

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra27.01.005>

УДК 537.874.6

PACS number: 07.05.Tr

М. Є. КАЛІБЕРДА<sup>1,2</sup>, Л. М. ЛИТВИНЕНКО<sup>1,2</sup>, С. О. ПОГАРСЬКИЙ<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

<sup>2</sup> Радіоастрономічний інститут НАН України

вул. Мистецтв, 4, м. Харків, 61002, Україна

E-mail: KaliberdaME@gmail.com; Sergey.A.Pogarsky@univer.kharkov.ua

## ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД В ЗАДАЧІ ПРО ДИФРАКЦІЮ ХВИЛЬ КРУГЛОГО ХВИЛЕВОДУ НА АКсіАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ НЕОДНОРІДНОСТЯХ

**Предмет і мета роботи.** Розглядається задача про дифракцію хвиль  $H_{1n}$ - і  $E_{1n}$ - типу круглого хвилеводу на скінченній і напівнескінченній послідовності ідентичних неоднорідностей. Розглянуто чотири типи неоднорідностей: кругла діафрагма, диск, кільце і кільцева щілина. Відстань між неоднорідностями передбачається однаковою. Хвилевід заповнено діелектриком з втратами.

**Методи і методологія.** Для розв'язання задачі обрано операторний метод. Так звана ключова задача, задача дифракції на поодинокій неоднорідності, розв'язується методом часткових областей у поєднанні з методом моментів. Поле в області перешкоди представляється у вигляді розкладення у ряд за власними хвилями нескінченного хвилеводу, поперечний переріз якого співпадає с перерізом неоднорідності, з невідомими амплітудами. Для знаходження амплітуд отримано нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь, яка розв'язувалася методом редукції. В результаті отримано оператори проходження та відбиття ключової задачі. Властивості скінченної послідовності визначено з операторних рівнянь відносно амплітуд розсіяного поля. Для запису цих рівнянь використовувалася ітераційна процедура, згідно з якою властивості структури, яка складається з  $N$  неоднорідностей, знайдено у припущенні, що властивості структури, яка складається з  $(N - 1)$ -і неоднорідності, відомі. Оператор відбиття напівнескінченної системи знайдено з відомого нелінійного операторного рівняння другого роду.

**Результати.** Отримано системи лінійних алгебричних рівнянь для кожної поодинокій неоднорідності. Наведено операторні рівняння відносно амплітуд розсіяних полів для скінченної системи. За допомогою побудованої моделі досліджено залежності коефіцієнтів проходження, відбиття хвилі  $H_{11}$ , а також коефіцієнтів перетворення хвилі  $H_{11}$  у хвилю  $E_{11}$  круглого хвилеводу від хвильового числа, геометричних та матеріальних параметрів для скінченної та напівнескінченної структур. Проведено порівняння результатів, отриманих наведеним методом, з результатами, отриманими в HFSS.

**Висновок.** З використанням операторного методу побудовано модель розсіяння власних хвиль типу  $H_{1n}$ - і  $E_{1n}$ - на системі аксіально-симетричних неоднорідностей нульової товщини у круглому хвилеводі. Проведено дослідження характеристик розсіяння від параметрів. Співпадіння поведінки кривих, отриманих наведеним методом, з отриманими в HFSS підтверджують достовірність представлених результатів. Результати можуть використовуватися при створенні низки пристроїв НВЧ та оптичного діапазону.

**Ключові слова:** круглий хвилевід, кругла діафрагма, диск, кільце, щілина, операторний метод.

### 1. Вступ

Круглий хвилевід з аксіально-симетричними неоднорідностями є елементом фільтрів, антенних систем, лазерів [1–3].

Метод сіток запропоновано у [4] для аналізу аксіально-симетричних оптичних хвилеводів. З використанням методу сіток у [5] система концентричних кілець розглядалася як фокусуєчий елемент лазера.

Цит у а н н я: Каліберда М. Є., Литвиненко Л. М., Погарський С. О. Операторний метод в задачі про дифракцію хвиль круглого хвилеводу на аксіально-симетричних неоднорідностях. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2022. Т 27. № 1. С. 5—16. <https://doi.org/10.15407/rpra27.01.005>

© Publisher PH «Akademperiodyka» of the NAS of Ukraine, 2022. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

У [6] за допомогою методу часткових областей у поєднанні з методом моментів отримано розв'язок задачі про дифракцію хвиль двох неспіввісних круглих хвилеводів, з'єднаних за допомогою круглої діафрагми нульової товщини. Числові результати отримано для двох однакових співвісних хвилеводів. Поле в області діафрагми розкладалося за власними хвилями круглого хвилеводу, який мав радіус, рівний радіусу діафрагми. У [7] розглядається кругова діафрагма скінченної товщини. Метод часткових областей використовувався у [8] для аналізу фільтра на основі круглого хвилеводу з двома круглими діафрагмами. Для збудження використовувався прямокутний хвилевід, з'єднаний з круглим за допомогою прямокутної діафрагми. Розв'язок задачі про дифракцію на зміщеній відносно осі хвилеводу діафрагмі скінченної товщини отримано в [9]. Система круглих діафрагм скінченної товщини розглядалася в [10] за допомогою інтегральних рівнянь. Система, яка складається з однакових або різних за висотою прямокутних гофр, аналізувалася в [11, 12].

У випадку, якщо розв'язок задачі для поодинокій неоднорідності відомий, для отримання розв'язку для скінченної або напівнескінченної системи неоднорідностей досить ефективним є застосування операторного методу. Операторний метод використовувався для дослідження напівскінченної системи діафрагм скінченної товщини у випадку  $H_{0p}$ -хвиль у [13]. Скінченна та напівнескінченна системи щілин у внутрішньому порожньому провіднику коаксіального хвилеводу розглядалися з використанням операторного методу у [14–16], а прямокутні гофри у круглому хвилеводі — у [17]. У роботах [13–17] для отримання операторів проходження та відбиття поодинокій неоднорідності використовувалася процедура методу часткових областей у поєднанні з методом моментів або з методом лишків.

У даній роботі з використанням операторного методу розглянуто задачі про дифракцію на скінченній та напівнескінченній системах аксіальних круглих діафрагм, дисків, кілець та кільцевих щілин у круглому хвилеводі. Оператори розсіяння поодинокій неоднорідності отримані методом часткових областей у поєднанні з методом моментів. Важливо, що у роботах [13–15, 17] операторні рівняння записані для скінченної системи неоднорідностей в цілому. Ці оператор-

ні рівняння дозволяють отримати не лише поле, яке пройшло, або відбите поле, але й поле між неоднорідностями. У цій же роботі ми будемо використовувати ітераційну процедуру запису операторних рівнянь. У випадку, якщо цікавить лише поле, яке пройшло, та відбите поле (коефіцієнти проходження та відбиття), такий підхід виявляється найбільш ефективним з точки зору використання комп'ютерної пам'яті та часу обчислень. При цьому підході не треба розв'язувати систему лінійних алгебричних рівнянь, записану для всієї структури в цілому, а треба кілька разів послідовно розв'язати систему рівнянь меншої розмірності. Кількість цих систем дорівнює кількості неоднорідностей.

## 2. Постановка задачі

Розглянемо дифракцію власних хвиль  $H_{1m}$ - і  $E_{1m}$ -типу круглого хвилеводу радіусом  $a$ , які падають з області  $z < 0$  на систему аксіально-симетричних неоднорідностей. Хвилевід заповнено діелектриком з діелектричною проникністю  $\epsilon_0 \epsilon$ , де  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ ,  $\epsilon_0$  — діелектрична проникність вакууму. Передбачається, що діелектрик має невеликі втрати,  $\epsilon'' \ll 1$ . Розглянемо чотири типи неоднорідностей: кругла діафрагма радіусом  $a_1$ , диск радіусом  $a_1$ , кільце з більшим та меншим радіусами  $a_2$  і  $a_1$ , кільцева щілина з більшим та меншим радіусами  $a_2$  і  $a_1$ . Неоднорідності розташовані співвісно з хвилеводом, мають нульову товщину. Стінки хвилеводу та неоднорідності є ідеально провідними. Залежність полів від часу приймемо у вигляді  $\exp(-i\omega t)$ , де  $\omega$  — кругова частота, і будемо опускати. Хвильове число у вакуумі позначимо як  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , де  $\mu_0$  — магнітна проникність вакууму.

При використанні операторного методу спочатку необхідно отримати розв'язок «ключової задачі» — задачі дифракції на поодинокій неоднорідності. Геометрія чотирьох поодиноких неоднорідностей наведена на рис. 1. Після цього мають бути розв'язані операторні рівняння, які в даній задачі є матричними, для скінченної та напівнескінченної систем неоднорідностей.

## 3. Розв'язання задачі

### 3.1. Поодинокі неоднорідності

Припустимо, що на поодинокій неоднорідності, яка розташована в площині  $z = 0$ , з області

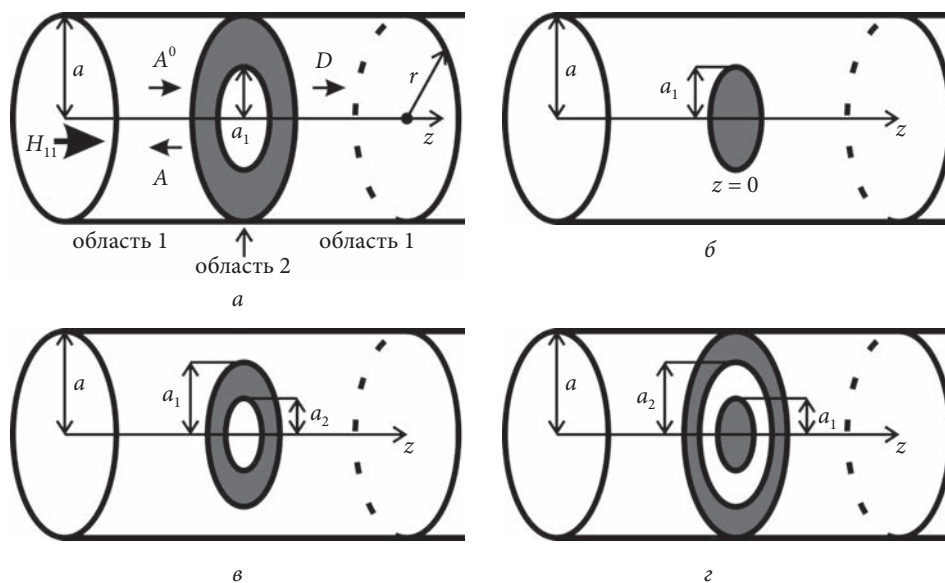


Рис. 1. Геометрія поодинокі неоднорідності:  $a$  — кругла діафрагма;  $b$  — диск;  $v$  — кільце;  $z$  — кільцева щілина

$z < 0$  набігають хвилі  $H_{1m}$ - і  $E_{1m}$ -типу круглого хвилеводу. Вектор амплітуд падаючої хвилі позначимо як  $A^0 = (A_m^{0,H}, A_m^{0,E})_{m=1}^\infty$ . Верхній індекс  $H$  або  $E$  відповідає хвилям  $H_{1m}$ - або  $E_{1m}$ - типу. Вектор амплітуд відбитих хвиль в область  $z < 0$  та хвиль, які пройшли в область  $z > 0$ , позначимо як  $A = (A_m^H, A_m^E)_{m=1}^\infty$  і  $D = (D_m^H, D_m^E)_{m=1}^\infty$ . Область хвилеводу радіусом  $a$  позначимо як область 1. Область неоднорідності при  $z = 0$  позначимо як область 2.

Поперечні компоненти електричного поля можна представити за допомогою скалярних потенціалів у вигляді [18]

$$\vec{E}_{\tau,j} = \sum_{n=1}^{\infty} (\vec{e}_{j,n}^H(r, \varphi) V_{j,n}^H(z) + \vec{e}_{j,n}^E(r, \varphi) V_{j,n}^E(z)), \quad (1)$$

де  $\vec{e}_{j,n}^H(r, \varphi) = z \times \nabla_{\tau} \psi_{j,n}^H$ ,  $\vec{e}_{j,n}^E(r, \varphi) = -\nabla_{\tau} \psi_{j,n}^E$  — базисні вектор-функції;  $\psi_{j,n}^H, \psi_{j,n}^E$  — скалярні потенціали, які відповідають  $H_{1n}$ - і  $E_{1n}$ - хвилям;  $j = 1, 2$  — номер області;  $\nabla_{\tau}$  — градієнт за поперечними координатами  $(r, \varphi)$ ;  $V_{j,n}^H(0), V_{j,n}^E(0)$  — амплітуди, які у випадку падаючого поля вважаються заданими, а у випадку розсіяного поля є невідомими;  $(r, \varphi)$  — координати полярної системи координат. Інші компоненти електричного або магнітного поля можуть бути знайдені з рівнянь Максвелла. Вираз, аналогіч-

ний (1), можна записати і для поперечних компонентів магнітного поля, взявши у якості базисних вектор-функцій

$$\vec{h}_m^H = [\vec{z}; \vec{e}_m^H], \quad \vec{h}_m^E = [\vec{z}; \vec{e}_m^E], \quad (2)$$

де  $\vec{z}$  — орт осі  $Oz$ ,  $[\cdot; \cdot]$  — векторний добуток.

Запишемо скалярні потенціали і функції  $V_{j,n}^H(z), V_{j,n}^E(z)$  для кожної з областей і для кожної неоднорідності у явному вигляді.

Введемо позначення:  $\gamma_n^H = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu'_n}{k\sqrt{\varepsilon}a}\right)^2}$ ,  
 $\gamma_n^E = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_n}{k\sqrt{\varepsilon}a}\right)^2}$ ,  $\text{Re } \gamma \geq 0, \text{ Im } \gamma \geq 0$ ,

$$G^H(x, r) = \frac{J_1(xr)}{J_1(xa)} - \frac{Y_1(xr)}{Y_1(xa)}, \quad (3)$$

$$G^E(x, r) = \frac{J_1(xr)}{J_1(xa)} - \frac{Y_1(xr)}{Y_1(xa)}, \quad (4)$$

$J_1(x), Y_1(x)$  — функції Бесселя і Неймана індексу 1,  $\mu_n, \mu'_n, \eta_n, \eta'_n$  —  $n$ -й корінь рівнянь  $J_1(x) = 0, J'_1(x) = 0, G_1^E(x, a_1) = 0, (G_1^H(x, r))'_{r=a_1} = 0$  відповідно.

Маємо наступні вирази. Для круглого хвилеводу радіусом  $a$  (область 1):

$$\psi_{1,n}^H = J_1\left(\frac{\mu'_n}{a} r\right) \cos(\varphi),$$

$$\psi_{1,n}^E = J_1\left(\frac{\mu_n}{a} r\right) \sin(\varphi),$$

$$V_{1,n}^{H,E}(z) = A_n^{H,E} \exp(-ik\sqrt{\varepsilon}\gamma_n^H z) + A_n^{H,E,0} \exp(ik\sqrt{\varepsilon}\gamma_n^{H,E} z), \quad z < 0, \quad (5)$$

$$V_{1,n}^{H,E}(z) = D_n^{H,E} \exp(ik\sqrt{\varepsilon}\gamma_n^{H,E} z), \quad z > 0. \quad (6)$$

У (5), (6) і надалі необхідно вибрати лише один верхній індекс  $H$  або  $E$ . Позначення « $H, E$ » введено для стислості.

Для неоднорідності у вигляді круглої діафрагми, диска та кільцевої щілини (область 2) при  $z = 0$  амплітуди позначимо як

$$V_{2,n}^{H,E} = B_n^{H,E}. \quad (7)$$

У зв'язку з тим, що у випадку кільця область поза металом не є однозв'язною, цей випадок необхідно розглянути окремо від інших неоднорідностей. У цьому випадку амплітуди позначимо як

$$V_{2,n}^{H,E} = B_n^{H,E}, \quad \text{при } 0 < r < a_1, \quad (8)$$

$$V_{2,n}^{H,E} = C_n^{H,E}, \quad \text{при } a_2 < r < a. \quad (9)$$

Скалярні потенціали мають вигляд:

- для круглої діафрагми —

$$\psi_{2,n}^H = J_1\left(\frac{\mu'_n}{a_1} r\right) \cos(\varphi), \quad (10)$$

$$\psi_{2,n}^E = J_1\left(\frac{\mu_n}{a_1} r\right) \sin(\varphi); \quad (11)$$

- для диска —

$$\psi_{2,n}^H = G^H(\eta'_n, r) \cos(\varphi), \quad (12)$$

$$\psi_{2,n}^E = G^E(\eta_n, r) \sin(\varphi); \quad (13)$$

- для кільця маємо вирази (10), (11) при  $0 \leq r < a_1$  і вирази (12), (13) при  $a_2 < r < a$ , але у (3), (4) замість  $a$  необхідно підставити  $a_2$ ;

- для щілини маємо вирази (12), (13), але у (3), (4) замість  $a$  необхідно підставити  $a_2$ .

З граничних умов випливають наступні рівняння:

$$\vec{H}_\tau(z \rightarrow -0) = \vec{H}_\tau(z \rightarrow +0), \quad (r, \varphi) \in S, \quad (14)$$

$$\vec{E}_{\tau,1}(z \rightarrow -0) = \begin{cases} \vec{E}_{\tau,2}, & (r, \varphi) \in S, \\ 0, & (r, \varphi) \in S_a / S, \end{cases} \quad (15)$$

$$\vec{E}_{\tau,1}(z \rightarrow +0) = \begin{cases} \vec{E}_{\tau,2}, & (r, \varphi) \in S, \\ 0, & (r, \varphi) \in S_a / S, \end{cases} \quad (16)$$

де  $\vec{E}_{\tau,2}$  — поперечні компоненти електричного поля на неоднорідності;  $S_a = \{0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  — поперечний переріз круглого хвилеводу;  $S$  — область, яка не зайнята металом при  $z = 0$ .

Введемо скалярний добуток за формулою

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{B}^* ds, \quad (17)$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_a = \iint_{S_a} \vec{A} \cdot \vec{B}^* ds. \quad (18)$$

Спочатку розглянемо або круглу діафрагму, або диск, або круглу щілину.

Використовуючи (1), (7) та ідею методу моментів, розкладемо електричне поле на неоднорідності у ряд за власними хвилями (базисними функціями) нескінченного хвилеводу, поперечний переріз якого співпадає з поперечним перерізом неоднорідності  $\{\vec{e}_{2,k}^H, \vec{e}_{2,k}^E\}_{k=1}^\infty$ ,

$$\vec{E}_{\tau,2} = \sum_{k=1}^\infty B_k^H \vec{e}_{2,k}^H + \sum_{k=1}^\infty B_k^E \vec{e}_{2,k}^E. \quad (19)$$

Взявши скалярний добуток (18) виразів (15) або (16) з власною хвилею з номером  $n$  круглого хвилеводу, враховуючи, що дотичні компоненти електричного поля на ідеальному провіднику дорівнюють нулю, використовуючи (5), (6), отримуємо

$$A_n^{H,E} = \frac{\langle \vec{E}_{\tau,2}, \vec{e}_{1,n}^{H,E} \rangle}{\langle \vec{e}_{1,n}^{H,E}, \vec{e}_{1,n}^{H,E} \rangle_a} - A_n^{0,H,E}, \quad (20)$$

$$D_n^{H,E} = \frac{\langle \vec{E}_{\tau,2}, \vec{e}_{1,n}^{H,E} \rangle}{\langle \vec{e}_{1,n}^{H,E}, \vec{e}_{1,n}^{H,E} \rangle_a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Використовуючи зв'язок між електричним і магнітним полем та (2), помножимо векторно рівняння (14) на  $\vec{z}$ . В отриманий вираз підставимо (19), (20), (21) та помножимо скалярно на базисні функції. Маючи на увазі ортогональність базисних функцій, в результаті отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих амплітуд поля на неоднорідності:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} B_k^H \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^H, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^E \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^E, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle = \\ & = \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{0,\Theta} \eta_n^{\Theta} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (22) \end{aligned}$$

яку можна розв'язати методом редукції. У (22) провідність  $\eta_n^H = \gamma_n^H / Z_0$ ,  $\eta_n^E = 1 / (\gamma_n^E Z_0)$ , хвильовий опір вакууму  $Z_0 = 120\pi$  Ом.

Розглянемо випадок кільця. Представимо скалярний добуток по двозв'язній області інтегрування (17) у вигляді суми інтегралів по кожній однозв'язній області,

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{a1} + \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{a2}, \\ \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{ai} &= \iint_{S_{ai}} \vec{A} \cdot \vec{B}^* ds, \end{aligned}$$

де  $S_{a1} = \{0 \leq r \leq a_1; 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ ,  $S_{a2} = \{a_2 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ .

Виконуючи ті ж самі дії, що і при записі системи (22), використовуючи (8), (9), отримуємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} B_k^H \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^H, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_{a1}}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{ai} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^E \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^E, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_{a1}}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{ai} \\ & \sum_{k=1}^{\infty} C_k^H \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^H, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_{a2}}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{ai} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^E \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^{\Theta} \frac{\langle \vec{e}_{2,k}^E, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_{a2}}{\langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{1,n}^{\Theta} \rangle_a} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{ai} = \\ & = \sum_{\Theta=H,E} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{0,\Theta} \eta_n^{\Theta} \langle \vec{e}_{1,n}^{\Theta}, \vec{e}_{2,m}^{H,E} \rangle_{ai}, \quad i = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots, \quad (23) \end{aligned}$$

Скалярні добутки у (22), (23) можуть бути обчислені аналітично і виражені через функції Бесселя. Явні вирази наведено, наприклад, у [7], [15], [17] для круглої діафрагми та у [15] для диска. Скалярний добуток для кільця може бути записано явно з використанням отриманих виразів для діафрагми і для диска.

Амплітуди поля, яке пройшло, та відбитого поля можна знайти з (20), (21), підставивши вираз для  $\vec{E}_{\tau,2}$  через амплітуди поля на неоднорідності (19). Використовуючи розв'язок систем рівнянь (22) чи (23), а також представлення для поля (1), (5), (6), введемо матричні оператори проходження  $t_1$  та відбиття  $r_1$  поодинокі неоднорідності за формулами

$$D = t_1 A^0,$$

$$A = r_1 A^0.$$

### 3.2. Система неоднорідностей

Розглянемо скінченну систему еквідистантно розташованих однакових неоднорідностей. Відстані між неоднорідностями або період позначимо як  $L$ . Оператори проходження і відбиття системи з  $N$  неоднорідностей позначимо як  $t_N$  і  $r_N$ .

Для отримання операторів розсіяння системи, яка складається з  $N$  неоднорідностей, будемо використовувати ітераційну процедуру. Будемо вважати оператори розсіяння системи, яка складається з  $(N-1)$ -ї неоднорідності, відомими. Позначимо вектор амплітуд падаючої хвилі як  $q$ , відбитої хвилі як  $A$ , хвилі, яка пройшла, як  $D$ , а хвиль між  $(N-1)$ -ю та  $N$ -ю неоднорідностями як  $B_{N-1}$  і  $C_{N-1}$  (див. рис. 2). Вони пов'язані наступними операторними рівняннями:

$$A = t_{N-1} e C + r_{N-1} q, \quad (24)$$

$$A = r_N q, \quad (25)$$

$$D = t_1 e B, \quad (26)$$

$$D = t_N q, \quad (27)$$

$$B = r_{N-1} e C + t_{N-1} q, \quad (28)$$

$$C = r_1 e B, \quad (29)$$

де оператор  $e$  має діагональну матрицю та визначає перетворення комплексних амплітуд поля при



зсуві системи координат на величину  $L$  вздовж осі  $Oz$  у напрямку розповсюдження хвилі.

Знайдемо  $B, C$  з (28), (29) і підставимо у (24), (26). Підставимо (25) у (24), а (27) у (26). Маючи на увазі, що власні функції, які відповідають  $H_{1n}$ - і  $E_{1n}$ - хвилям, утворюють базис, послідовно

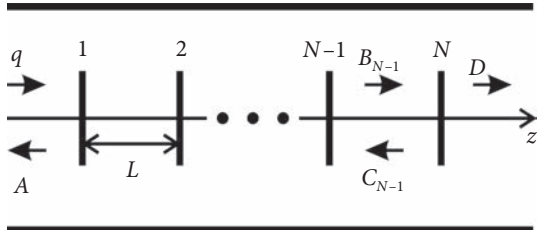


Рис. 2. Скінченна система неоднорідностей

підставимо замість однієї з компонент вектора  $q$  одиницю, а замість всіх інших компонент нуль. Остаточно отримаємо вирази для знаходження невідомих операторів проходження та відбиття системи, яка складається з  $N$  неоднорідностей:

$$t_N = t_1 e(I - r_{N-1} e r_1 e)^{-1} t_{N-1},$$

$$r_N = r_{N-1} + t_{N-1} e r_1 e (I - r_{N-1} e r_1 e)^{-1} t_{N-1},$$

де  $I$  — одиничний оператор.

Оператор відбиття напівнескінченної системи може бути знайдений з операторного рівняння другого роду [19]

$$r = r_1 + t_1 (I - e r e r_1)^{-1} e r e t_1.$$

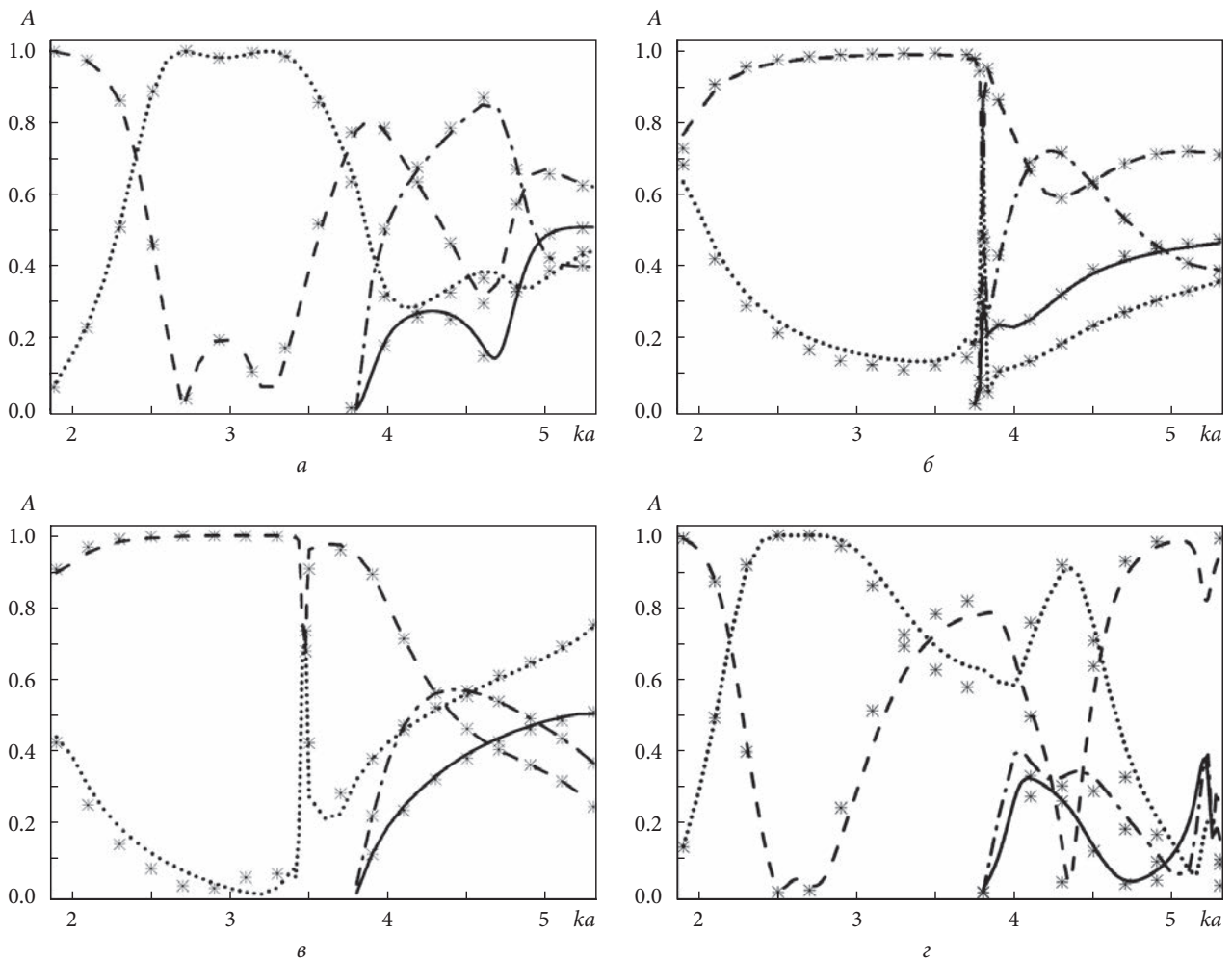


Рис. 3. Залежність амплітуди  $A$  коефіцієнта відбиття (пунктирні криві), проходження (точки) хвилі  $H_{11}$ , коефіцієнта перетворення хвилі  $H_{11}$  у хвилю  $E_{11}$  в області  $z < 0$  (штрихпунктирні криві) та в області  $z > 0$  (суцільні криві) від хвильового числа при  $\epsilon = 1$  для  $N = 2$  неоднорідностей: а — кругла діафрагма,  $a_1/a = 0.6$ ; б — диск,  $a_1/a = 0.6$ ; в — кільце,  $a_2/a = 0.3$ ,  $a_2/a = 0.6$ ; г — щілина,  $a_2/a = 0.3$ ,  $a_2/a = 0.6$ . Для порівняння маркерами наведено результати, отримані в HFSS

### 3. Числові результати

За допомогою побудованої моделі дослідимо залежності характеристик розсіяння від хвильового числа, геометричних та матеріальних параметрів. Будемо припускати, що на систему неоднорідностей набігає хвиля  $H_{11}$  круглого хвилеводу.

Для підтвердження вірності побудованої моделі спочатку проведемо порівняння результатів, отриманих запропонованим методом, з результатами, отриманими в комерційному пакеті HFSS. На рис. 3 представлено залежності коефіцієнта проходження, відбиття хвилі  $H_{11}$ , а також коефіцієнти перетворення хвилі  $H_{11}$  у хвилю  $E_{11}$  за амплітудою від хвильового числа. При  $\mu'_1 < ka < \mu_1$  хвилевід працює у однододовому режимі. При збільшенні частоти, при  $ka > \mu_1$  можливе також поширення  $E_{11}$  хвилі круглого хвилеводу. Частина енергії хвилі  $H_{11}$  перетворюється у енергію хвилі  $E_{11}$ , яка поширюється у бік менших та більших значень  $z$ .

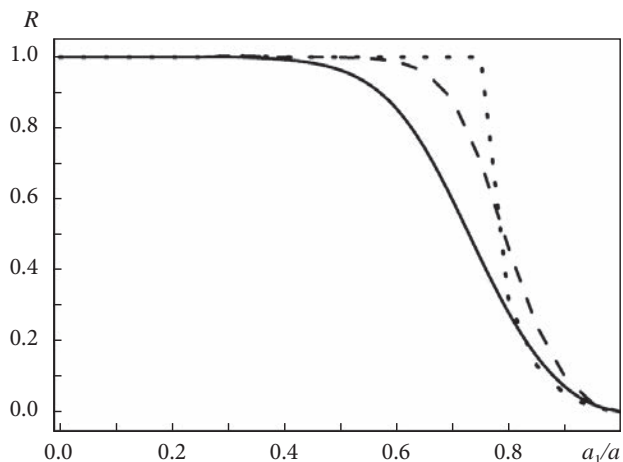


Рис. 4. Залежність коефіцієнта відбиття хвилі  $H_{11}$  від меншого радіуса  $a_1$  для поодинокі круглої діафрагми  $N=1$  (суцільна крива), двох круглих діафрагм  $N=2$  (пунктирна крива), напівнескінченної системи круглих діафрагм (точки) при  $ka=2$ ,  $\epsilon=1$ ,  $L/a=1$

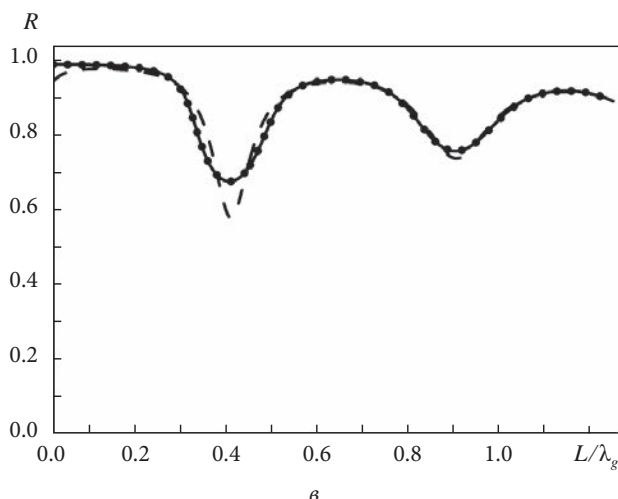
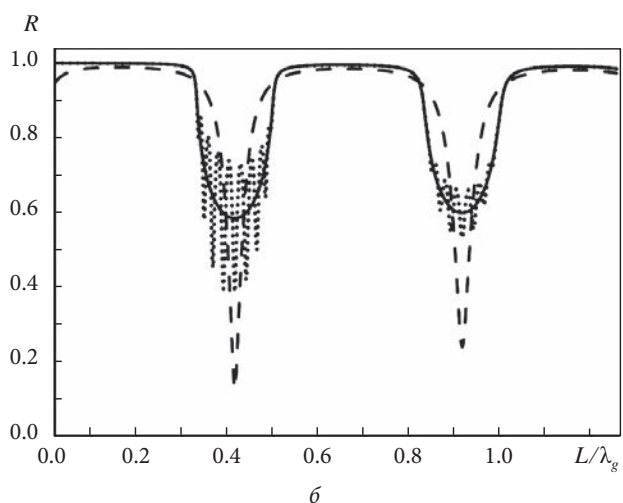
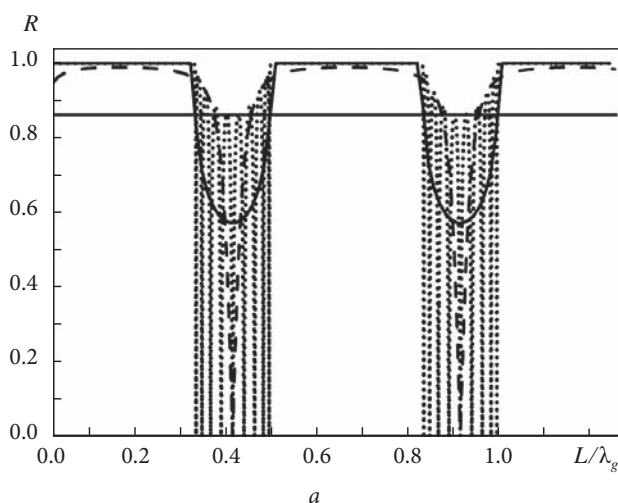
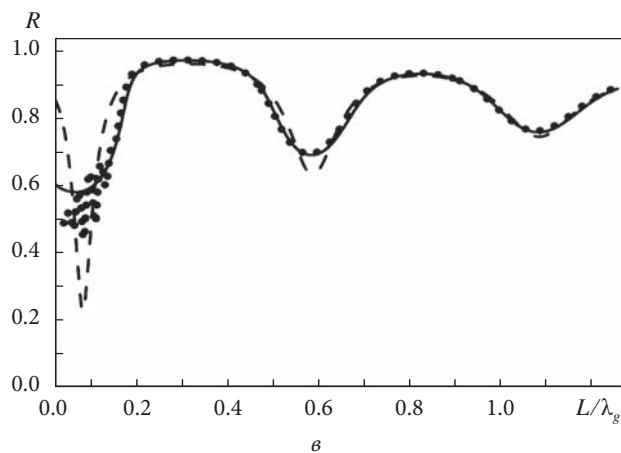
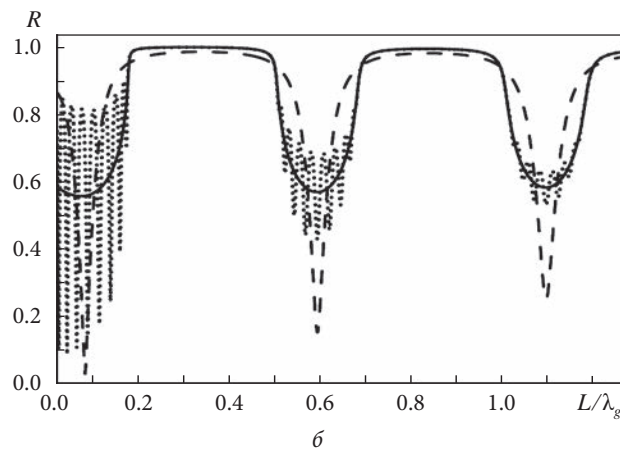
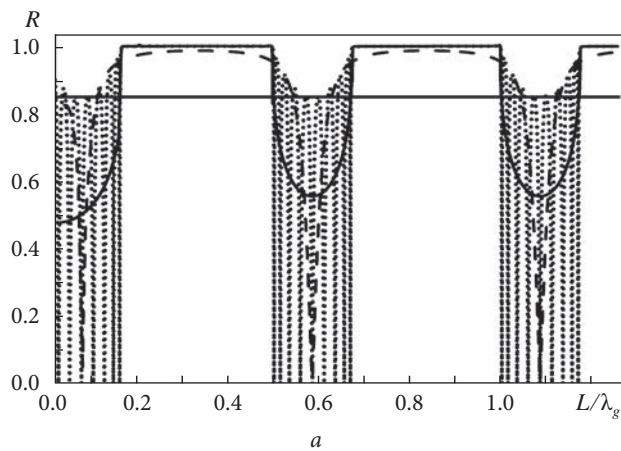
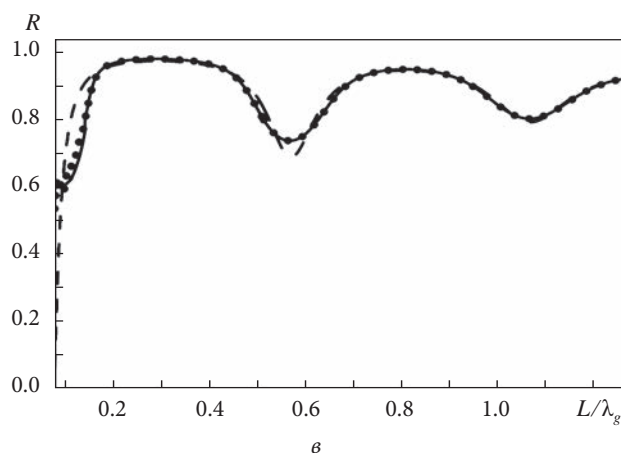
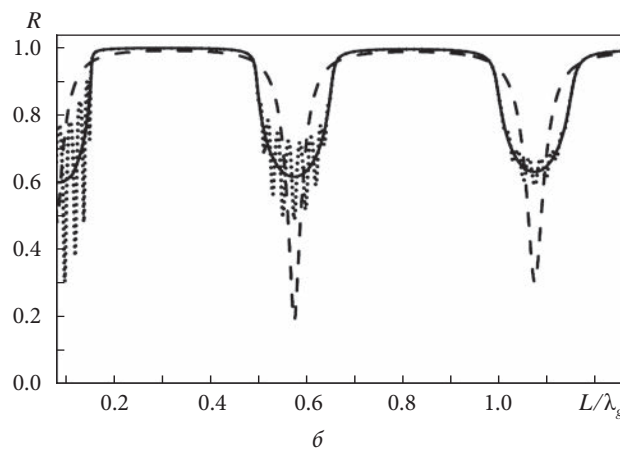
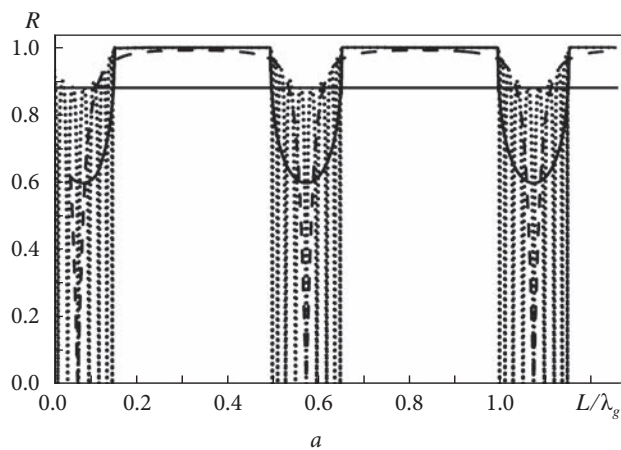


Рис. 5. Залежність коефіцієнта відбиття хвилі  $H_{11}$  від відстані між неоднорідностями для двох  $N=2$  (пунктирні криві), десяти  $N=10$  (криві з точок) та напівнескінченної системи (суцільні криві) круглих діафрагм при  $ka\sqrt{\epsilon'}=2$ ,  $\epsilon'=4$ ,  $a_1/a=0.6$ . Горизонтальною лінією відмічено значення коефіцієнта відбиття поодинокі діафрагми:  $a - \epsilon''=0$ , діелектрик без втрат;  $b - \epsilon''=0.01$ ;  $c - \epsilon''=0.1$

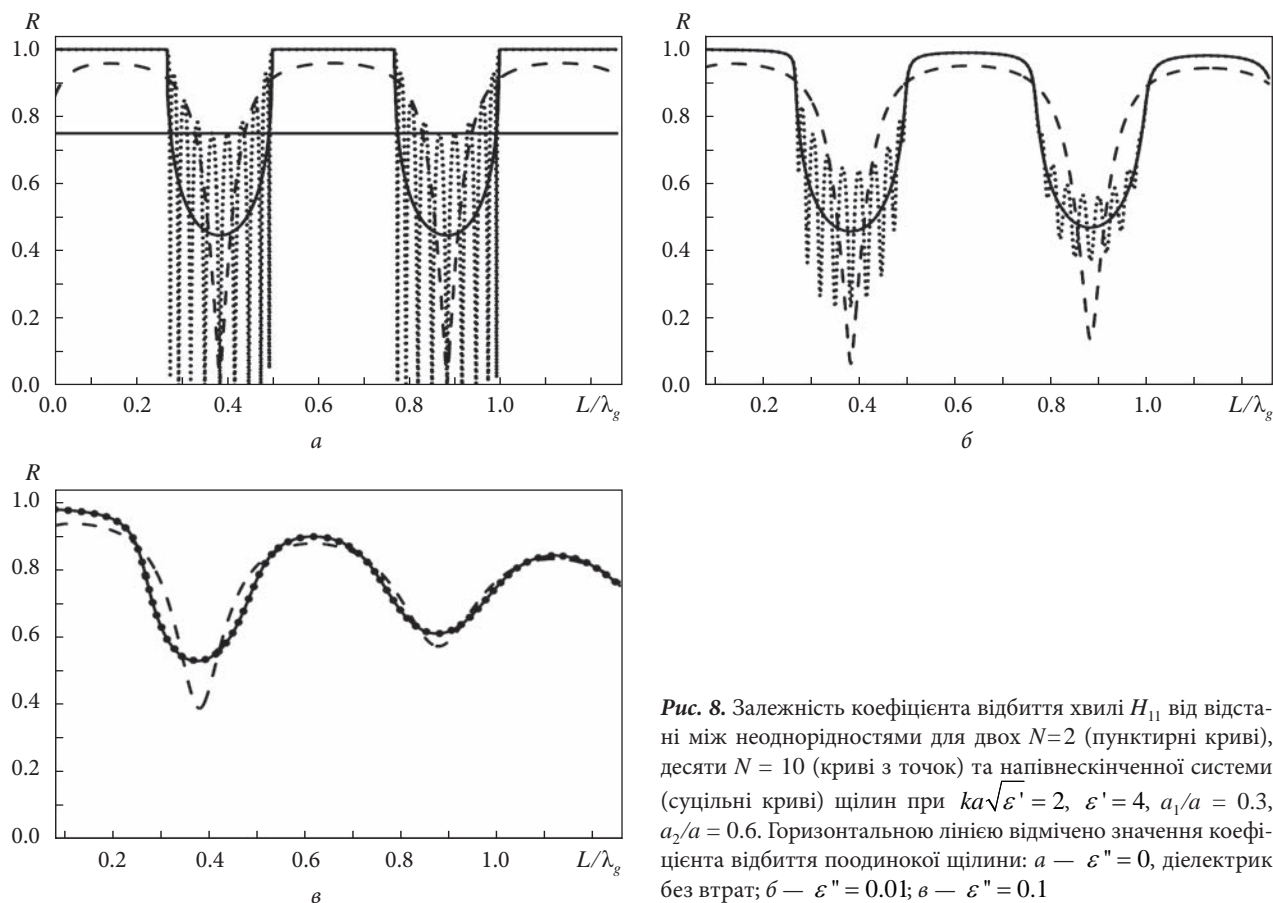


**Рис. 6.** Залежність коефіцієнта відбиття хвилі  $H_{11}$  від відстані між неоднорідностями для двох  $N=2$  (пунктирні криві), десяти  $N=10$  (криві з точок) та напівнескінченної системи (суцільні криві) дисків при  $ka\sqrt{\varepsilon'} = 2$ ,  $\varepsilon' = 4$ ,  $a_1/a = 0.6$ . Горизонтальною лінією відмічено значення коефіцієнта відбиття поодинокого диску:  $a - \varepsilon'' = 0$ , діелектрик без втрат;  $b - \varepsilon'' = 0.01$ ;  $c - \varepsilon'' = 0.1$



**Рис. 7.** Залежність коефіцієнта відбиття хвилі  $H_{11}$  від відстані між неоднорідностями для двох  $N=2$  (пунктирні криві), десяти  $N=10$  (криві з точок) та напівнескінченної системи (суцільні криві) кільця при  $ka\sqrt{\varepsilon'} = 2$ ,  $\varepsilon' = 4$ ,  $a_1/a = 0.3$ ,  $a_2/a = 0.6$ . Горизонтальною лінією відмічено значення коефіцієнта відбиття поодинокого кільця:  $a - \varepsilon'' = 0$ , діелектрик без втрат;  $b - \varepsilon'' = 0.01$ ;  $c - \varepsilon'' = 0.1$





**Рис. 8.** Залежність коефіцієнта відбиття хвилі  $H_{11}$  від відстані між неоднорідностями для двох  $N=2$  (пунктирні криві), десяти  $N = 10$  (криві з точок) та напівнескінченної системи (суцільні криві) щілин при  $ka\sqrt{\varepsilon'} = 2$ ,  $\varepsilon' = 4$ ,  $a_1/a = 0.3$ ,  $a_2/a = 0.6$ . Горизонтальною лінією відмічено значення коефіцієнта відбиття поодинокій щілини:  $a$  —  $\varepsilon'' = 0$ , діелектрик без втрат;  $b$  —  $\varepsilon'' = 0.01$ ;  $v$  —  $\varepsilon'' = 0.1$

Характер поведінки кривих, отриманих запропонованим методом, співпадає з характером поведінки кривих, отриманих за допомогою HFSS, що підтверджує правильність результатів. У розрахунках було враховано всі хвилі, що поширюються у хвилеводі, і дві затухаючі хвилі.

На рис. 4 наведено залежності коефіцієнта відбиття від радіуса діафрагми для  $N = 1$ ,  $N = 2$  і напівнескінченної системи. Для розглянутого значення частоти круглий хвилевід працює у одномодовому режимі. Криві мають монотонний характер, спадаючи від  $R = 1$  при повністю заповненій області неоднорідності металом,  $a_1 = 0$ , до  $R = 0$  при відсутній діафрагмі,  $a_1 = a$ , де  $R$  — коефіцієнт відбиття. У випадку напівнескінченної структури спостерігається повне відбиття,  $R = 1$ , приблизно до значення  $a_1 / a \approx 0.75$ .

На рис. 5—8 наведено залежності коефіцієнта відбиття структур, які складаються з  $N = 2$ ,  $N = 10$  і напівнескінченної системи однакових неоднорідностей, від періоду  $L$ . Передбачається, що хвилевід заповнено діелектриком з  $\varepsilon' = 4$ .

Криві побудовано для різних значень втрат у діелектрику  $\varepsilon''$ . Залежності мають практично періодичний характер з періодом  $L / \lambda_g = 0.5$ , де  $\lambda_g$  — довжина хвилевідної хвилі  $H_{11}$ -типу. При відносно малих значеннях періоду присутні невеликі відхилення від періодичності, які викликані впливом затухаючих хвилевідних хвиль. Спостерігається наявність ярко виражених зон запирання. У зонах запирання при відсутності втрат коефіцієнт відбиття напівнескінченної структури дорівнює 1. У зонах прозорості спостерігаються осциляції. Кількість мінімумів коефіцієнта відбиття на одиницю менша, ніж кількість неоднорідностей на кожному періоді. При збільшенні числа неоднорідностей коефіцієнт відбиття для скінченної структури наближається до коефіцієнта відбиття для напівнескінченної структури у зонах запирання. Криві для скінченної структури наближаються до кривих для напівнескінченної структури при збільшенні значення втрат також і у зонах прозорості. Залежності для напівнескінченної структури є граничним випадком для за-

лежностей для скінченної структури. У зоні запирання значення коефіцієнта відбиття для  $N = 10$  неоднорідностей і для напівнескінченної системи співпадають з графічною точністю. У випадку кільця та диска зони запирання з'являються при майже однакових значеннях періоду. Проте у випадку кільця їх ширина перевищує ширину у всіх інших розглянутих випадках. Для щілини ширина зони запирання найменша.

## Висновки

З використанням операторного методу побудовано модель розсіяння власних хвиль типу

$H_{1m}$  і  $E_{1m}$  на системі аксіально-симетричних неоднорідностей нульової товщини у круглому хвилеводі. Розв'язок ключової задачі отримано методом часткових областей у поєднанні з методом моментів. Розглянуто чотири типи неоднорідностей: круга діафрагма, диск, кільце і кільцева щілина.

Проведено дослідження залежності коефіцієнтів відбиття, проходження та перетворення хвилі  $H_{11}$  у хвилю  $E_{11}$  від хвильового числа та геометричних параметрів. Отримані результати можуть використовуватися при створенні низки пристроїв НВЧ та оптичного діапазону.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Degtyarev A. V., Dubinin M. M., Gurin O. V., Maslov V. A., Muntean K. I., Ryabyh V. N., Senyuta V. S. Control of tightly focused laser beams in the THz range // *Microwave and Optical Technology Letters*. 2021. Vol. 63, No.11. P. 2888-2892. DOI: 10.1002/mop.32946
2. Furlan W. D., Ferrando V., Monsoriu J. A., Zagrajek P., Czerwinska E., Szustakowski M. 3D printed diffractive terahertz lenses // *Optics Letters*. 2016. Vol. 41, No. 8. P. 1748. DOI:10.1364/ol.41.001748
3. Wilk R., Vieweg N., Kopschinski O., Koch M. Liquid crystal based electrically switchable Bragg structure for THz waves // *Optics Express*. 2009. Vol. 17, No. 9. P. 7377-7382. DOI: 10.1364/OE.17.007377
4. Lu Y.-C., Yang L., Huang W.-P., Jian S.-S. Improved full-vector finite-difference complex mode solver for optical waveguides of circular symmetry // *Journal of Lightwave Technology*. 2008. Vol. 26, No. 13. P. 1868-1876. DOI: 10.1109/JLT.2007.913605
5. Dzyubenko M. I., Maslov V. A., Odarenko E. N., Radionov V. P. Modelling of output mirrors based on circular gradient structures for THz lasers // *Quantum Electronics*. 2019. Vol. 49, No. 5. P. 512-513. DOI:10.1070/qel16915
6. Scharstein R.W., Adams A.T. Galerkin solution for the thin circular iris in a  $TE_{11}$ -mode circular waveguide // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1988, Vol. 36. No. 1. P. 106-113.
7. Scharstein R.W., Adams A.T. Thick circular iris in a  $TE_{11}$  circular waveguide // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1988. Vol. 36, No. 11. P. 1529-1531.
8. Balaji U. Design of resonant iris filter with dielectric filled cavities // 2011 IEEE Long Island Systems, Applications and Technology Conference. 6 May 2011, Farmingdale, NY, USA. P. 12036481. DOI: 10.1109/LISAT.2011.5784223
9. Shen Z., MacPhie R.H. Scattering by a thick off-centered circular iris in circular waveguide // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1995. Vol. 43, No. 11, P. 2639-2642.
10. Christie V.L., Kumar L., Balakrishnan N. Analysis of propagation characteristics of circular corrugated waveguides using coupled integral equation technique // *Electromagnetics*. 2007. Vol. 27, No. 4. P. 229-240. DOI:10.1080/02726340701272162
11. Kesari V., Jain P. K., Basu B. N. Analysis of a disc-loaded circular waveguide for interaction impedance of a gyrotron amplifier // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2005. Vol. 26, No. 8. P. 1093-1110. DOI: 10.1007/s10762-005-7270-9
12. Kesari V., Keshari J. P. Propagation characteristics of a variant of disc-loaded circular waveguide // *Progress in Electromagnetics Research M*. 2012. Vol. 26. P. 23-37.
13. Pogarsky S. A., Chumachenko V. A. Wave diffraction by bounded periodical structures with axial symmetry // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2001. Vol. 22, No. 11. P. 1623-1631. DOI:10.1023/a:1015052313977
14. Калиберда М.Е., Литвиненко Л.Н., Погарский С.А. Дифракция волн типа  $H_{om}$  и  $E_{om}$  на системе аксиально-симметричных неоднородностей в коаксиальном тракте // *Радиотехника и электроника*. 2010. Т. 55, № 5. С. 539-545.
15. Lytvynenko L. M., Kaliberda M. E., Pogarsky S. A. Solution of waves transformation problem in axially symmetric structures // *Frequenz*. 2012. Vol. 66, No. 1-2. P. 17-25. DOI: 10.1515/FREQ.2012.012
16. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. Н., Погарский С. А. Параллельный генетический алгоритм в задаче оптимизации параметров фильтра на основе коаксиального волновода с системой щелей в полом внутреннем проводнике // *Радиофизика и радиоастрономия*. 2012. Т. 17, № 4. С. 362-368.
17. Калиберда М. Е., Погарский С. А., Белоусов В. А. Операторный метод в задаче излучения из открытого конца круглого гофрированного волновода // *Радиофизика и радиоастрономия*. 2012. Т. 17, № 1. С. 74-80.
18. Marcuvitz N. *Waveguide Handbook*, R. L. Series Vol. 10. New York McGraw-Hill, 1951. 426 p.
19. Литвиненко Л. М., Резник І. І., Литвиненко Д. Л. Дифракція хвиль на напівнескінченних періодичних структурах. *Доповіді АН Української РСР*. 1991. № 6. С. 62-66.

Стаття надійшла до редакції 15.12.2021

## REFERENCES

1. DEGTYAREV, A. V., DUBININ, M. M., GURIN, O. V., MASLOV, V. A., MUNTEAN, K. I., RYABYH, V. N., SENYUTA, V. S., 2021. Control of tightly focused laser beams in the THz range. *Microwave and Optical Technology Letters*. vol. 63, no.11. pp. 2888-2892. DOI: 10.1002/mop.32946
2. FURLAN, W. D., FERRANDO, V., MONSORIU, J. A., ZAGRAJEK, P., CZERWINSKA, E., SZUSTAKOWSKI, M., 2016. 3D printed diffractive terahertz lenses. *Optics Letters*. vol. 41, no.8. pp. 1748. DOI:10.1364/ol.41.001748
3. WILK, R., VIEWEG, N., KOPCHINSKI, O., KOCH, M., 2009. Liquid crystal based electrically switchable Bragg structure for THz waves. *Optics Express*. vol. 17, no. 9. pp. 7377-7382. DOI: 10.1364/OE.17.007377
4. LU, Y.-C., YANG, L., HUANG, W.-P., JIAN, S.-S., 2008. Improved full-vector finite-difference complex mode solver for optical waveguides of circular symmetry. *Journal of Lightwave Technology*. vol. 26, no. 13. pp. 1868-1876. DOI: 10.1109/JLT.2007.913605
5. DZYUBENKO, M. I., MASLOV, V. A., ODARENKO, E. N., RADIONOV, V. P., 2019. Modelling of output mirrors based on circular gradient structures for THz lasers. *Quantum Electronics*. vol. 49, no.5. pp. 512-513. DOI:10.1070/qel16915
6. SCHARSTEIN, R.W., ADAMS, A.T., 1998. Galerkin solution for the thin circular iris in a TE<sub>11</sub>-mode circular waveguide. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. vol. 36, no. 1. pp. 106-113.
7. SCHARSTEIN, R.W., ADAMS, A.T., 1988. Thick circular iris in a TE<sub>11</sub> circular waveguide. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. vol. 36, no.11. pp. 1529-1531.
8. BALAJI, U., 2011. Design of resonant iris filter with dielectric filled cavities. 2011 IEEE Long Island Systems, Applications and Technology Conference. 6 May 2011, Farmingdale, NY, USA. pp. 12036481. DOI: 10.1109/LISAT.2011.5784223
9. SHEN, Z., MACPHIE, R.H., 1995. Scattering by a thick off-centered circular iris in circular waveguide. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. vol. 43, no. 11. pp. 2639- 2642.
10. CHRISTIE, V.L., KUMAR, L., BALAKRISHNAN, N., 2007. Analysis of propagation characteristics of circular corrugated waveguides using coupled integral equation technique. *Electromagnetics*. vol. 27, no.4. pp. 229-240. DOI:10.1080/02726340701272162
11. KESARI, V., JAIN, P. K., BASU, B. N., 2005. Analysis of a disc-loaded circular waveguide for interaction impedance of a gyrotron amplifier. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. vol. 26, no. 8. pp. 1093-1110. DOI: 10.1007/s10762-005-7270-9
12. KESARI, V., KESHARI, J. P., 2012. Propagation characteristics of a variant of disc-loaded circular waveguide. *Progress in Electromagnetics Research M*. vol. 26. pp. 23-37.
13. POGARSKY, S. A., CHUMACHENKO, V. A., 2001. Wave diffraction by bounded periodical structures with axial symmetry. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. vol. 22, no. 11. pp. 1623-1631. DOI:10.1023/a:1015052313977
14. KALIBERDA, M. E., LITVINENKO, L. N., POGARSKY, S. A., 2010. Diffraction of H<sub>0m</sub> and E<sub>0m</sub> modes by a system of axially symmetric discontinuities in a coaxial circuit. *Journal of Communications Technology and Electronics*. vol. 55, no. 5. pp. 505-511. DOI: 10.1134/S1064226910050037.
15. LYTVYENENKO, L. M., KALIBERDA, M. E., POGARSKY, S. A., 2012. Solution of waves transformation problem in axially symmetric structures. *Frequenz*. vol. 66, no. 1-2. pp. 17-25. DOI: 10.1515/FREQ.2012.012
16. KALIBERDA, M. E., LYTVYENENKO, L. M., POGARSKY, S. A., 2012. Parallel genetic algorithm in the optimization problem of filter parameters based on coaxial waveguide with the system of slots in a hollow inner conductor. *Radio Physics and Radio Astronomy*. vol. 17, no. 4. pp. 362-368.
17. KALIBERDA, M. E., POGARSKY, S. A., BELOUSOV, V. A., 2012. Operator method in the problem of radiation from an open end of a circular corrugated waveguide. *Radio Physics and Radio Astronomy*. vol. 3, no. 3. pp. 259-264. DOI: 10.1615/RadioPhysicsRadioAstronomy.v3.i3.90
18. Marcuvitz, N., 1951. *Waveguide Handbook*, R. L. Series Vol. 10. New York, McGraw-Hill. 426 p.
19. LYTVYENENKO, L. M., REZNIK, I. I., LYTVYENENKO, D. L., 1991. Waves Diffraction on the Semiinfinite Periodical Structures. *Proc. of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*. no. 6, pp. 62-66 (in Ukrainian).

Received 15.12.2021

M.E. Kaliberda<sup>1,2</sup>, L.M. Lytvynenko<sup>1,2</sup>, S.A. Pogarsky<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> V. N. Karazin Kharkiv National University,  
4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

<sup>2</sup> Institute of Radio Astronomy of the NASU,  
4, Mystetstv St., Kharkiv, 61002, Ukraine

E-mail: KaliberdaME@gmail.com; Sergey.A.Pogarsky@univer.kharkov.ua

#### OPERATOR METHOD IN DIFFRACTION PROBLEM OF WAVES OF CIRCULAR WAVEGUIDE BY THE ANNULAR DISCONTINUITIES

**Purpose.** Diffraction problem of the  $H_{11}$  and  $E_{11}$  waves of circular waveguide by the finite and semi-infinite system of similar discontinuities is considered. Four types of discontinuities are considered: iris, disk, ring, annular slot. The distance between irregularities is the same. The waveguide is filled by the dielectric with losses.

**Design/methodology/approach.** To solve the problem we chose the operator method. While so-called key problem, the diffraction problem by a single discontinuity, is solved by the method of moments. The field in the domain of the obstacle is represented as a series in terms of eigenwaves of infinite waveguide which cross section coincides with the cross section of discontinuity, with unknown amplitudes. To find the amplitudes we obtain the infinite system of equations, which is solved by the reduction. As a result, the transmission and reflection operators of a key-problem are obtained. The properties of finite sequence are determined from the operator equations relatively amplitudes of the scattered field. To write these equations the iterative procedure is used. The properties of the structure, which consists of  $N$  discontinuities are obtained under assumption that the properties of the structure, which consists of  $N-1$  discontinuity are known. The reflection operator of the semi-infinite system is obtained from known non-linear operator equation of the second kind.

**Findings.** The systems of equations for every single discontinuity are obtained. The operator equations relatively amplitudes of the scattered fields for finite system are presented. With the help of the created model the dependences of the transmission, reflection coefficients of the  $H_{11}$  wave as well as transformation coefficients of the  $H_{11}$  to  $E_{11}$  wave of the circular waveguide on the wavenumber, geometrical and material parameters for finite and semi-infinite structures are studied. The comparison of the results obtained by presented method with the results obtained in HFSS is made.

**Conclusions.** With the use of the operator method the scattering model of the  $H_{1n}$  and  $E_{1n}$  eigenwaves by the system of annular discontinuities of zero thickness in a circular waveguide is built. The study of the scattering characteristics on the parameters is made. The coincidence of the behavior of the curves obtained by the presented method with those obtained in HFSS allows us to draw a conclusion about the correctness of the results. The results can be used during creation of a series of the microwaves and optic devices.

**Keywords:** circular waveguide, circular iris, disc, ring, slot, operator method.