностей у взаимодействующих осцилляторов может сыграть роль, аналогичную роли невзаимной связи между осцилляторами. Ниже мы покажем, что в задаче возбуждения высокочастотных осцилляторов внешним низкочастотным возмущением наличие нелинейностей у этих связанных осцилляторов не отменяет необходимости в наличии невзаимной связи между ними.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим наиболее простую систему, которая представляет собой систему двух связанных нелинейных маятников. Вначале предположим, что связи между этими маятниками взаимны. Динамика такой системы может быть описана следующим гамильтонианом:

$$H = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{2}G_i p_i^2 + \frac{1}{2}\Pi_i \cos q_i\right] + \mu(t) q_1 q_2. \qquad (13)$$

Здесь p_i и q_i – обобщенные координаты; первый член в квадратных скобках $(\sim G_i)$ описывает кинетическую энергию, а второй $(\sim \Pi_i)$ – потенциальную энергию; последнее слагаемое определяет связь между осцилляторами.

Если мы будем в этом гамильтониане переходить к новым каноническим переменным, то старые и новые зависимые переменные будут связаны эллиптическими интегралами. Выразить в явном виде эти зависимости (старые переменные через новые переменные) не удается. По этой причине мы разложим функцию $\cos q$ в ряд Тейлора и оставим первые неисчезающие нелинейные члены:

$$H = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{2}G_i p_i^{2} + \frac{1}{2}F_i q_i^{2} - \frac{1}{24}F_i q_i^{4} + \frac{1}{6!}F_i q_i^{6} - \ldots\right] +$$
$$+\mu(t) q_1 q_2. \qquad (14)$$

Здесь $F_i = -\frac{1}{2}\Pi_i$.

В формуле (14) учтено, что гамильтониан является суммой кинетической и потенциальной энергии. Последняя может быть определена с точностью до произвольной постоянной величины. Обозначения новых констант было выбрано таким образом, чтобы была прозрачной преемственность с обозначениями, принятыми в монографии [4].

Гамильтониан (14) описывает связь двух нелинейных маятников со слабой нелинейностью. Ниже мы ограничимся только первым нелинейным членом в формуле (14). Перейдем в (14) к новым каноническим переменным. Для этого воспользуемся следующей производящей функцией:

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\omega_{0i} q_i^2 \operatorname{ctg}\theta_i, \qquad (15)$$

где $\omega_{0i} = \sqrt{F_i / G_i}$.

Производящая функция (15) позволяет преобразовать гамильтониан линейного осциллятора в гамильтониан, который зависит только от одной переменной – от действия. Старые (q_i, p_i) и новые (J_i, θ_i) канонические переменные при использовании такой производящей функции будут иметь следующий вид:

$$p_i = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} = \omega_{0i} q_i \operatorname{ctg}\theta_i, \qquad J_i = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta_i} = \frac{\omega_{0i} q_i^2}{2\sin^2\theta_i},$$

$$q_i = \sqrt{\frac{2J_i}{\omega_{0i}}}\cdot \sin\theta_i, \qquad p_i = \sqrt{2J_i\omega_{0i}}\cdot\cos\theta_i.$$

Гамильтониан (14) в новых переменных приобретает вид:

$$H_N = \sum_{i=1}^{2}\left[\sqrt{F_i G_i}\cdot J_i - \frac{G_i}{4!}J_i^2\left(1+\cos\left(4\theta_i\right)\right)\right] +$$
$$+\mu(t)\sqrt{\frac{J_1 J_2}{\omega_{01}\omega_{02}}}\cdot \sin\theta_1 \sin\theta_2. \qquad (16)$$

Здесь учтен только первый (главный) нелинейный член. Видно, что если пренебречь нелинейным членом, то первое слагаемое будет представлять собой гамильтониан двух линейных несвязанных осцилляторов. Последнее слагаемое в (16) описывает связь между осцилляторами.

Таким образом, в такой простой форме удается учесть влияние нелинейных членов в гамильтониане. Гамильтониан (16) можно представить в виде двух слагаемых:

$$H_N = H_{0N}(\vec{J}) + H_1(\vec{J},\vec{\theta}). \tag{17}$$

Первое слагаемое зависит только от переменных действия. Второе – от переменных угла и действия. Второе слагаемое будем считать малым возмущением. Если этим слагаемым пренебречь, то уравнения, соответствующие гамильтониану (17) полностью решаются (интегрируются). При этом можно ввести следующие частоты, которые зависят от переменных действия:

$$\omega_i = \frac{1}{G_i}\frac{\partial H_{0N}}{\partial J_i} = \frac{1}{G_i}\left[\sqrt{F_i G_i} - \frac{2G_i J_i}{4!}\right],$$

$$\omega_i = \omega_{0i} - J_i/12.$$

Для упрощения записи ниже мы будем считать, что $G_i = 1$.

Обратим внимание, что динамика системы, которая описывается гамильтонианом (16) или (17), содержит в явном виде только быструю динамику. Если частоты осцилляторов близки друг к другу $(\omega_2 \approx \omega_1)$, то, кроме быстрой динамики, появляется медленная динамика, описывающая обмен энергией между осцилляторами. Для выделения этой медленной динамики можно использовать повторное каноническое преобразование зависимых переменных. Целью такой замены является выделение быстрых и медленных движений. При таком выделении появляется возможность отдельно изучить динамику медленных движений. Для преобразования к новым каноническим переменным $(\vec{\theta},\vec{J}) \to (\vec{\Psi},\vec{I})$ можно использовать следующую производящую функцию:

$$\Phi_2 = (\theta_1 - \theta_2)I_1 + \theta_2 I_2.$$

Старые и новые канонические переменные при этом будут определяться следующим образом:

$$J_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_1} = I_1, \qquad J_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_2} = I_2 - I_1,$$

$$\Psi_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_1} = \theta_1 - \theta_2, \qquad \Psi_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_2} = \theta_2.$$

Как видно из этих выражений, новая угловая переменная Ψ_1 является медленной переменной, а угловая переменная Ψ_2 остается быстрой переменной. Новые переменные действия, так же как и старые переменные действия, являются медленными переменными (адиабатические инварианты). Подставляя выражения для старых переменных в гамильтониан (16), получим следующее выражение для нового гамильтониана:

$$H_{N2} = H_{02}(\vec{I}) + H_2(\vec{I},\vec{\Psi}).$$

Здесь

$$H_{02}(\vec{I}) =$$

$$= \left[\omega_{01}I_1 - I_1^2/4!\right] + \left[\omega_{02}(I_2 - I_1) - (I_2 - I_1)^2/4!\right],$$

$$H_2 = -\frac{1}{4!}\left[I_1^2\cos\left(4(\Psi_1 + \Psi_2)\right) + (I_2 - I_1)^2\cos\left(4\Psi_2\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\mu\sqrt{\frac{I_1(I_2 - I_1)}{\omega_{01}\omega_{02}}}\left[\cos\Psi_1 - \cos(\Psi_1 + 2\Psi_2)\right],$$

$$\langle H_{N2}\rangle = H_{02}(\vec{I}) + \frac{1}{2}\mu\sqrt{\frac{I_1(I_2 - I_1)}{\omega_{01}\omega_{02}}}\cdot\cos\Psi_1. \tag{18}$$

Обратим внимание, что гамильтониан (18) не зависит от Ψ_2. В этом случае действие I_2 оказывается постоянной величиной $(I_2 = J_1 + J_2 = \mathrm{const})$. Разложим невозмущенную часть гамильтониана в ряд в окрестности резонансного значения нового действия:

$$I_1 = I_{1R},$$

$$\omega_2 = \frac{\partial H_{02}}{\partial I_2} \approx \omega_1 = \frac{\partial H_{02}}{\partial I_1},$$

$$\omega_{01} - J_1/12 = \omega_{02} - J_2/12,$$

$$H_{02}(\vec{I}) = H_{02}(\vec{I}_R) + \left[\frac{\partial H_{02}}{\partial J_1}\Delta J_1 + \frac{\partial H_{02}}{\partial J_2}\Delta J_2\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H_{02}}{\partial J_1^2}(\Delta J_1)^2 + \frac{\partial^2 H_{02}}{\partial J_2^2}(\Delta J_2)^2\right]. \tag{19}$$

При получении (19) мы учли, что $\Delta J_1 = \Delta I_1$, $\Delta J_2 = -\Delta I_1 + \Delta I_2$, $\Delta I_2 = 0$, т. к. $I_2 = \mathrm{const}$.

Первое слагаемое в (19) представляет собой постоянную величину. Второе слагаемое, в первых квадратных скобках, обращается в ноль. Для определения третьего слагаемого заметим, что вторые производные в нашем случае равны постоянной величине:

$$\frac{\partial^2 H_{02}}{\partial I_1{}^2} = \frac{\partial^2 H_{02}}{\partial J_1{}^2} = -\frac{1}{6}.$$

Используя все эти определения, окончательно можно получить следующее выражение для гамильтониана, который описывает медленную динамику связанных нелинейных осцилляторов:

$$\langle H_{N2} \rangle = \frac{1}{2}\left(\Delta J_1\right)^2 - 3\mu(t)\sqrt{\frac{J_1 J_2}{\omega_{01}\omega_{02}}}\cdot \cos\Psi_1. \qquad (20)$$

Гамильтониан (20) представляет собой универсальный гамильтониан математического маятника. При малых значениях медленной фазы Ψ_1 он описывает динамику линейного осциллятора, частота которого зависит от времени и от “амплитуд” колебаний J_1, J_2. Эти амплитуды представляют собой адиабатические инварианты и меняются медленно. Поэтому для определения возможности параметрического возбуждения осцилляторов в этом линейном приближении частоту можно считать меняющейся со временем только благодаря временной зависимости параметра связи между осцилляторами $\mu(t)$. Если эта зависимость имеет вид $\mu(t) = \mu_0\left(1 + h\sin(\Omega t)\right)$, то гамильтониан (20) представляет собой гамильтониан линейного осциллятора, частота которого периодически меняется. Если частота этого изменения равна удвоенной частоте $\sqrt{3\mu_0\sqrt{J_1 J_2/(\omega_{01}\omega_{02})}}$, то линейная часть гамильтониана (20) соответствует уравнению Матье. В этом случае можно рассчитывать на экспоненциальное нарастание действия J_1. Однако это нарастание будет незначительным и быстро выйдет на насыщение. Действительно, в нашем случае имеется следующий интеграл: $I_2 = (J_1 + J_2) = \text{const}$. Легко видеть, что этот интеграл пропорционален сумме квадратов смещений и импульсов исходных нелинейных осцилляторов:

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{2}\Big[\left(q_1^2 + p_1^2\right)\left(\omega_{01} + 1/\omega_{01}\right) + \left(q_2^2 + p_2^2\right)\left(\omega_{02} + 1/\omega_{02}\right)\Big] = \text{const}. \qquad (21)$$

Это означает, что такая сумма не будет меняться со временем. Отметим, что сумма (21) представляет собой положительно определенную форму. Поэтому рост отдельного члена этой формы означает уменьшение других членов. Для рассматриваемой системы связанных осцилляторов это означает, что возможна только перекачка энергии из одного нелинейного осциллятора в другой нелинейный осциллятор.

Таким образом, мы видим, что наличие интеграла (21) не позволяет изменить общую энергию связанных нелинейных осцилляторов. Этот результат мы получили для случая, когда связи между осцилляторами взаимны. Покажем, что при наличии невзаимной связи интеграл исчезает. При этом появляется возможность параметрического усиления колебаний связанных осцилляторов.

5. Необходимость невзаимности

Следует сказать, что записать общий гамильтониан двух связанных нелинейных осцилляторов с невзаимной связью не представляется возможным. Поэтому поступим таким образом: для каждого отдельного нелинейного осциллятора запишем свой гамильтониан. В каждом из этих гамильтонианов учтем связь между осцилляторами. При этом удастся показать, что если связи взаимные, мы получим интеграл $I_2 = J_1 + J_2 = \text{const}$, который не позволяет осуществить параметрическое возбуждение осцилляторов. Если же связи будут невзаимными, то такой интеграл исчезает. В результате открывается возможность параметрического усиления колебаний связанных осцилляторов.

Итак, запишем гамильтонианы двух нелинейных осцилляторов:

$$H_i = \frac{1}{2}p_i{}^2 + \frac{1}{2}F_i q_i{}^2 - \frac{1}{24}F_i q_i{}^4 + \mu_i(t) q_1 q_2, \qquad (22)$$

$$i = \{1, 2\}.$$

Здесь мы учли тот факт, что связи между осцилляторами могут быть невзаимными, т. е. $\mu_1 \neq \mu_2$. Если связи взаимные, то гамильтонианы (22) можно объединить в один гамильтониан (14). Преобразуем гамильтонианы (22) к новым каноническим переменным. Для этого воспользуемся производящей функцией (15). В новых переменных эти гамильтонианы приобретут вид:

$$H_1 = \left[\omega_{01} J_1 - \frac{J_1^2}{4!}\right] +$$

$$+\left[\frac{\mu_1}{2}\sqrt{\frac{J_1 J_2}{\omega_{01}\omega_{02}}}\sin\theta_1 \sin\theta_2 - \frac{J_1^2}{4!}\cos(4\theta_1)\right],$$

$$H_2 = \left[\omega_{02} J_2 - \frac{J_2^2}{4!}\right] +$$

$$+\left[\frac{\mu_2}{2}\sqrt{\frac{J_1 J_2}{\omega_{01}\omega_{02}}}\sin\theta_1 \sin\theta_2 - \frac{J_2^2}{4!}\cos(4\theta_2)\right].$$

Эти гамильтонианы порождают следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения динамики новых канонических переменных:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H_1}{\partial J_1} = \left[\omega_{01} - \frac{J_1}{12}\right] +$$

$$+\left[\frac{\mu_1}{2}\sqrt{\frac{J_2}{\omega_{01}\omega_{02} J_1}}\sin\theta_1 \sin\theta_2 - \frac{J_1}{12}\cos(4\theta_1)\right],$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H_2}{\partial J_2} = \left[\omega_{02} - \frac{J_2}{12}\right] +$$

$$+\left[\frac{\mu_2}{2}\sqrt{\frac{J_1}{\omega_{01}\omega_{02} J_2}}\sin\theta_1 \sin\theta_2 - \frac{J_2}{12}\cos(4\theta_2)\right],$$

(23)

$$\dot{J}_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial \theta_1} =$$

$$= -\left[\mu_1 \sqrt{\frac{J_1 J_2}{\omega_{01}\omega_{02}}}\cos\theta_1 \sin\theta_2 - \frac{J_1^2}{24}\cos(4\theta_1)\right],$$

$$\dot{J}_2 = -\frac{\partial H_2}{\partial \theta_2} =$$

$$= -\left[\mu_2 \sqrt{\frac{J_1 J_2}{\omega_{01}\omega_{02}}}\cos\theta_2 \sin\theta_1 - \frac{J_2^2}{24}\cos(4\theta_2)\right].$$

Обратим внимание, что переменные θ_1, θ_2 являются быстрыми переменными. Собственные парциальные частоты осцилляторов слегка изменились. Эти изменения обусловлены наличием нелинейности и связи между осцилляторами. Из системы (23) легко найти уравнение для функции, которая представляет собой сумму новых канонических импульсов:

$$\dot{J}_1 + \dot{J}_2 = -\sqrt{\frac{J_1 J_2}{\omega_{01}\omega_{02}}}(\mu_1 - \mu_2)\sin(\theta_2 - \theta_1). \qquad (24)$$

В этом выражении в правой части мы оставили только медленно меняющиеся слагаемые.

Из (24) сразу следует, что как только связи взаимны $(\mu_1 = \mu_2)$, то сумма $(J_1 + J_2)$ оказывается интегралом. Этот результат соответствует полученному выше результату. В этом случае, как было указано выше, создать условия для реализации параметрического возбуждения нельзя. Однако как только связь становится невзаимной, такое возбуждение оказывается возможным.

6. Численные результаты

Сформулированные выше результаты были проверены численными исследованиями. Ниже рассмотрим наиболее характерные примеры.

6.1. Динамика системы, состоящей из двух связанных линейных осцилляторов

Систему уравнений, которая описывает динамику двух связанных линейных осцилляторов, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + x_1 = \mu_1(t) x_2, \\ &\ddot{x}_2 + x_2 = \mu_2(t) x_1, \end{aligned} \qquad (25)$$

где $\mu_i(t) = \alpha_i + \beta_i \cos(\gamma t)$.

Меняя в этой системе уравнений параметры α_i, β_i, можно изучать динамику колебательной системы со взаимной и с невзаимной связью. Будем считать, что параметр γ равен $\gamma = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$. Это значение параметра соответствует удвоенной частоте перекачки энергии в системе связанных осцилляторов, когда зависимая от времени компонента связи равна нулю $(\beta_i = 0)$. Динамика колебательной системы с параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.2$, $\gamma = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0.1$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ при взаимной связи между осцилляторами представлена на рис. 1. Видно, что происходит взаимодействие между осцилляторами. Однако полная энергия осцилляторов не меняется.

Рассмотрим теперь случай невзаимной связи. Для этого достаточно положить $\beta_1 = 0$. Динамика качественно меняется. Она представлена на рис. 2. Из этого рисунка видно, что происходит не только взаимодействие между осцилляторами и обмен энергией между ними, но и амплитуда каждого из осцилляторов экспоненциально нарастает.

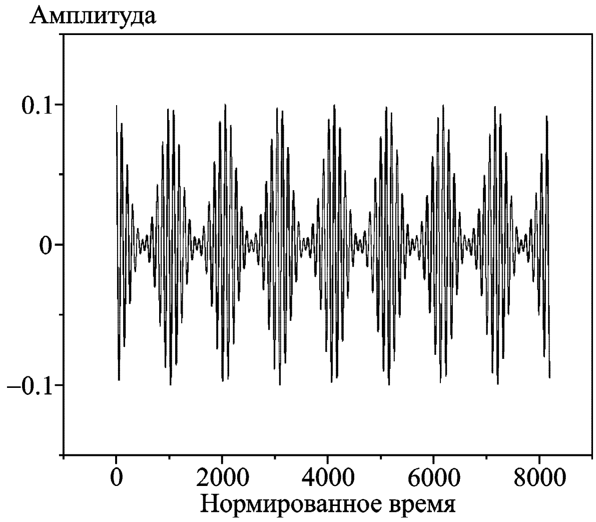

Рис. 1. Характерная динамика амплитуд высокочастотных колебаний при взаимной связи между колебательными системами ($\beta_1 = \beta_2 = 0.2$)

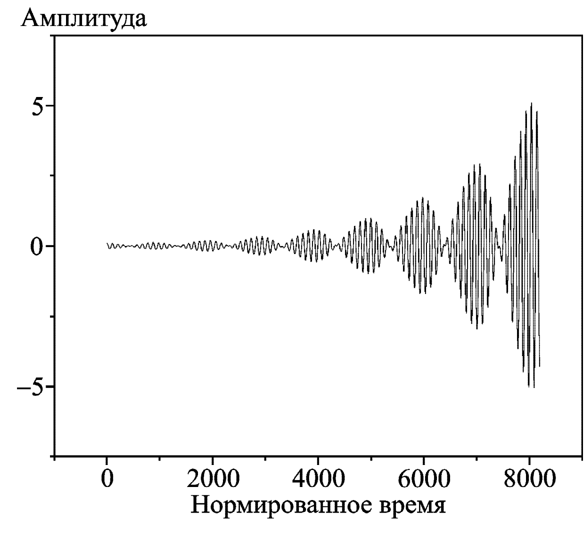

Рис. 2. Характерная динамика амплитуд высокочастотных колебаний при невзаимной связи между колебательными системами ($\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0.2$)

6.2. Динамика системы, состоящей из двух связанных маятников

Выше, при аналитическом рассмотрении, было показано, что наличие нелинейности качественно не меняет картину взаимодействия между осцилляторами. В численных исследованиях этот факт был подтвержден. Ниже приведены полученные авторами характерные результаты, показывающие роль невзаимности при взаимодействии двух нелинейных осцилляторов. В качестве осцилляторов были выбраны наиболее распространенные и хорошо изученные модели – модели математических маятников:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \sin x_1 = \mu_1(t) x_1, \\ &\ddot{x}_2 + \sin x_2 = \mu_2(t) x_1. \end{aligned} \qquad (26)$$

Здесь выражения для коэффициентов связи те же, что и в формуле (25). Ясно, что если амплитуды колебаний малы, то система уравнений (26) не отличается от системы уравнений (25). Естественно, что и динамика будет идентичной описанной выше для системы линейных осцилляторов. При наличии невзаимности, как и для случая линейных осцилляторов, амплитуды растут. Однако наличие нелинейности приводит к стабилизации уровня колебаний. Это связано с тем, что у нелинейных осцилляторов (в данном случае у математических маятников) собственная частота колебаний зависит от амплитуды колебаний. Поэтому во всех случаях наличие нелинейности приводит к уходу собственных частот осцилляторов от резонансных значений. Результаты динамики двух связанных математических маятников представлены на рис. 3. Эти результаты получены при следующих значениях параметров: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0.1$, $\gamma = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0.1$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

7. Заключение

Таким образом, полученные в работе результаты показывают, что при наличии невзаимной связи между высокочастотными колебательными системами возникает новый канал эффективного обмена между высокочастотными и низкочастотными колебаниями.

Отметим, что в нашей предыдущей работе [6] было указано на существование такого канала. Однако ни свойства механизма связи колеба-

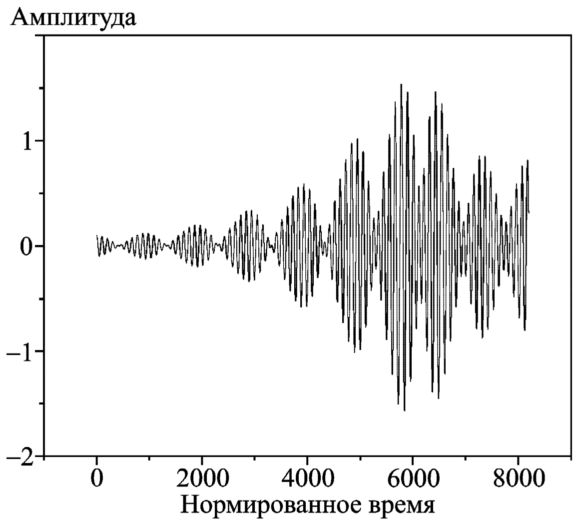

Рис. 3. Характерная динамика амплитуд высокочастотных нелинейных колебаний при невзаимной связи между колебательными системами (26) (между математическими маятниками)

ний, ни необходимые условия его существования не были выяснены. Более того, можно было предположить (и предполагалось), что учет нелинейностей уберет необходимость учета невзаимной связи. Действительно, известно, что в рамках сингулярной теории возмущений уравнение для медленной динамики изучаемых систем описывается универсальным гамильтонианом, который представляет собой гамильтониан математического маятника с медленно меняющимися параметрами. В этом случае при подходящих значениях параметров такого маятника это уравнение может соответствовать уравнению Матье. Поэтому интуитивно можно было предположить, что в общем случае для существования указанного канала связи высокочастотных и низкочастотных колебаний невзаимность связи необязательна. Однако, как мы видели выше, в отсутствие невзаимности существует интеграл (см. формулу (21)), который не позволяет существовать такому каналу взаимодействия. И только при наличии невзаимной связи этот интеграл перестает существовать и канал связи открывается.

Возникает вопрос о возможности использования такого канала. Причем наибольший интерес представляет возможность передачи энергии низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных колебаний. Демонстрационный эксперимент, в котором показано реальное существование такого канала был осуществлен в работе [6]. В этом эксперименте два высокочастотных контура были связаны с помощью невзаимных элементов. Частоты этих контуров практически совпадали и равнялись приблизительно 20 МГц. Один из элементов связи между контурами модулировался внешним сигналом на частоте 0.58 МГц, т. е. коэффициент преобразования частоты был более 30. Энергия этого низкочастотного сигнала эффективно возбуждала высокочастотные контуры. Теоретически и экспериментально было показано, что за возбуждение высокочастотных контуров ответственна параметрическая неустойчивость. Ясно, что указанный диапазон возбуждения колебаний (~ 20 МГц) не представляет особой ценности, так как имеется большое количество разнообразных источников возбуждения таких колебаний. Интересным является тот факт, что рассмотренный механизм преобразования энергии низкочастотных колебаний в энергию высокочастотных колебаний является универсальным. В принципе, он может быть использован в любом диапазоне длин волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика.* Москва: Наука, 1988. 215 с.
2. Магнус К. *Колебания.* Москва: Мир, 1982. 304 с.
3. Рабинович М. Н., Трубецков Д. И. *Введение в теорию колебаний и волн.* Москва: Наука, 1984. 432 с.
4. Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика.* Москва: Мир, 1984. 528 с.
5. Митропольский Ю. А. *Метод усреднения в нелинейной механике.* Киев: Наукова думка, 1971. 441с.
6. Buts V. A., Vavriv D. M., Nechayev O. G., and Tarasov D. V. A Simple Method for Generating Electromagnetic Oscillations. *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs.* 2015. Vol. 62, No. 1. P. 36–40. DOI: 10.1109/TCSII.2014.2362720

REFERENCES

1. LANDAU, L. D. and LIFSHITS, E. M., 1969. *Mechanics.* Oxford: Pergamon Press.
2. MAGNUS, K., 1965. *Vibrations.* London: Blackie and Son.
3. RABINOVICH, M. N. and TRUBETSKOV, D. I., 1984. *Introduction to the Theory of Oscillations and Waves.* Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
4. LICHTENBERG, A. J. and LIEBERMAN, M. A., 1983. *Regular and Stochastic Motion.* New York: Springer-Verlag.
5. MITROPOL'SKY, Yu. A., 1971. *An averaging method in nonlinear mechanics.* Kiev: Naukova Dumka Publ. (in Russian).

6. BUTS, V. A., VAVRIV, D. M., NECHAYEV, O. G. and TARASOV, D. V., 2015. A Simple Method for Generating Electromagnetic Oscillations. *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*. vol. 62, no. 1, pp. 36–40. DOI: 10.1109/TCSII.2014.2362720

V. A. Buts [1,2,3] *and D. M. Vavriv* [2]

[1] National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology", 1, Akademichna St., Kharkiv, 61108, Ukraine

[2] Institute of Radio Astronomy, National Academy of Sciences of Ukraine, 4, Mystetstv St., Kharkiv, 61002, Ukraine

[3] V. N. Karazin Kharkiv National University, 4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

ROLE OF NON-RECIPROCITY IN THE THEORY OF OSCILLATIONS

Purpose: The dynamics of coupled linear oscillators is investigated under the nonreciprocal coupling between them in order to determine the possibility of transferring the energy of low-frequency oscillations to the energy of high-frequency oscillations.
Design/methodology/approach: The methods of the theory of dynamical systems were used. In particular, the singular perturbation theory, the theory of secondary resonances, and the averaging method. Methods of numerical analysis were also used. First, the analysis of dynamics of a system of two identical linear high-frequency oscillators was made . These oscillators are connected by a weak non-reciprocal coupling. It was shown that in the presence of a non-reciprocal coupling, the complex amplitudes of high-frequency oscillators can be parametrically enhanced. If the connections were mutual, there was no such increase.

Further, the dynamics of a large number of high-frequency linear oscillators was studied. It was shown that when the oscillators were linked by mutual coupling , their initial energy was practically unchanged. Under the nonreciprocity, the possibility of parametric amplification of the amplitudes of high-frequency oscillations occurred. The dynamics of two coupled nonlinear oscillators was also considered. The singular perturbation theory was used and it was shown that if the coupling coefficients are mutual, then there is an integral, which does not allow to transform the energy of low-frequency external perturbations into the energy of high-frequency oscillators. The presence of non-reciprocal bonds destroys this integral, and the energy conversion channel opens. The analysis of the numerical results fully confirmed the analytical results obtained. In conclusion, the possibilities of using the detected channel are analyzed. Potentially, it can be used in any frequency interval. Actually, at present, it is useful in millimeter, submillimeter and terahertz ranges.
Findings: It is shown that the presence of a nonreciprocal coupling between high-frequency oscillatory degrees of freedom opens up a channel for transferring energy from low-frequency oscillations to energy of high-frequency oscillations.

Key words: oscillators, non-reciprocal coupling, oscillation generation, dynamical systems

В. А. Буц [1,2,3]*, Д. М. Ваврів* [2]

[1] Національный науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут", вул. Академічна, 1, м. Харків, 61108, Україна

[2] Радіоастрономічний інститут НАН України, вул. Мистецтв, 4, м. Харків, 61002, Україна

[3] Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

РОЛЬ НЕВЗАЄМНОСТІ В ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ

Предмет та мета роботи: Досліджується динаміка пов'язаних лінійних осциляторів за наявності невзаємого зв'язку між ними з метою визначення можливості перекачування енергії низькочастотних коливань в енергію високочастотних коливань.
Методи і методологія: Використано методи теорії динамічних систем, зокрема, сингулярна теорія збурень, теорія вторинних резонансів і метод усереднення. Було використано також методи числового аналізу. Спочатку виконано аналіз динаміки системи двох однакових лінійних високочастотних осциляторів. Ці осцилятори пов'язані слабким невзаємним зв'язком. Параметри коефіцієнтів зв'язків модулювались зовнішнім низькочастотним збуренням. Показано, що за наявності невзаємного зв'язку комплексні амплітуди високочастотних осциляторів можуть бути параметрично підсилені. Якщо зв'язки були взаємними – таке підсилення відсутнє.

Потім було вивчено динаміку великої кількості високочастотних лінійних осциляторів. Показано, що зі взаємним зв'язком між осциляторами їх первісна енергія практично не змінювалася. За наявності невзаємності виникала можливість параметричного підсилення високочастотних амплітуд. Розглянуто також динаміку двох пов'язаних нелінійних осциляторів. Використано сингулярну теорію збурень і показано, що якщо коефіцієнти зв'язку взаємні, то існує інтеграл, який не дозволяє трансформувати енергію низькочастотних зовнішніх збурень в енергію високочастотних осциляторів. Наявність невзаємних зв'язків руйнує цей інтеграл, і канал перетворення енергії відкривається. Аналіз числових результатів цілком підтвердив отримані аналітичні результати. Наприкінці аналізувались можливості використання виявленого каналу. Потенційно він може бути використаний у будь-якому інтервалі частот. Реально, наразі, він є корисним у міліметровому, субміліметровому і терагерцевому діапазонах.
Результати: Показано, що наявність невзаємного зв'язку між високочастотними коливальними ступенями свободи відкриває канал перекачування енергії від низькочастотних коливань в енергію високочастотних коливань.

Ключові слова: осцилятори, навзаємний зв'язок, генерація коливань, динамічні системи

Статья поступила в редакцию 25.09.2017