

## О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТИПА СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

*Предмет и цель работы: Рассматривается поведение спектральных характеристик (собственных частот, собственных колебаний, добротностей собственных колебаний) сферической частицы с произвольными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Целью настоящей работы является изучение некоторых важных закономерностей поведения спектральных характеристик частицы как с положительными, так и отрицательными значениями реальных и мнимых частей материальных параметров. Акцент делается на колебаниях электрического типа.*

*Методы и методология: Для достижения поставленной цели приведено решение соответствующей спектральной задачи. Метод решения основан на представлении электромагнитного поля в виде разложения по векторным сферическим волновым функциям.*

*Результаты: Проведен расчет зависимостей первых собственных частот сферической частицы от относительной диэлектрической  $\epsilon_1$  и относительной магнитной  $\mu_1$  проницаемостей, реальные и мнимые части которых могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Колебания делятся на два семейства: внутренние и внешние колебания. Внутренние колебания в каждом из квадрантов плоскости  $(\mu_1, \epsilon_1)$  имеют независимую классификацию, основанную на структуре колебаний. В отличие от внутренних колебаний, внешние колебания имеют единую классификацию в плоскости  $(\mu_1, \epsilon_1)$ . По своей структуре внешние колебания имеют вид поверхностных плазмонных колебаний, которые распределены в окрестности поверхности частицы или вне ее. В первом квадранте плоскости  $(\mu_1, \epsilon_1)$  они многократно вступают во взаимодействие с внутренними колебаниями, что приводит либо к гибридизации колебаний, либо к обмену типами колебаний. В третьем квадранте плоскости  $(\mu_1, \epsilon_1)$  внешние колебания могут вступать во взаимодействие друг с другом. Аномальное поведение спектральных характеристик сферической частицы соответствует известному ранее и хорошо описанному в научной литературе явлению междутиповой связи колебаний.*

*Заключение: Результаты проведенных исследований позволили установить новые закономерности поведения спектральных характеристик сферической частицы с произвольными значениями ее диэлектрической и магнитной проницаемостей.*

*Ключевые слова: сферическая частица, диэлектрический шар, метаматериал, собственные частоты, собственные колебания*

### 1. Введение

Интенсивная разработка метаматериалов в последние два десятилетия стала стимулом дальнейшего развития теоретических представлений о свойствах хорошо известных электродинамических структур. Сферическая частица является одной из наиболее известных канонических структур. Если при положительных значениях диэлектрической и магнитной проницаемостей дифракционные и спектральные характеристики сферической частицы изучены достаточно хорошо, то при отрицательных значениях проницаемостей (одно из свойств метаматериалов) они исследованы недостаточно. Развитие представлений о свойствах сферической частицы насчитывает уже более ста лет. Уравнения для соб-

ственных частот сферических диэлектрических резонаторов впервые были получены Г. Ми и П. Дебаем в 1908–1909 гг. [1, 2]. Численный расчет комплексных собственных частот для широкого интервала изменения диэлектрической проницаемости был впервые выполнен в [3]. Великолепный анализ собственных колебаний в изотропном сферическом диэлектрическом резонаторе был проведен в [4]. Электродинамические свойства сферической частицы с произвольными вещественными значениями материальных параметров были впервые рассмотрены в работе [5]. При этом исследование резонансных свойств частицы проводилось на основе анализа резонансов коэффициентов отражения при вещественном значении волнового числа. В работах [4, 5], в частности, было отмечено, что в та-

кой частице существуют моды, для которых характерно аномальное поведение спектральных кривых (в отличие от спектральных кривых других мод, они либо пересекаются, либо образуют график Вина в окрестности некоторых значений материальных параметров). Описанное в [4, 5] аномальное поведение спектральных кривых было детально изучено в работе [6], в которой рассматривалось взаимодействие собственных колебаний диэлектрического шара, и в работе [7] при рассмотрении взаимодействия собственных колебаний сферической частицы с одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Спектральные кривые, приведенные в работах [4–7], относятся к классу спектральных кривых для электродинамических структур в условиях междуполовой связи колебаний [8]. Это обстоятельство послужило побуждающим фактором для более глубокого изучения резонансных свойств сферической частицы на основе анализа ее спектральных характеристик в комплексной области частот.

Целью настоящей работы является изучение закономерностей поведения спектральных характеристик сферической частицы с произвольными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Акцент делается на колебаниях электрического типа.

В работе не накладываются ограничения на значения проницаемостей: знаки вещественных и мнимых частей могут быть различными. Соответственно возникает вопрос о правильном выборе знака показателя преломления для среды с комплексными материальными параметрами. Полный анализ знаков показателя преломления для сред с потерями и усилением был дан в работе [9] (см. также [10]). Для решения рассматриваемой в настоящей работе задачи используется простая формула, полученная в работе [11]. Эта формула дает результаты, совпадающие с другими алгоритмами расчета показателя преломления [10] (с учетом замечаний, сделанных в [10] относительно активных сред).

Математические проблемы определения знака показателя преломления связаны с тем, что при вычислении комплексного квадратного корня разрез комплексной плоскости для выделения двух листов римановой поверхности может быть проведен по-разному. Каждый из возможных способов проведения разреза может быть удобным

для сред определенного типа, но в общем случае трудно отдать предпочтение одному из них. Отмеченная неоднозначность не позволяет “привязать” “истинное” значение показателя преломления к одной из ветвей функции комплексного квадратного корня, поэтому определение знака показателя преломления необходимо проводить, исходя из некоторых дополнительных физических соображений. Обычно знак показателя преломления определяется совместно со знаком комплексного импеданса. В [11] предлагается условие, при котором знак мнимой части показателя преломления совпадает со знаком плотности мощности потерь или усиления.

## 2. Метод расчета

Рассмотрим сферическую частицу радиуса  $a$  (рис. 1). Относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости частицы равны соответственно  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_1''$  и  $\mu_1 = \mu_1' + i\mu_1''$ , а относительные проницаемости окружающего пространства  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\mu_0 > 0$ . Волновое число в частице и вне ее определяется как  $k_s = k\sqrt{\varepsilon_s\mu_s}$  ( $s = 0, 1$ ), где  $k = \omega/c$  – волновое число в вакууме. Введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$ , связанную с центром частицы ( $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения). Электромагнитное поле в частице и вне ее (в отсутствие падающего поля) будем искать в виде:

$$(\vec{E}, \vec{H}) = \begin{cases} (\vec{E}^0, \vec{H}^0), & r > a; \\ (\vec{E}^1, \vec{H}^1), & r < a; \end{cases} \quad (1)$$

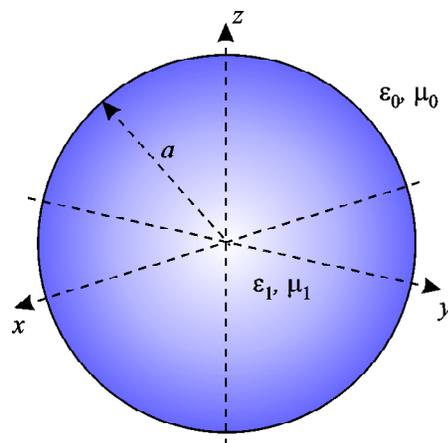


Рис. 1. Сферическая частица

где

$$\begin{aligned} \vec{E}^0(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{mn}^0 \bar{N}_{mn}^{(3)}(\vec{r}, k_0) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=(m,1)}^{\infty} \left\{ \bar{C}_{mn}^{0(+)} \bar{N}_{mn}^{e(3)}(\vec{r}, k_0) + i \bar{C}_{mn}^{0(-)} \bar{N}_{mn}^{o(3)}(\vec{r}, k_0) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^0(\vec{r}) &= \frac{k_0}{ik\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{mn}^0 \bar{M}_{mn}^{(3)}(\vec{r}, k_0) = \frac{k_0}{ik\mu_0} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=(m,1)}^{\infty} \left\{ \bar{C}_{mn}^{0(+)} \bar{M}_{mn}^{e(3)}(\vec{r}, k_0) + i \bar{C}_{mn}^{0(-)} \bar{M}_{mn}^{o(3)}(\vec{r}, k_0) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^1(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn}^1 \bar{N}_{mn}^{(1)}(\vec{r}, k_1) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=(m,1)}^{\infty} \left\{ C_{mn}^{1(+)} \bar{N}_{mn}^{e(1)}(\vec{r}, k_1) + i C_{mn}^{1(-)} \bar{N}_{mn}^{o(1)}(\vec{r}, k_1) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^1(\vec{r}) &= \frac{k_1}{ik\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn}^1 \bar{M}_{mn}^{(1)}(\vec{r}, k_1) = \\ &= \frac{k_1}{ik\mu_1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=(m,1)}^{\infty} \left\{ C_{mn}^{1(+)} \bar{M}_{mn}^{e(1)}(\vec{r}, k_1) + i C_{mn}^{1(-)} \bar{M}_{mn}^{o(1)}(\vec{r}, k_1) \right\}; \end{aligned}$$

$h_{mn}^{(\pm)} \stackrel{\text{def}}{=} [h_{mn} \pm (-1)^m h_{-mn}] [1 + \delta_{m0}]^{-1}$ ;  
 $(m, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \max(m, 1)$  и  $\bar{C}_{mn}^0$ ,  $C_{mn}^1$  – неизвестные коэффициенты. Векторные сферические волновые функции  $\bar{N}_{mn}^{(l)}(\vec{r}, k_s)$  и  $\bar{M}_{mn}^{(l)}(\vec{r}, k_s)$ , четные и нечетные векторные сферические волновые функции  $\bar{N}_{mn}^{e(l)}(\vec{r}, k_s)$ ,  $\bar{N}_{mn}^{o(l)}(\vec{r}, k_s)$  и  $\bar{M}_{mn}^{e(l)}(\vec{r}, k_s)$ ,  $\bar{M}_{mn}^{o(l)}(\vec{r}, k_s)$  [12, 13], входящие в (1)–(3), с точностью до принятых в работе нормировочных множителей определены в [6, 7]. Здесь и далее предполагается, что зависимость полей от времени имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ .

Используя граничные условия непрерывности тангенциальных компонент полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на поверхности частицы (при  $r = a$ ), получим дисперсионное уравнение для собственных колебаний электрического типа (*TM*-мод):

$$\frac{\mu_0}{\mu_1} \psi_n(k_1 a) \zeta'_n(k_0 a) - \frac{k_0}{k_1} \psi'_n(k_1 a) \zeta_n(k_0 a) = 0, \quad (4)$$

где  $\psi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{n+1/2}(z)$ ,  $\zeta_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} H_{n+1/2}^{(1)}(z)$  – функции Риккати–Бесселя первого и третьего рода;  $J_{n+1/2}(z)$ ,  $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$  – функции Бесселя и Ханкеля полуцелого индекса. Полагая известными  $C_{mn}^1$ , находим

$$\bar{C}_{mn}^0 = \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{\psi_n(k_1 a)}{\zeta_n(k_0 a)} C_{mn}^1.$$

Необходимо обратить внимание на следующие моменты. Во-первых, естественной областью аналитического продолжения решения задачи по волновому числу  $k$  является комплексная плоскость, за исключением значения  $k = 0$  (функции Риккати–Бесселя являются аналитическими функциями в этой области). Во-вторых, в аргументы функций уравнения (4) входит величина  $\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ , и следовательно возникает вопрос о правильном выборе знака у корня. Будем вычислять  $\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$  по формуле из работы [11] (см. Введение):

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\mu_1} \operatorname{sign} \left[ \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \right) \right],$$

где квадратные корни рассматриваются в смысле главного значения при разрезе вдоль отрицательной полуоси вещественной оси ( $\sqrt{z} \geq 0$  для неотрицательного действительного числа  $z$ ). Такой выбор главного значения используется в большинстве прикладных пакетов для математических расчетов, что дает определенные преимущества.

### 3. Краткий анализ собственных колебаний

Отличительной особенностью колебаний электрического типа (*TM*-мод) является наличие отличной от нуля радиальной компоненты электрического поля  $E_r$  ( $H_r = 0$ ). Соответственно колебания электрического типа описываются (см. (1)–(3)) векторами  $\bar{N}_{mn}^{(l)}(\vec{r}, k_s)$  (имеют радиальную компоненту) и  $\bar{M}_{mn}^{(l)}(\vec{r}, k_s)$ . Собственные частоты этих колебаний находятся из уравнений (4). Азимутальный индекс  $m$  не входит в уравнение (4), т. е. имеет место вырождение собственных колебаний по индексу  $m$ . Кратность вырождения равна  $2n + 1$ . Этот результат следует из представлений (2), (3)

в терминах четных и нечетных векторных сферических волновых функций. Нормированной собственной частоте  $TM$ -мод  $k_{nq}a = \frac{\omega_{nq}}{c}a$  ( $q$  – номер корня уравнения (4)) соответствуют моды  $TM_{mnq}^e$  ( $m=0, \dots, n$ ), описываемые полями  $\vec{E}_{mnq}^s(\vec{r}) = A_{mn}^{s(+)} \vec{N}_{mn}^{e(l)}$ ,  $\vec{H}_{mnq}^s(\vec{r}) = \frac{k_s}{ik\mu_s} A_{mn}^{s(+)} \vec{M}_{mn}^{e(l)}$ , и моды  $TM_{mnq}^o$  ( $m=1, \dots, n$ ), описываемые полями  $\vec{E}_{mnq}^s(\vec{r}) = iA_{mn}^{s(-)} \vec{N}_{mn}^{o(l)}$ ,  $\vec{H}_{mnq}^s(\vec{r}) = \frac{k_s}{ik\mu_s} iA_{mn}^{s(-)} \vec{M}_{mn}^{o(l)}$ , ( $A_{mn}^{l(\pm)} = C_{mn}^{l(\pm)}$ ,  $A_{mn}^{0(\pm)} = \bar{C}_{mn}^{0(\pm)}$ ). Для определенности будем проводить анализ колебаний  $TM_{0nq}$  ( $TM_{0nq}^e$ ). Колебания  $TM_{0nq}$  имеют три компоненты,  $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $H_\phi$ , причем компоненты  $E_r$ ,  $E_\theta$  могут быть вычислены через компоненту  $H_\phi$  (единственную компоненту магнитного поля). Поэтому, говоря о структуре колебания  $TM_{0nq}$ , будем иметь в виду пространственное распределение компоненты  $H_\phi$ .

В [3] было показано, что в случае  $\epsilon_1' > 0$ ,  $\mu_1' > 0$  ( $\epsilon_1'' = \mu_1'' = 0$ ) спектр собственных колебаний сферического диэлектрического резонатора расщепляется на внутренние (поле распределено внутри частицы) и внешние (поле распределено в окрестности поверхности частицы или вне ее) моды. Он состоит из двух серий, каждой из которых свойственна своя зависимость от диэлектрической проницаемости шара. Соответственно корни характеристических уравнений внутренних и внешних мод целесообразно нумеровать отдельно. Во избежание путаницы, для внутренних мод оставляют запись  $TM_{mnq}$ , а для внешних мод добавляют штрих при индексе  $q$ :  $TM_{mnq}'$ . Для аксиально-симметричных колебаний  $TM_{0nq}'$  индекс  $n$  обозначает число пучностей  $|\vec{H}|$  вдоль координаты  $\theta$  сферической системы координат, а индекс  $q'$  – номер корня уравнения (4). Для внутренних колебаний  $TM_{0nq}$  индекс  $q$  обозначает число пучностей  $|\vec{H}|$  вдоль координаты  $r$  сферической системы координат. В отличие от работ [3, 4], в настоящей работе колебания классифицируются не по возрастанию реальной части собственной частоты (такая классификация приемлема, когда зависимости реальных частей собственных частот не пересекаются), а по структуре электромагнитного поля. Основанием для такой классификации является описанное

в работах [6, 7] взаимодействие собственных колебаний.

#### 4. Особенности поведения спектральных характеристик

Рассмотрим поведение собственных частот в первом квадранте плоскости  $(\mu_1', \epsilon_1')$  при  $\mu_1'' = \epsilon_1'' = 0$  ( $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ ). На рис. 2, 3 и 4 показаны зависимости реальных частей нормированных собственных частот  $\text{Re}(ka)$  и логарифмов добротностей  $\lg(Q)$  ( $Q = -0.5 \text{Re}(ka)/\text{Im}(ka)$ ) собственных колебаний  $TM_{011}'$ ,  $TM_{011}$ ,  $TM_{012}$ ,  $TM_{013}$  от  $\epsilon_1'$  при разных значениях  $\mu_1'$ . Символами вида  $3+1 \sim$  или  $3 \sim$  на рисунке обозначены гибридные типы колебаний [6]. Приведенные зависимости обобщают результат работы [6], а именно: обнаруженное и исследованное явление междутиповой связи колебаний в диэлектрическом шаре при  $\mu_1' = 1$  ( $\mu_1'' = \epsilon_1'' = 0$ ) имеет место и при других значениях относительной магнитной проницаемости  $\mu_1'$ . В качестве управляющего параметра этого явления (при фиксированном значении  $\mu_1'$ ) используется относительная диэлектрическая проницаемость шара  $\epsilon_1'$ . Во взаимодействии вступают внешняя  $TM_{011}'$  и внутренние моды. На рис. 5 показаны зависимости  $\text{Re}(ka)$  и  $\lg(Q)$  колебаний  $TM_{011}'$ ,  $TM_{011}$ ,  $TM_{012}$  как функции двух переменных,  $\mu_1'$  и  $\epsilon_1'$ . Как видно, в окрестности некоторых точек плоскости  $(\mu_1', \epsilon_1')$  две собственные частоты локально образуют единую двулиственную поверхность. В сечении этой поверхности плоскостями  $\mu_1' = \text{const}$  мы получим разное поведение реальных и мнимых частей собственных колебаний, описанное в работе [6]. В частности, локально мы можем видеть как гибридизацию колебаний, так и обмен типами колебаний. Как видно из рис. 5, в плоскости  $(\mu_1', \epsilon_1')$  можно наблюдать многократное преобразование мод. Можно также выдвинуть смелое предположение о том, что подбором значений  $\mu_1''$  и  $\epsilon_1''$  возможно добиться вырождения собственных колебаний в комплексной области частот [4].

На рис. 3 и 4 наблюдаем также резонансные минимумы  $\lg(Q)$ . При  $\mu_1' = \mu_0$  и  $\epsilon_1' \rightarrow \epsilon_0$  ( $\epsilon_1' > \epsilon_0$ ) добротность колебаний диэлектрического шара стремится к нулю,  $\lg(Q) \rightarrow -\infty$ , а поле при переходе к вакууму выталкивается из резонатора (амплитуда колебаний при этом стремится к нулю). С увеличением  $\mu_1'$  мы уходим от этого

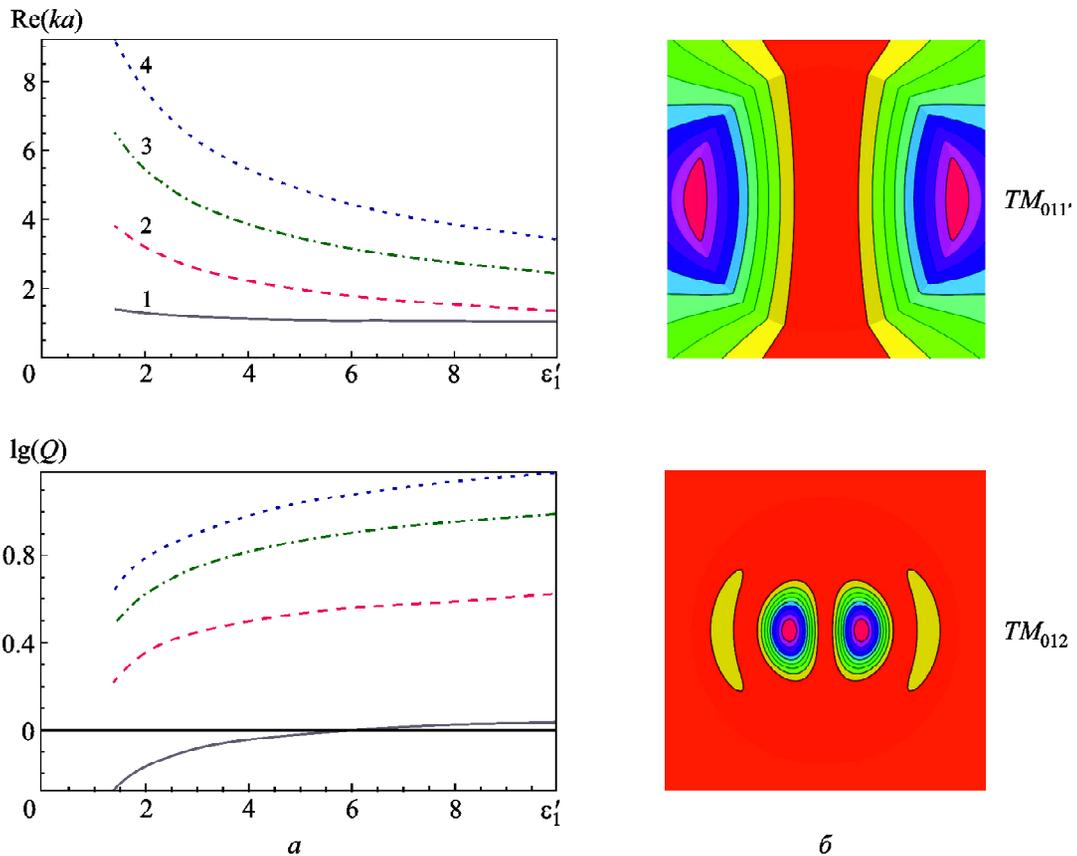


Рис. 2. а – графики зависимостей  $\text{Re}(ka)$  (верхняя панель) и  $\lg(Q)$  (нижняя панель) колебаний  $TM_{011}'$  (кривые 1),  $TM_{012}$  (кривые 2),  $TM_{012}$  (кривые 3),  $TM_{013}$  (кривые 4) от  $\epsilon_1'$  при  $\mu_1' = 1$  ( $\epsilon_1'' = \mu_1'' = 0$ ); б – распределение  $|\vec{H}|$  колебаний  $TM_{011}'$  (верхняя панель) и  $TM_{012}$  (нижняя панель) при  $\mu_1 = 0.5$ ,  $\epsilon_1 = 10$

предельного случая: поле из диэлектрического шара выталкивается частично, вследствие чего возникают минимумы  $\lg(Q)$  (добротность колебаний становится отличной от нуля при всех значениях  $\epsilon_1'$ ). Эти минимумы с увеличением  $\mu_1'$  сдвигаются в сторону больших значений  $\epsilon_1'$ , а сами минимумы с увеличением  $\mu_1'$  постепенно исчезают. Колебания в окрестности минимума добротности имеют структуру, близкую к структуре колебаний  $TM_{011}'$  и  $TM_{01q}$  (в зависимости от степени выталкивания из резонатора пучностей оригинальных колебаний  $TM_{011}'$  и  $TM_{01q}$ ), и поэтому названы гибридными. При уходе от точки минимума  $\lg(Q)$  в сторону уменьшения значения  $\epsilon_1'$  также образуются гибридные колебания, имеющие черты колебаний  $TM_{01q}$  и  $TM_{011}'$  (такие колебания имеют пучности внутри шара и пучность с существенно меньшим значением амплитуды в окрестности поверхности шара). Эти два вида гибридности принципиально отличаются от гибридности колебаний в условиях

междуполовой связи колебаний, когда гибридные колебания имеют черты двух колебаний, вступающих в междуполовую связь.

Уравнение (4) позволяет находить собственные частоты  $ka$ , вещественные части которых дают значения собственных частот колебаний электромагнитного поля, а мнимые части характеризуют затухание мод. Расчеты собственных частот в третьем квадранте плоскости  $(\mu_1', \epsilon_1')$  показали, что возможны лишние решения (см. рис. 6), соответствующие незатухающим со временем модам электромагнитного поля. Результат неожиданный, но, к сожалению, он имеет место. В связи с этим результатом необходимо осуществлять отбор физически корректных решений исходя из условия  $\text{Im}(ka) < 0$ . Использование в расчетах, например, значений  $\mu_1'' > 0$  и  $\epsilon_1'' > 0$  только ухудшает результат. А использование в расчетах значений  $\mu_1'' < 0$  и  $\epsilon_1'' < 0$  приводит к сле-

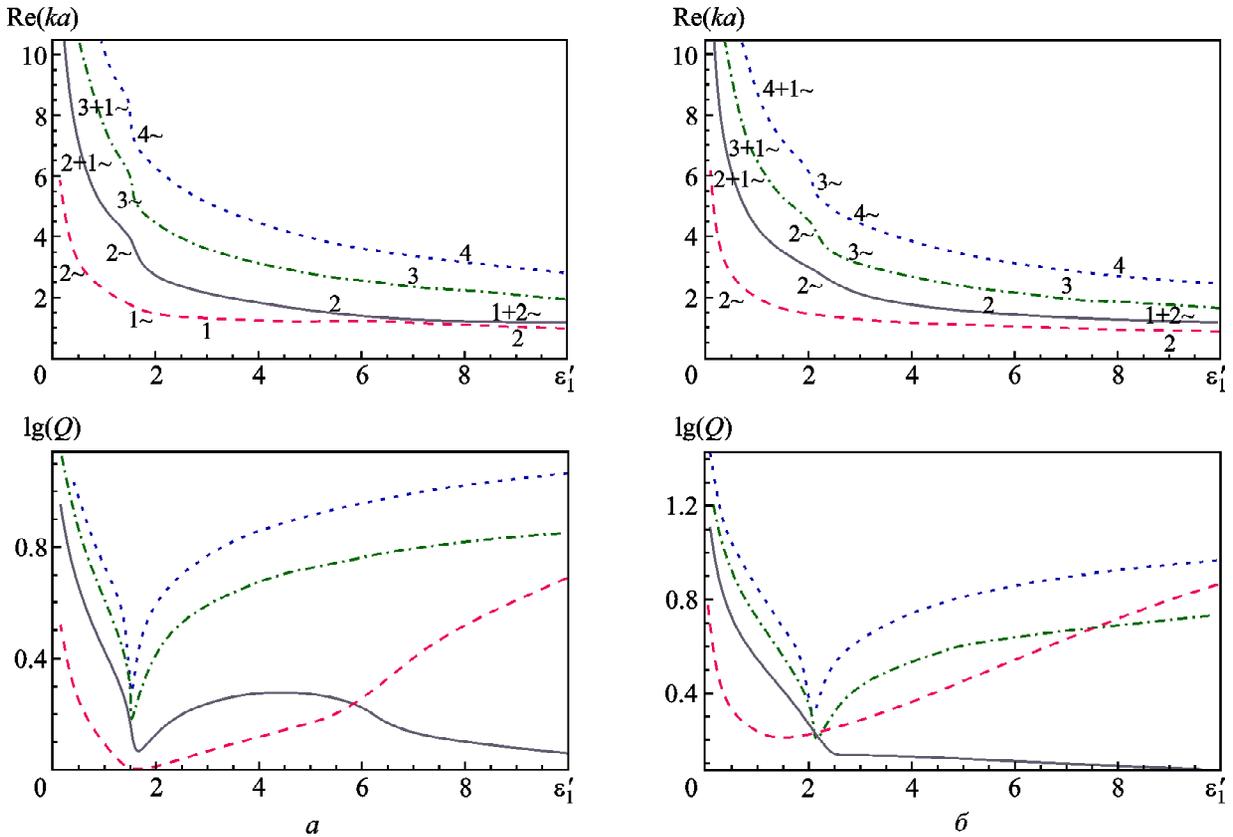


Рис. 3. Графики зависимостей  $Re(ka)$  (верхние панели) и  $lg(Q)$  (нижние панели) колебаний  $TM_{011'}$  (кривые 1),  $TM_{011}$  (кривые 2),  $TM_{012}$  (кривые 3),  $TM_{013}$  (кривые 4) от  $\epsilon_1'$  ( $\epsilon_1'' = \mu_1'' = 0$ ):  $a - \mu_1' = 1.5$ ,  $b - \mu_1' = 2.0$ . Символами вида “3+1~” или “3~” обозначены гибридные типы колебаний

дующему (см. рис 7): с увеличением по абсолютной величине  $\epsilon_1' < 0$ , начиная с некоторого значения  $\epsilon_1'$ , мнимая часть  $ka$  становится отрицательной, т. е. решение принимает физически корректный смысл. Следует также отметить, что наличие физически некорректных решений уравнения (4) приводит к резонансам коэффициентов Ми, что дало возможность автору работы [5] говорить о существовании внутренних мод в третьем квадрате плоскости  $(\mu_1', \epsilon_1')$ . Физически некорректные решения возникают и в первом квадранте при введении в расчеты значений  $\mu_1'' < 0$  и  $\epsilon_1'' < 0$ : с увеличением значения  $\epsilon_1' > 0$ , начиная с некоторого значения  $\epsilon_1'$ , мнимая часть  $ka$  становится положительной.

Особого внимания заслуживает плазмонное колебание  $TM_{011'}$ . В отличие от внутренних колебаний, оно имеет место во всех квадрантах плоскости  $(\mu_1', \epsilon_1')$  и его собственной частоте присущи важные закономерности (см. рис. 2, 3, 4, и 8). Собственная частота колебания  $TM_{011'}$  при

$\mu_1' < \mu_0$ ,  $\epsilon_1' > \epsilon_0$  переходит сначала во второй квадрант, затем в третий и четвертый квадранты и, наконец, снова возвращается в первый квадрант (но уже с нулевой реальной частью). То есть частота этого колебания лежит как бы на части винтовой поверхности с осью в точке  $(\mu_0, \epsilon_0)$ . При этом при переходе из первого во второй квадрант (на некотором промежутке изменения  $\epsilon_1'$ ), а также при переходе из четвертого в первый квадрант реальная часть частоты становится равной нулю. Поведение собственной частоты в первом квадранте (при  $\mu_1' \geq \mu_0$ ) было описано выше (рис. 2, 3, и 4). Поле собственного колебания  $TM_{011'}$  (рис. 2, б) при переходе из первого квадранта плоскости  $(\mu_1', \epsilon_1')$  во второй квадрант с уменьшением  $\mu_1'$  все более прижимается к поверхности. При переходе из второго квадранта в третий в точке  $(\epsilon_1')$ , в которой достигается минимум  $Im(ka)$ , поле полностью выталкивается из частицы. При дальнейшем уменьшении  $\epsilon_1'$  поле восстанавливается и имеет вид ”класси-

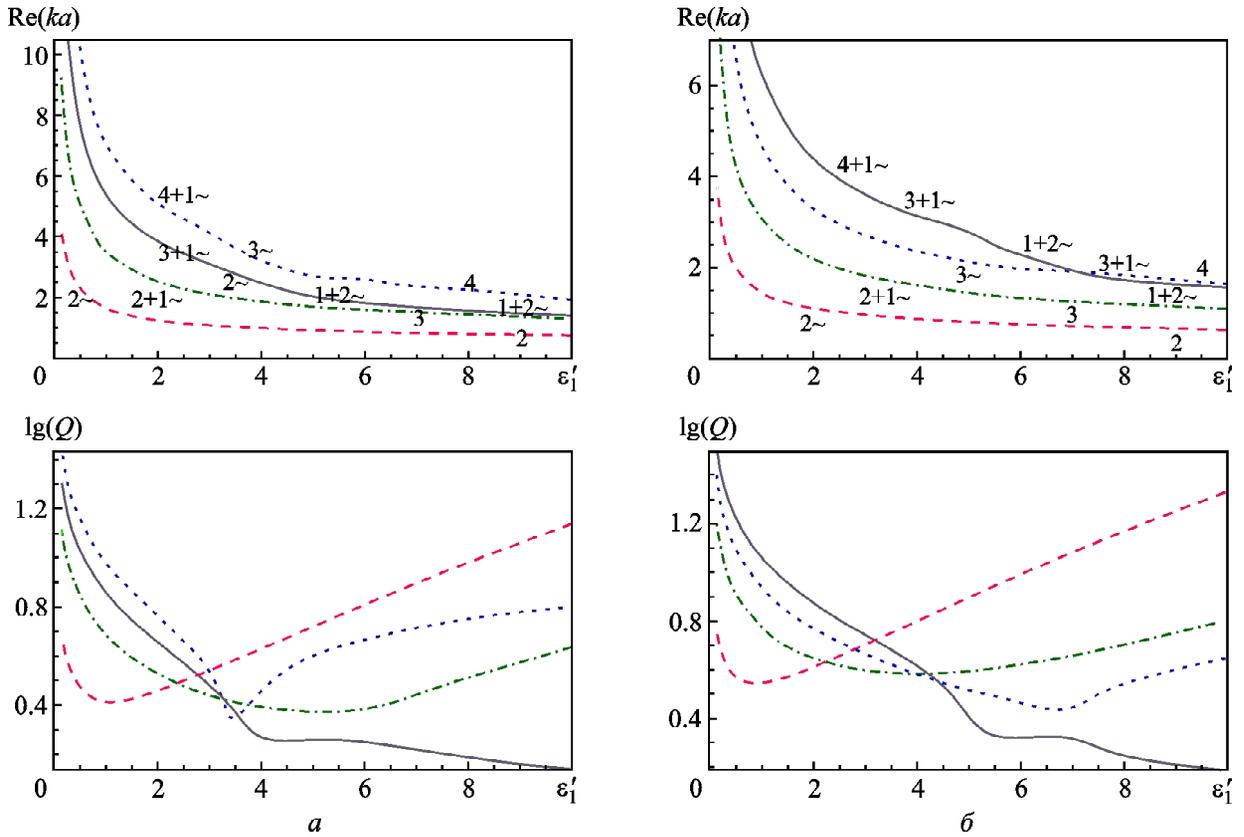


Рис. 4. Графики зависимостей  $\text{Re}(ka)$  (верхние панели) и  $\lg(Q)$  (нижние панели) колебаний  $TM_{01l'}$  (кривые 1),  $TM_{011}$  (кривые 2),  $TM_{012}$  (кривые 3),  $TM_{013}$  (кривые 4) от  $\varepsilon'_1$  ( $\varepsilon''_1 = \mu''_1 = 0$ ):  $a - \mu'_1 = 3.0$ ,  $b - \mu'_1 = 4.0$

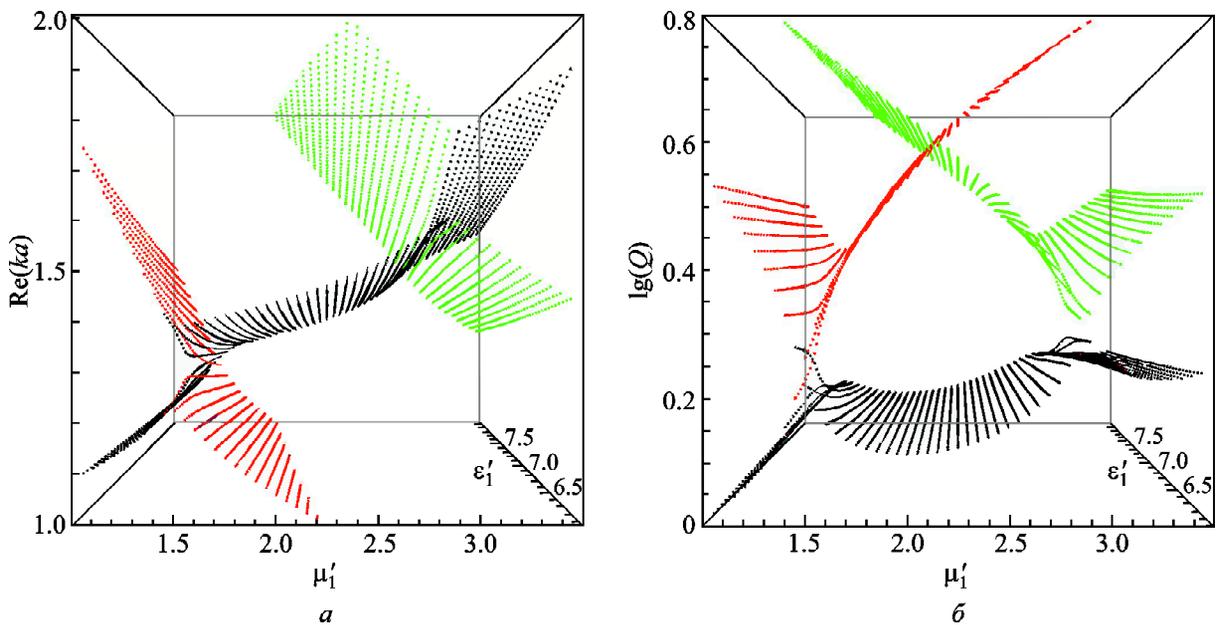


Рис. 5. Графики зависимостей  $\text{Re}(ka)$  (а) и  $\lg(Q)$  (б) колебаний  $TM_{01l'}$ ,  $TM_{011}$ ,  $TM_{012}$  от  $\mu'_1$  и  $\varepsilon'_1$  ( $\varepsilon''_1 = \mu''_1 = 0$ ). Сечения этих графиков плоскостями  $\mu'_1 = 1.0$ ,  $\mu'_1 = 1.5$ ,  $\mu'_1 = 2.0$ ,  $\mu'_1 = 3.0$  на интервале  $6.0 < \varepsilon' < 8.0$  представлены на рис. 2, рис. 3, рис. 4 с указанием типов колебаний

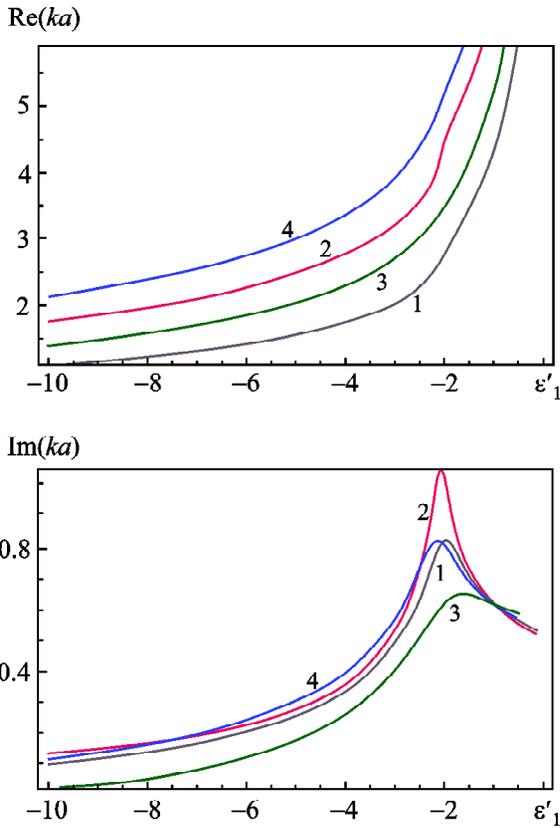


Рис. 6. Графики зависимостей  $\text{Re}(ka)$  (верхняя панель) и  $\text{Im}(ka)$  (нижняя панель) колебаний  $TM_{011}$  (кривые 1),  $TM_{012}$  (кривые 2),  $TM_{021}$  (кривые 3),  $TM_{022}$  (кривые 4) от  $\epsilon'_1$  ( $\mu'_1 = -2$ ,  $\epsilon''_1 = \mu''_1 = 0$ )

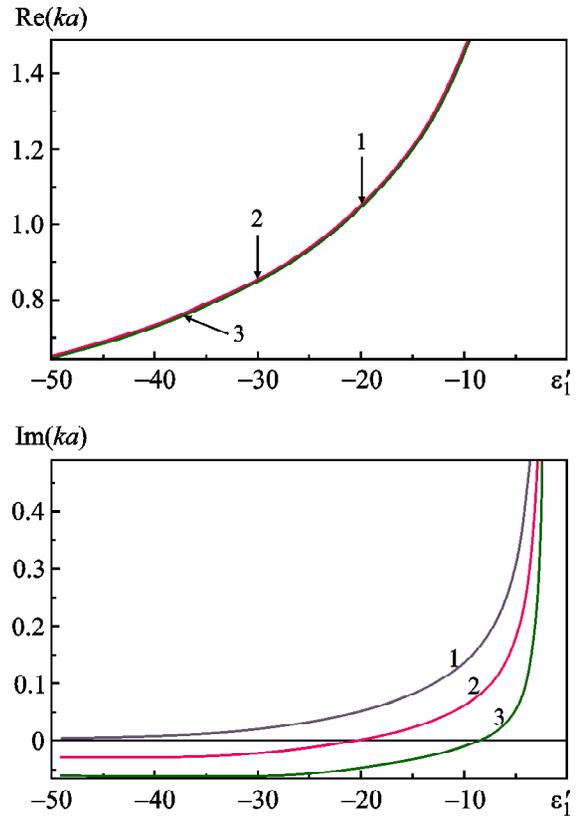


Рис. 7. Графики зависимостей  $\text{Re}(ka)$  (верхняя панель) и  $\text{Im}(ka)$  (нижняя панель) колебания  $TM_{011}$  от  $\epsilon'_1$  ( $\mu'_1 = -1$ ) при  $\epsilon''_1 = \mu''_1 = 0$  (кривая 1),  $\epsilon''_1 = \mu''_1 = -0.1$  (кривая 2),  $\epsilon''_1 = \mu''_1 = -0.2$  (кривая 3)

ческого” плазмонного колебания (см. [7]), добротность которого растет при переходе в четвертый квадрант.

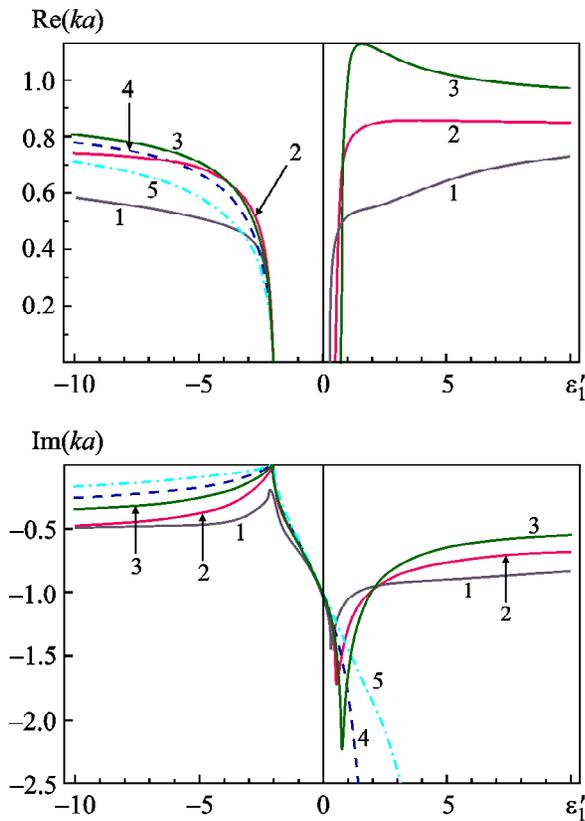
Мы рассмотрели некоторые закономерности поведения собственных колебаний с индексом  $n = 1$  как более простые для анализа. С ростом индекса  $n$  анализ поведения собственных частот и собственных колебаний может быть более сложным (с точки зрения визуализации), особенно в условиях междутиповой связи колебаний. Например, в работе [7] установлено, что в третьем квадранте плоскости  $(\mu'_1, \epsilon'_1)$  взаимодействуют собственные колебания  $TM_{031'}$  и  $TM_{032'}$ . Как следствие, при изменении материальных параметров частицы в окрестности критической точки [7] локально наблюдается либо гибридизация, либо обмен типами колебаний. В отличие от колебания  $TM_{011'}$ , реальная часть частоты плазмонного колебания  $TM_{031'}$  при переходе из второго квадранта в третий отлична от нуля (при этом

мнимая часть частоты имеет минимум, как и у колебания  $TM_{011'}$ ). В окрестности точки  $(\mu_0, \epsilon_0)$  частота колебания  $TM_{031'}$  как бы по части винтовой поверхности с осью в точке  $(\mu_0, \epsilon_0)$  переходит в частоту колебания  $TM_{032'}$ .

## 5. Выводы

Приведено решение спектральной задачи для сферической частицы. Решение основано на представлении электромагнитного поля в виде разложения по векторным сферическим волновым функциям.

Проведен расчет зависимостей первых собственных частот колебаний электрического типа сферической частицы от относительной диэлектрической  $\epsilon_1$  и относительной магнитной  $\mu_1$  проницаемостей, реальные и мнимые части которых могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Колебания делятся на два семейства: внутренние и внешние колебания.



**Рис. 8.** Графики зависимостей  $\text{Re}(ka)$  (верхняя панель) и  $\text{Im}(ka)$  (нижняя панель) колебания  $TM_{01}$  от  $\varepsilon'_1$  ( $\varepsilon''_1 = \mu''_1 = 0$ ) при  $\mu'_1 = -5.0$  (кривая 1),  $\mu'_1 = -1.0$  (кривая 2),  $\mu'_1 = 0.5$  (кривая 3),  $\mu'_1 = 2.0$  (кривая 4),  $\mu'_1 = 5.0$  (кривая 5)

Внутренние колебания в каждом из квадрантов плоскости  $(\mu_1, \varepsilon_1)$  имеют независимую классификацию, основанную на структуре колебаний. В отличие от внутренних колебаний, внешние колебания имеют единую классификацию в плоскости  $(\mu_1, \varepsilon_1)$ , а точнее, собственные частоты внешних колебаний непрерывным образом переходят из одного квадранта плоскости  $(\mu_1, \varepsilon_1)$ , начиная с первого, в следующий квадрант.

По своей структуре внешние колебания имеют вид поверхностных плазмонных колебаний. В первом квадранте плоскости  $(\mu_1, \varepsilon_1)$  они многократно вступают во взаимодействие с внутренними колебаниями, что приводит либо к гибридизации колебаний, либо к обмену типами колебаний. В третьем квадранте плоскости  $(\mu_1, \varepsilon_1)$  внешние колебания могут вступать во взаимодействие друг с другом. Аномальное поведение спектральных характеристик сферической частицы соответствует известному ранее и хорошо описанно-

му в научной литературе явлению междутиповой связи колебаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mie G. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annalen der Physik* [online]. 1908. Vol. 330, Is. 3. P. 377–445. DOI: 10.1002/andp.19083300302
2. Debye P. Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. *Annalen der Physik* [online]. 1909. Vol. 335, Is. 11. P. 57–136. DOI: 10.1002/andp.19093351103
3. Gastine M., Courtois L., and Dorman J. Electromagnetic resonances of free dielectric spheres. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 1967. Vol. 15, Is. 12. P. 694–700. DOI: 10.1109/TMTT.1967.1126568
4. Wolff I. Electromagnetic Fields in Spherical Microwave Resonators: H-Modes and E-Modes in Lossless Open Dielectric Spheres. Version 05.2018. *Research Gate*. 2018. URL: <https://www.researchgate.net/publication/325335243> (дата обращения: 05.04.2020).
5. Klimov V. V. Spontaneous emission of an excited atom placed near a “left-handed” sphere. *Opt. Commun.* 2002. Vol. 211, Is. 1-6. P. 183–196. DOI: 10.1016/S0030-4018(02)01802-3
6. Свищёв Ю. В. Взаимодействие собственных колебаний в сферическом диэлектрическом резонаторе. *Радиофизика и электроника*. 2019. Т. 24, № 4. С. 11–19. DOI: 10.15407/rej2019.04.011
7. Свищёв Ю. В. Взаимодействие собственных электромагнитных колебаний в сферической частице с отрицательными значениями материальных параметров. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2019. Т. 24, № 3. С. 206–217. DOI: 10.15407/rpra24.03.206
8. Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. Об аналитической природе явления междутиповой связи собственных колебаний. *Доклады АН СССР*. 1988. Т. 300, № 6. С. 1356–1359.
9. Wei J. and Xiao M. Electric and magnetic losses and gains in determining the sign of refractive index. *Opt. Commun.* 2007. Vol. 270, Is. 2. P. 455–464. DOI: 10.1016/j.optcom.2006.09.039
10. Афанасьев С. А., Санников Д. Г., Семенов Д. И. Выбор знака показателя преломления для метаматериалов с потерями и усилением. *Радиотехника и электроника*. 2013. Т. 58, № 1. С. 5–15.
11. Grigorenko A. N. Negative Refractive Index in Artificial Metamaterials. *Opt. Lett.* 2006. Vol. 31, Is. 16. P. 2483–2485. DOI: 10.1364/OL.31.002483
12. Stratton J. *Electromagnetic Theory*. New York, London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1941. 615 p.
13. Морс Ф. М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики. Том 2*. Москва: Иностранная литература, 1960. 896 с.

## REFERENCES

1. MIE, G., 1908. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annalen der Physik* [online]. vol. 330, is. 3, pp. 377–445. DOI: 10.1002/andp.19083300302

2. DEBYE, P., 1909. Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. *Annalen der Physik* [online]. vol. 335, is. 11, pp. 57–136. DOI: 10.1002/andp.19093351103
3. GASTINE, M., COURTOIS, L. and DORMAN, J. L., 1967. Electromagnetic resonances of free dielectric spheres. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* vol. 15, is. 12, pp. 694–700. DOI: 10.1109/TMTT.1967.1126568
4. WOLFF, I., 2018. *Electromagnetic Fields in Spherical Microwave Resonators: H-Modes and E-Modes in Lossless Open Dielectric Spheres. Version 05.2018.* [online preprint]. Research Gate, May 2018. [viewed 5 April 2020]. Available from: <https://www.researchgate.net/publication/325335243>
5. KLIMOV, V. V., 2002. Spontaneous emission of an excited atom placed near a “left-handed” sphere. *Opt. Commun.* vol. 211, is. 1-6, pp. 183–196. DOI: 10.1016/S0030-4018(02)01802-3
6. SVISHCHOV, YU. V., 2019. The eigenmode interaction in a spherical dielectric resonator. *Radiof. Elektron.* vol. 24, is. 4, pp. 11–19. (in Russian). DOI: 10.15407/rej2019.04.011
7. SVISHCHOV, YU. V., 2019. Interaction of eigenmodes in a spherical particle with negative values of its material parameters. *Radio Phys. Radio Astron.* vol. 24, is. 3, pp. 206–217. (in Russian). DOI: 10.15407/rpra24.03.206
8. MELEZHNIK, P. N., POEDINCHUK, A. E., TUCHKIN, YU. A. and SHESTOPALOV, V. P., 1988. On the Analytical Nature of the Phenomenon of Intertype Relationship of Natural Oscillations. *Dok. Akad. Nauk SSSR.* vol. 300, no. 6, pp. 1356–1359. (in Russian).
9. WEI, J. and XIAO, M., 2007. Electric and magnetic losses and gains in determining the sign of refractive index. *Opt. Commun.* vol. 270, is. 2, pp. 455–464. DOI: 10.1016/j.optcom.2006.09.039
10. AFANAS'EV, S. A., SANNIKOV, D. G. and SEMEN-TSOV, D. I., 2013. The refractive index sign chosen for amplifying and lossy metamaterials. *J. Commun. Technol. Electron.* vol. 58, is. 1, pp. 1–11. DOI: 10.7868/S0033849413010014
11. GRIGORENKO, A. N., 2006. Negative Refractive Index in Artificial Metamaterials. *Opt. Lett.* vol. 31, is. 16, pp. 2483–2485. DOI: 10.1364/OL.31.002483
12. STRATTON, J., 1941. *Electromagnetic Theory.* New York, London: McGraw-Hill Book Company, Inc.
13. MORSE, P. M. and FESHBACH, H., 1960. *Methods of Theoretical Physics. Vol. 2.* Moscow, Russia: Inostrannaya Literatura Publ. (in Russian).

Yu. V. Svishchov

O. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics,  
National Academy of Sciences of Ukraine,  
12, Acad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

ON SOME FEATURES OF BEHAVIOR  
OF ELECTRIC TYPE EIGENMODES  
OF A SPHERICAL PARTICLE WITH ARBITRARY  
VALUES OF MATERIAL PARAMETERS

*Purpose:* The behavior of spectral characteristics (eigenfrequencies, eigenmodes, Q-factors) of a spherical particle with the arbitrary values of permittivity and permeability is considered.

The aim of this work is to study some important laws of behavior of the spectral characteristics of a particle with both positive and negative values of the real and imaginary parts of material parameters. The emphasis is made on the electric type eigenmodes.

*Design/methodology/approach:* To achieve this goal, the corresponding spectral problem solution is given. The method of solution is based on the electromagnetic field representation as the expansion in vector spherical wave functions.

*Findings:* The dependences of the first eigenfrequencies of a spherical particle on the relative permittivity  $\epsilon_1$  and relative permeability  $\mu_1$ , which real and imaginary parts can take both positive and negative values, are calculated. The eigenmodes are divided into two families: internal and external eigenmodes. The internal eigenmodes in each of the quadrants of plane ( $\mu_1, \epsilon_1$ ) have an independent classification based on the structure of eigenmodes. Unlike internal eigenmodes, external eigenmodes have a single classification in plane ( $\mu_1, \epsilon_1$ ). By their structure, external eigenmodes have the form of surface plasmon eigenmodes, which are distributed in the vicinity of a particle surface or outside it. In the first quadrant of plane ( $\mu_1, \epsilon_1$ ), they repeatedly interact with internal eigenmodes that leads either to a hybridization of eigenmodes or to an exchange of types of eigenmodes. In the third quadrant of plane ( $\mu_1, \epsilon_1$ ), the external eigenmodes can interact with each other. The anomalous behavior of the spectral characteristics of a spherical particle corresponds to the phenomenon of inter-type coupling of eigenmodes, being previously known and well described in the scientific literature. *Conclusions:* The results of the studies made it possible to establish new patterns of behavior of the spectral characteristics of a spherical particle with arbitrary values of its permittivity and permeability.

*Key words:* spherical particle, dielectric ball, metamaterial, eigenfrequencies, eigenmodes

Ю. В. Свищов

Інститут радіофізики та електроніки  
ім. О. Я. Усикова НАН України,  
вул. Акад. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ПОВЕДІНКИ  
ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ТИПУ  
СФЕРИЧНОЇ ЧАСТИНКИ З ДОВІЛЬНИМИ  
ЗНАЧЕННЯМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ

*Предмет і мета роботи:* Розглядається поведінка спектральних характеристик (власних частот, власних коливань, добротностей власних коливань) сферичної частинки з довільними значеннями діелектричної і магнітної проникностей. Метою цієї роботи є вивчення деяких важливих закономірностей поведінки спектральних характеристик частинки як з позитивними, так і негативними значеннями реальних та уявних частин матеріальних параметрів. Акцент робиться на коливаннях електричного типу.

*Методи і методологія:* Для досягнення поставленої мети наведено рішення відповідної спектральної задачі. Метод вирішення ґрунтується на поданні електромагнітного поля у вигляді розкладання векторними сферичними хвильовими функціями.

*Результати:* Виконано розрахунок залежностей перших власних частот сферичної частинки від відносної діелектричної  $\epsilon_1$  і відносної магнітної  $\mu_1$  проникностей, реальні та уявні частини якої можуть набувати як позитивних, так і негативних значень. Коливання діляться на два сімейства: внутрішні і зовнішні коливання. Внутрішні коливання у кожному з квадрантів площини  $(\mu_1, \epsilon_1)$  мають незалежну класифікацію, що ґрунтується на структурі коливань. На відміну від внутрішніх коливань, зовнішні коливання мають єдину класифікацію у площини  $(\mu_1, \epsilon_1)$ . За своєю структурою зовнішні коливання мають вигляд поверхневих плазмонних коливань, які розподілені в околиці поверхні частинки або поза нею. У першому квадранті площини  $(\mu_1, \epsilon_1)$  вони багаторазово вступають у взаємодію з внутрішніми коливаннями, що призводить або до гібридизації коливань, або

до обміну типами коливань. У третьому квадранті площини  $(\mu_1, \epsilon_1)$  зовнішні коливання можуть вступати у взаємодію один з одним. Аномальна поведінка спектральних характеристик сферичної частинки відповідає відомому раніше і добре описаному в науковій літературі явищу міжтипного зв'язку коливань.

*Висновок:* Результати виконаних досліджень дозволили встановити нові закономірності поведінки спектральних характеристик сферичної частинки з довільними значеннями її діелектричної та магнітної проникностей.

*Ключові слова:* сферична частинка, діелектрична куля, метаматеріал, власні частоти, власні коливання

*Статья поступила в редакцию 23.03.2020*