

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra27.01.017>  
УДК 534.015.1+621.385.6

**Ю.В. КОРНІЄНКО**, Л.В. СТУЛОВА, Д.С. МАСАЛОВ

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України  
12, вул. Акад. Проскури, Харків, 61085, Україна  
E-mail: milv@ire.kharkov.ua; mds@ire.kharkov.ua

## ВНУТРІШНІЙ НЕЛІНІЙНИЙ РЕЗОНАНС У КОЛИВАЛЬНІЙ СИСТЕМІ З ДВОМА СТЕПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

**Предмет і мета роботи.** Розглянуто поведінку нелінійної динамічної системи з двома степенями вільності, в якій уся нелінійність подана суто нелінійним зв'язком між степенями вільності. Метою роботи є вивчення можливості застосування методу Крилова, Боголюбова та Митропольського (КБМ) до системи у частинних похідних.

**Методи і методологія роботи.** Розгляд задачі виконується методом КБМ у першому наближенні. Потім отриманий результат досліджується чисельними методами.

**Результати роботи.** Було обрано і ретельно досліджено у першому наближенні методом КБМ електрично-механічну коливальну систему з двома степенями вільності з відомим параметричним резонансом. Одержано картину фазового простору системи. Отриманий розв'язок показує, як відбувається періодичне перекачування енергії від одного степеня вільності до іншого. Відмінність даної коливальної системи від інших схожих, розглянутих у літературі, полягає в тому, що контур збуджується параметрично під впливом не зовнішньої, а внутрішньої сили. У схожій системі, що складається з двох контурів, пов'язаних через діод, зв'язок містить лінійну складову. У досліджуваній системі зв'язок є суто нелінійним.

**Висновки.** Одержаний результат становить інтерес при дослідженні внутрішніх нелінійних резонансів між степенями вільності у коливальній системі з двома степенями вільності, в якій уся нелінійність подана суто нелінійним зв'язком між ними. Розглянута система може послужити тестовим прикладом при розробці програм, що реалізують метод КБМ у коливальній системі з багатьма степенями вільності та малою нелінійністю.

**Ключові слова:** нелінійна динамічна система з двома степенями вільності; внутрішній нелінійний резонанс; метод Крилова, Боголюбова і Митропольського; нелінійні коливання.

У багатьох задачах радіофізики та нелінійної оптики виникає необхідність знайти розв'язок хвильового рівняння зі слабкою нелінійністю. Інструментом, який найбільше підходить для цього, є метод Крилова, Боголюбова та Митропольського (КБМ) [1, 2]. Проблема полягає в тому, що цей метод вичерпно сформульовано лише для звичайних диференціальних рівнянь. Результати, отримані в роботах, присвячених поширенню цього методу на випадок хвильового

рівняння (наприклад, [3–5]), стосуються обмеженого класу задач і не дають достатніх можливостей для радіофізики та нелінійної оптики. З огляду на це постає потреба у подальших дослідженнях у цій галузі.

Як перший, найпростіший, крок у цьому напрямку, нами була обрана типова радіофізична задача про електромагнітні коливання в об'ємному резонаторі, заповненому діелектриком зі слабо нелінійною залежністю вектора електрич-

Ц и т у в а н н я: Корнієнко Ю.В., Стулова Л.В., Масалов Д.С. Внутрішній нелінійний резонанс у коливальній системі з двома степенями вільності. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2022. Т. 27. № 1. С. 17–25. <https://doi.org/10.15407/rpra27.01.017>

© Publisher PH «Akademperiodyka» of the NAS of Ukraine, 2022. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

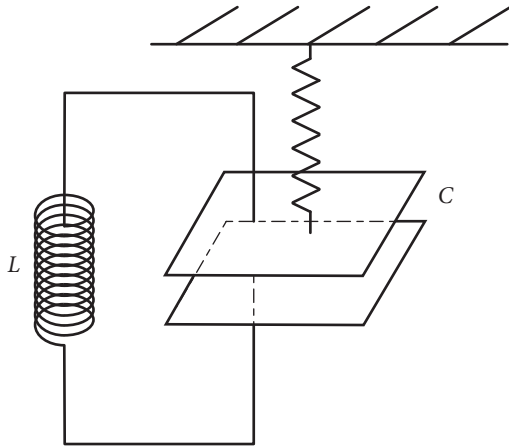


Рис. 1. Коливальна система з двох підсистем — електричної і механічної

ної поляризації від вектора напруженості електричного поля. Під час її розгляду відразу стало ясно, що вона потребує уважного ставлення до можливості нелінійних резонансів між різними модами, яких немає у лінійних коливальних системах. Ці резонанси мало чим відрізняються від таких самих резонансів у коливальних системах із кінцевим числом степенів вільності. Тому попереднє ознайомлення з цими резонансами зручніше виконувати на системах з невеликою числом степенів вільності (наприклад, яке дорівнює 2).

Інший бік питання пов'язаний зі ступенем складності методу КБМ. У більшості фізичних задач, за винятком задач спеціального характеру, для досягнення практично необхідної точності буває достатньо першого або другого наближення. У цих наближеннях метод КБМ є досить простим і не вимагає складних перетворень. Проте деякі випадки потребують розв'язку у більш високих наближеннях, і тоді виявляється, що складність обчислень у методі КБМ наростає з порядком наближення досить швидко. За теперішнього стану обчислювальної техніки це не створює великих проблем: виконання обчислень можна покласти на комп'ютер з використанням системи комп'ютерної алгебри.

У роботі [6] розглянуто створену фахівцями Інституту радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАНУ комп'ютерну програму в системі *MATHEMATICA* для розв'язання методом КБМ диференціального рівняння другого порядку з малою нелінійністю, яке обчислює коливання у сис-

темі з одним ступенем вільності. Ця програма дозволяє на сучасному персональному комп'ютері з частотою ядра більш ніж 2 ГГц, за прийнятний час (близько 10 хв) розв'язувати рівняння на зразок рівняння Ван дер Поля у дванадцятому наближенні і вище. Однак для подальшого прогресу є потреба у новій програмі з більшими можливостями, зокрема, яка зможе отримувати розв'язки для коливальних систем з багатьма степенями вільності у резонансному випадку.

Тестувати такі програми слід на прикладі систем рівнянь, які описують добре вивчені коливальні системи. Одну з таких коливальних систем, яку описано нижче, було обрано та ретельно досліджено у першому наближенні методом КБМ. Фізичні процеси у подібних системах досліджувалися давно [7–9], і нашою метою було дослідження не фізики процесів, а ступеня складності обчислень та ефективності методу. Однак у ході роботи над задачею ми виявили, що картина, яка відкрилася, може становити деякий самостійний інтерес для читачів-фізиків. Це і стало приводом для публікації даної статті.

## 1. Опис коливальної системи

Коливальна система  $S_1$ , що підлягає розгляду, складається з двох підсистем, слабо пов'язаних нелінійним зв'язком (рис. 1). Перша підсистема (електрична), являє собою звичайний коливальний контур, що складається з котушки індуктивності  $L$  та конденсатора змінної ємності  $C$ , частота власних коливань якого дорівнює  $\omega$ . Нижня пластина цього конденсатора жорстко закріплена, а верхня вільно підвішена на пружині та утворює разом з нею механічну коливальну систему з власною частотою  $2\omega$ . Це друга (механічна) підсистема розглянутої системи. Зв'язок між цими осциляторами виникає через механічну силу тяжіння верхньої пластини до нижньої, пропорційну квадрату електричної напруги між пластинами. Ця сила впливає на другу підсистему і, оскільки вона містить другу гармоніку, потрапляє у резонанс з другою підсистемою. Зворотний вплив другої підсистеми на першу пов'язаний з тим, що для розсування пластин конденсатора необхідно подолати силу тяжіння і тим самим виконати роботу, яка збільшує енергію електричних коливань.

Втрати у системі відсутні, тому повна енергія коливань у системі не змінюється з часом.

Схожі коливальні системи було розглянуто давно (наприклад, [10–12]), і фізичні процеси в них добре вивчені. Проте докладного розгляду саме такої системи знайти у літературі не вдалося, і це виправдовує дану роботу.

## 2. Вихідні рівняння

Нехай  $u$  — миттєва напруга на конденсаторі у момент часу  $t$ ,  $w$  — висота верхньої пластини конденсатора над станом рівноваги в той самий момент часу,  $\omega$  — власна частота контуру при нульовому значенні зміщення,  $h$  — відстань між пластинами у стані рівноваги,  $S$  — площа пластин конденсатора,  $m$  — маса верхньої пластини конденсатора та

$$k = \frac{S}{2\pi h^2 m^2}, \quad \nu = \frac{\omega^2 w}{h}. \quad (1)$$

Тоді коливання у цій системі описуються системою рівнянь

$$\ddot{u} + \omega^2 \left(1 + \frac{\nu}{\omega^2}\right) u = 0; \quad (2)$$

$$\ddot{v} + 4\omega^2 v = -k u^2, \quad (3)$$

де крапка означає диференціювання за часом  $t$ . Ця система є нелінійною через наявність у ній членів  $uv$  та  $ku^2$ . При малих  $u$  і  $v$ , тобто при малих амплітудах напруги та малих зміщеннях пластин, нелінійні члени будуть малі порівняно з лінійними, і систему для подальшого розгляду зручно перетворити таким чином. Замінюємо  $u$  і  $v$  на  $\varepsilon u$  і  $\varepsilon v$  відповідно, переносимо нелінійний член у (2) до правої частини, а після скорочення двох рівнянь на  $\varepsilon$  отримуємо

$$\ddot{u} + \omega^2 u = -\varepsilon uv; \quad (4)$$

$$\ddot{v} + 4\omega^2 v = -\varepsilon k u^2, \quad (5)$$

де  $\varepsilon$  — малий параметр, за яким будемо шукати асимптотику розв'язку до заданого порядку включно. У якому сенсі розглядається малість параметра  $\varepsilon$  пояснюється у [6].

## 3. Постановка задачі

У загальному вигляді задача ставиться так: знайти асимптотичний розв'язок системи рівнянь (4), (5) в  $n$ -му наближенні за  $\varepsilon$  методом КБМ для

довільного  $n$ , значення якого практично обмежене тільки можливостями комп'ютера, який використовується для обчислень. У рамках цієї роботи ставиться задача пошуку тільки першого наближення, оскільки роботу передбачається виконувати «вручну». Потрібно отримати рівняння для амплітуд і фаз, які повільно змінюються, а потім чисельно проаналізувати результат на предмет узгодження його з фізичною картиною процесів, які відбуваються у системі.

## 4. Застосування методу КБМ

Відповідно до [1], подамо узагальнений розв'язок системи рівнянь (4), (5) у першому наближенні таким чином:

$$u(t) = a(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) + \dots; \quad (6)$$

$$v(t) = b(t) \cos(2\omega t + \psi(t)) + \dots, \quad (7)$$

де  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  — функції, що повільно змінюються; вони задовільняють рівнянням

$$\dot{a} = \varepsilon \mathbf{A}(a, b, \varphi, \psi); \quad (8)$$

$$\dot{b} = \varepsilon \mathbf{B}(a, b, \varphi, \psi); \quad (9)$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon \mathbf{C}(a, b, \varphi, \psi); \quad (10)$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon \mathbf{D}(a, b, \varphi, \psi). \quad (11)$$

Підставляючи (6), (7) до рівнянь (4), (5) та замінюючи кожного разу похідні від  $a$ ,  $b$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ , що виникають, за формулами (8)–(11), потім порівнюючи коефіцієнти у лівих та правих частинах при однакових степенях  $\varepsilon$ , отримуємо явні вирази для  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  та систему рівнянь (8)–(11) у явному вигляді:

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon b}{4\omega} \cos(\psi - 2\varphi); \quad (12)$$

$$\dot{\psi} = \frac{k \varepsilon a^2}{8\omega b} \cos(\psi - 2\varphi); \quad (13)$$

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon a b}{4\omega} \sin(\psi - 2\varphi); \quad (14)$$

$$\dot{b} = \frac{k \varepsilon a^2}{8\omega} \sin(\psi - 2\varphi). \quad (15)$$

Ця система рівнянь є зручним об'єктом для пошуку аналітичних розв'язків, якісного аналі-

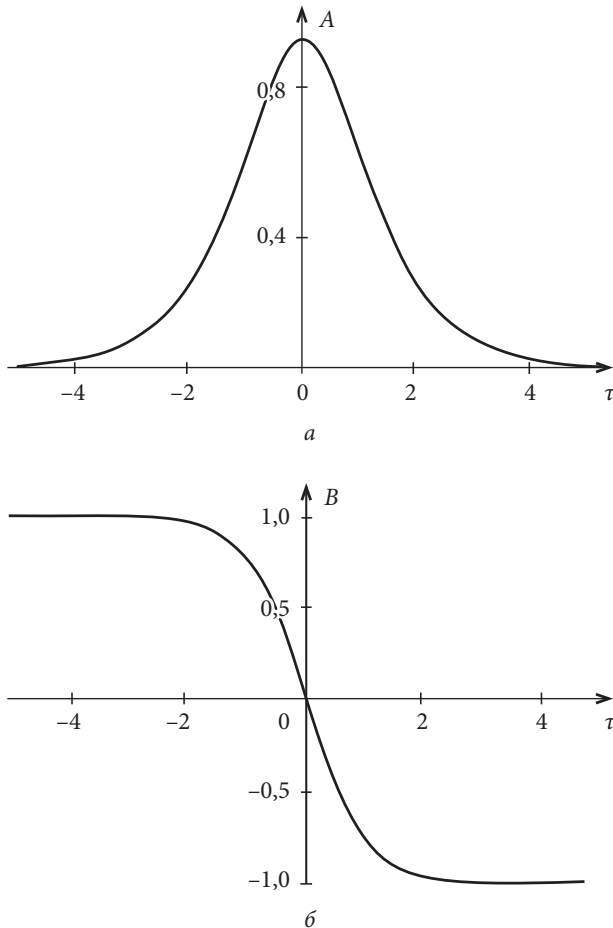


Рис. 2. Графіки амплітуди для електричної (а) та механічної (б) підсистем

зу та чисельного обчислювання. Щоб спростити розгляд системи, за допомогою заміни

$$A = \frac{\sqrt{k}}{4\omega^2 \sqrt{2}} a, \quad B = \frac{b}{4\omega^2}, \quad \tau = \varepsilon \omega t \quad (16)$$

запишемо її у вигляді

$$\varphi' = B \cos(\psi - 2\varphi); \quad (17)$$

$$\psi' = \frac{A^2}{B} \cos(\psi - 2\varphi); \quad (18)$$

$$A' = -A \cdot B \sin(\psi - 2\varphi); \quad (19)$$

$$B' = A^2 \sin(\psi - 2\varphi), \quad (20)$$

де штрих означає диференціювання за  $\tau$ , а амплітуди  $A$ ,  $B$  і час  $\tau$  перетворюються на безрозмірні величини.

### 5. Частинний розв'язок

Розглянемо один частинний розв'язок, який начисто ілюструє характер процесів, що відбуваються у досліджуваній динамічній системі. Нехай у деякий момент часу

$$\cos(\psi - 2\varphi) = 0. \quad (21)$$

Тоді похідні від  $\varphi$  і  $\psi$  дорівнюють нулю, і рівність (21) залишається чинною весь час. Тоді  $\sin(\psi - 2\varphi) \equiv 1$  або  $-1$  (ці випадки зводяться один до одного заміною  $\tau$  на  $-\tau$ ), і система (12)–(15) зводиться до вигляду

$$A' = -A \cdot B; \quad (22)$$

$$B' = A^2, \quad (23)$$

де  $A$  і  $B$  визначаються заміною (16), штрих означає диференціювання за  $\tau$ .

Ця система легко розв'язується у квадратурах, про що піде мова у розд. 6. Зауважимо, що коли ми помножимо (22) на  $A$  та (23) на  $B$ , а потім додамо отримані рівності, то дійдемо висновку, що величина

$$E = A^2 + B^2 \quad (24)$$

не змінюється з часом, що виражає закон збереження енергії у нашій коливальній системі. Тут перший доданок — енергія, яка запасена в контурі, а другий — та, що запасена у механічному осциляторі. Звідси можна зробити висновок, що еволюція системи полягає у перекачуванні енергії з однієї підсистеми в іншу. Як це відбувається, розглянемо далі.

### 6. Фізичний зміст отриманого розв'язку

Отже, з (22), (23) ми бачимо, що  $A(\tau)$  експоненціально збігається до нуля при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , функція має єдиний екстремум при  $\tau = 0$  і ніде на осі часу не змінює знака і не перетворюється на нуль. Також з (22), (23) видно, що  $B(\tau)$  є монотонною функцією, змінюється від 1 до  $-1$  на інтервалі  $\tau$  від  $-\infty$  до  $+\infty$  і перетворюється на нуль при  $\tau = 0$ . (Надалі будемо вважати  $\tau_0 = 0$ .)

Картина, яку описано тут і показано на рис. 2, має такий фізичний зміст. При великих від'ємних  $\tau$  вся енергія коливальної системи зосереджена у механічному осциляторі ( $A \rightarrow 0$ ). Стан системи з  $A = 0$ , як видно з рівняння (22), зберігатиметься

необмежено довго, проте є нестійким, і як завжди мало ненульове  $A$  згодом наростає. Так само при великих додатних  $\tau$  мало  $A$  згодом експоненціально спадає та наближається до нуля. Таким чином, при зміні  $\tau$  від  $-\infty$  до  $0$  відбувається перекачування енергії з механічного осцилятора до коливального контуру з відповідним збільшенням  $A$  і зменшенням  $B$ . За умови  $\tau = 0$   $A$  досягає максимуму, а  $B = 0$ , тобто вся енергія зосереджена у коливальному контурі. Надалі події розгортаються в зворотному порядку, і при  $\tau = +\infty$  вся енергія знову зосереджена в механічному осциляторі. Це є кінцевим станом системи. Він відрізняється від початкового стану при  $\tau = -\infty$  тільки різницею фаз коливань у підсистемах. За умови  $\tau = 0$  різниця фаз змінюється на  $\pi$ .

Неважко помітити, що тут ми маємо справу з добре відомим параметричним резонансом. Відмінність цієї коливальної системи від інших, розглянутих у літературі, полягає в тому, що контур збуджується параметрично під впливом не зовнішньої, а внутрішньої сили. Тому в випадку  $\tau = 0$ , коли енергія джерела вичерпується, параметричне розгойдування контуру припиняється і замінюється на параметричне гасіння електричних коливань.

Схожу систему, що складається з двох контурів, пов'язаних через діод, розглянуто, наприклад, у [12]. Однак у ній зв'язок містить лінійну складову. У нашій же системі зв'язок є суто нелінійним, тобто зникає при наближенні повної енергії коливань до нуля. Це має значення, якщо брати до уваги мету даної роботи, викладену в преамбулі.

## 7. Фазовий простір

У загальному випадку заміна змінних (16), доповнена рівністю

$$\Theta = \psi - 2\varphi,$$

перетворює систему рівнянь (17)–(20) на систему рівнянь

$$A' = -A \cdot B \sin \Theta; \tag{25}$$

$$B' = A^2 \sin \Theta; \tag{26}$$

$$\Theta' = \frac{A^2 - 2B^2}{B} \cos \Theta. \tag{27}$$

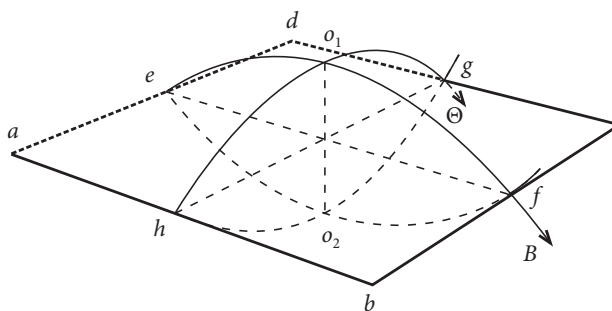


Рис. 3. Фазовий простір системи із зображеними в ньому сепаратрисами

Для неї залишається чинним закон збереження (24). Крім того, вона має масштабну симетрію: заміна  $A \rightarrow \lambda A$ ,  $B \rightarrow \lambda B$ ,  $\tau \rightarrow \tau / \lambda$  залишає цю систему незмінною. Тому при її розгляді обмежимося випадком  $E = 1$ . Оскільки до рівнянь (25)–(27) час явно не входить, система також однорідна за часом, тобто інваріантна щодо заміни  $\tau \rightarrow \tau + T$ .

Рівняння (26), (27) можна розглядати як рівняння руху нової динамічної системи  $S_2$  з одним степенем вільності та динамічними змінними  $B$  і  $\Theta$ . Поділивши (26) на (27), отримуємо рівняння фазових траєкторій цієї системи

$$\frac{dB}{d\Theta} = \frac{(1 - B^2)B}{1 - 3B^2} \operatorname{tg} \Theta. \tag{28}$$

Аналіз рівнянь (26)–(28) показує, що двовимірний фазовий простір динамічної системи  $S_2$  топологічно еквівалентний сфері (рис. 3), що складається з верхньої  $s_1$  і нижньої  $s_2$  півсфер, поділених екватором. Ці півсфери конгруентні, тому можна розглядати тільки одну з них, верхню. Відрізок  $eo_1f$  є координатною віссю  $B$ , на якій  $B$  змінюється від  $-1$  (у точці  $e$ ) до  $+1$  (у точці  $f$ ). Таку ж роль на півпросторі  $s_2$  грає відрізок  $eo_2f$ . Координатною віссю  $\Theta$  є контур  $o_1go_2ho_1$ , на якому  $\Theta$  проходить через значення відповідно  $0$  (верхня вісь  $B$ ),  $\pi/2$  (екватор),  $\pm\pi$  (нижня вісь  $B$ ),  $3\pi/2$  або  $-1/2\pi$  (екватор),  $2\pi$  (це значення еквівалентне значенню  $0$ ). Екватор складається з чотирьох відкритих відрізків ( $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  і  $da$ ) та чотирьох особливих точок рівноваги ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$ ). Кожен з цих відрізків є повною траєкторією, яку система проходить за час від  $\tau = -\infty$  до  $\tau = +\infty$ . Прикладом може служити траєкторія, розглянута в розд. 6. Система здійснює замкнутий виток

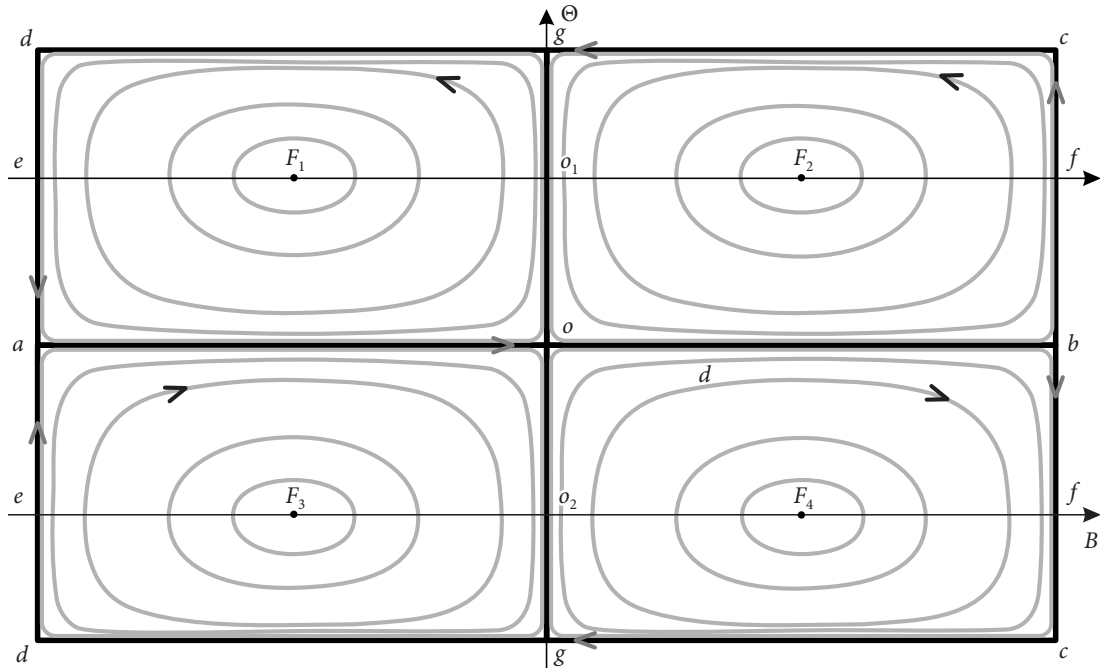


Рис. 4. Розворот фазового простору, який розрізано уздовж лінії  $abcd$

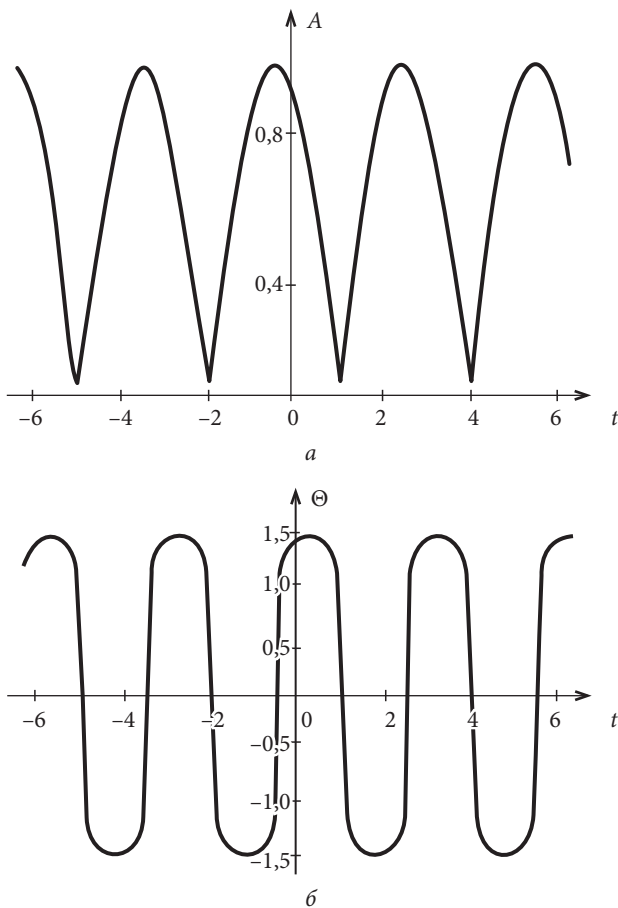


Рис. 5. Графіки зміни амплітуди  $A(t)$  (а) і фази  $\Theta(t)$  (б) при початкових значеннях  $A(0) = 0,9$ ,  $B(0) = \sqrt{0,19}$ ,  $\Theta(0) = \pi/2 - 0,1$

уздовж екватора за чотири нескінченних інтервали часу  $(-\infty, +\infty)$ .

Система  $S_2$  має також ще чотири точки рівноваги  $F_1, F_2, F_3, F_4$ . Це точки індиферентної рівноваги (фокуси), що оточені сімейством замкнутих траєкторій. Система за цими траєкторіями обертається проти годинникової стрілки навколо фокусів  $F_1, F_2$  (у верхньому півпросторі) та за годинниковою стрілкою навколо  $F_3, F_4$  (у нижньому півпросторі). У цьому ж напрямку відбувається рух системи вздовж сепаратрис  $abcd$ .

Контур  $o_1go_2ho_1$  є особливим: на ньому стикаються два протилежних пучки траєкторій. Стани, що зображуються точками цього контуру, є особливими, тому що в рівнянні руху (18)  $B$ , яке дорівнює нулю, входить до знаменника. Якщо дещо поступитися математичною строгістю, можна сказати, що на цьому контурі швидкість руху системи дорівнює нескінченності, і спроба привести систему до стану, що зображується точкою цього контуру, призводить до миттєвого переходу її у стан  $g$  або  $\eta$  (той, що є найближчим).

## 8. Осцилюючі розв'язки

Розв'язок для траєкторії  $cgd$ , розглянутий вище, не є випадково обраним частинним випадком. Він є граничним випадком цілого класу коливальних розв'язків, який ми зараз розглянемо.

Розгляд слід почати з малих коливань, що виникають в околі точок індиферентної рівноваги  $F_1, F_2, F_3, F_4$ . Мализна коливань дозволяє обмежити розгляд системи (25)–(27) лінійним наближенням. У цьому наближенні система (25)–(27) набуває вигляду

$$B' = -\frac{2}{3}\Theta;$$

$$\Theta' = 6B.$$

Її розв'язком є синусоїдальні коливання

$$B = C_1 \cos(2\tau), \quad \Theta = C_2 \sin(2\tau).$$

Система (26), (27) розв'язується аналітично. Поділивши (26) на (27), одержимо рівняння (28), що пов'язує  $B$  і  $\Theta$ . Розділивши змінні  $B$  і  $\Theta$ , отримуємо

$$\frac{1-3B^2}{1-B^2} \frac{dB}{B} = \operatorname{tg} \Theta d\Theta$$

або

$$\left(1 - \frac{2B^2}{1-B^2}\right) \frac{dB}{B} = \operatorname{tg} \Theta d\Theta,$$

звідки

$$\ln B + \ln(1-B^2) = -\ln \cos \Theta + \ln C$$

або

$$\frac{C}{\cos \Theta} = B(1-B^2).$$

При наближенні траєкторії до фокуса час  $\tau$  проходження системою замкнутого шляху наближається до  $2\pi$ . У міру віддалення траєкторії від фокуса цей час зростає і прямує до нескінченності, коли траєкторія наближається до сепаратриси  $abcd$ .

Залежність  $B$  і  $\Theta$  від часу  $\tau$  в цій області фазового простору показано на рис. 4, якщо дивитися з боку півсфери  $s_2$ .

## 9. Загальна картина поведінки коливальної системи

Миттєвий стан досліджуваної коливальної системи характеризується трьома змінними: амплі-

тудою електричних коливань, амплітудою механічних коливань і зсувом фаз між цими коливаннями. У разі рівності однієї з амплітуд нулю значення  $\Theta$  не визначається.

При нульовій енергії системи ( $E = 0$ ) обидві амплітуди тотожно дорівнюють нулю. Якщо у початковий момент часу  $A = 0$  (мають місце тільки механічні коливання), то такий стан системи за відсутністю зовнішніх впливів зберігається необмежено довго. Однак він є нестійким, і найменша зовнішня дія може вивести систему з цього стану. Коли вся енергія, навпаки, зосереджена у коливальному контурі, тобто  $A \neq 0, B = 0$ , розвиток подій залежить від значення  $C$ . Якщо  $\Theta = \pm \pi/2$ , воно зберігає це значення з часом, і відбувається монотонне перекачування енергії з коливального контуру до механічного осцилятора (швидкість цього перекачування пропорційна квадрату амплітуди коливань і наближається до 0 при наближенні амплітуди коливань до 0 — цим дана система відрізняється від систем з ненульовим коефіцієнтом зв'язку, як наприклад [12]), у результаті чого  $A \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \pm \infty$ . Якщо ж  $\Theta$  у початковий момент часу відмінне від  $\pm \pi/2$ , зменшення  $A$  до нуля відбувається за скінченний час, і починається стадія його зростання, у результаті чого розв'язок набуває періодичного характеру (рис. 5). Період цього процесу залежить від параметра  $C$ : при зменшенні  $C$  до нуля період зростає до нескінченності, і розв'язок стає неперіодичним — таким, як описано вище.

## Висновок

Зв'язок між різними степенями вільності коливальної системи має місце, наприклад, у випадку слабо пов'язаних коливальних контурів або резонаторів. Найчастіше доводиться зустрічатися з лінійним зв'язком, величина якого не залежить від амплітуди коливань. Досить часто спостерігаються випадки нелінійного зв'язку, величина якого залежить від амплітуди коливань. Приклад такої системи розглянуто в [11]. Найрідше зустрічаються системи з суто нелінійним зв'язком, який зникає, коли амплітуда коливань прямує до нуля. Приклад такої системи розглянуто в цій статті. Ця система має стати тестовим прикладом у розробці програм, що реалізують метод КБМ.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва: ГИФМЛ, 1958. 408 с.
2. Митропольский Ю.А. *Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах*. Киев: Изд-во АН УССР, 1955. 284 с.
3. Корнієнко Ю.В. Побудова асимптотичного розв'язку хвильового рівняння з малою нелінійністю для хвилевода. Представив акад. АН УРСР Ю.О. Митропольський. *Доповіді АН УРСР*. 1962. № 7. С. 845–850.
4. Митропольский Ю.А., Мосеєнков Б.И. *Асимптотические решения уравнений в частных производных*. Киев: Вища школа, 1976. 592 с.
5. Мосеєнков Б.И. *Наукові студентські праці Київського держ. ун-ту. Математика*. 1955. Т. 16. С. 49.
6. Корнієнко Ю.В., Масалов Д.С. Реализация метода Крылова—Боголюбова—Митропольского в системе компьютерной алгебры. *Физические основы приборостроения* (Россия). 2014. Т. 3, № 1. С. 70–83.
7. Манделъштам Л.И. *Полное собрание трудов*. Москва: Изд-во АН СССР, 1955. 512 с.
8. Горелик Г.С. *Колебания и волны*. Москва: Физматгиз, 1959.
9. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. Москва: Наука, 1981.
10. *Теория колебаний: Конспект лекций*. Под ред. Ю.М. Заболотнова. Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т. 1999. 68 с.
11. Алдошин Г.П., Яковлев С.П. Динамика качающейся пружины. *Вестн. СПбГУ. Сер. 1*, вып. 4. 2012. С. 45–52.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Введение в теорию колебаний и волн*. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с. URL: <http://www.iapras.ru/biblio/new/vvedtkv.pdf>
13. Корнієнко Ю.В., Стулова Л.В., Масалов Д.С. Внутренний нелинейный резонанс в колебательной системе с двумя степенями свободы. *Всероссийские открытые Армадовские чтения. Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн*: Материалы Всероссийской открытой науч. конф. Муром: Изд.-полиграф. центр МИ ВлГУ, 2019. С. 226–235. ISSN 2304-0297 (CD-ROM). URL: [http://www.mivlgu.ru/conf/armand2019/sbornik-2019/pdf/S2\\_16.pdf](http://www.mivlgu.ru/conf/armand2019/sbornik-2019/pdf/S2_16.pdf)

Стаття надійшла 29.07.2021

## REFERENCES

1. Bogolyubov, N.N., Mitropolskii, Yu.A., 1958. *Asymptotic Method in the Nonlinear Oscillation Theory*. Moscow: Main Publishing House of Physical and Mathematical Literature (in Russian).
2. Mitropolskii, Yu.A., 1955. *Non-Stationary Processes in Nonlinear Oscillation Systems*. Kyiv: Publishing House of Academy of Sciences of UkrSSR (in Russian).
3. Kornienko, Yu.V., 1962. Construction of an Asymptotic Solution for a Wave Equation with Nonlinearity for a Tube. The Paper was introduced by Academician Yu.A. Mitropolskij. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 7, pp. 845–850 (in Ukrainian).
4. Mitropolskii, Yu.A., Mosyeyenkov, B.I., 1976. *Asymptotic Solutions for Partial Differential Equations*. Kyiv: Vyssha Shkola Publ. (in Russian).
5. Mosyeyenkov, B.I., 1955. *Scientific Students Works of Kyiv State University. Mathematics*, 16, p. 49 (in Ukrainian).
6. Kornienko, Yu.V., Masalov, D.S., 2014. Realization of the Krylov-Bogolyubov-Mitropolskii Method in Computer Algebra System. *Physical Bases of Instrumentation (Russia)*, 3(1), pp. 70–83 (in Russian).
7. Mandelshtam, L.I., 1955. *Complete Collection of Works*. Moscow: Publishing House of Academy Sciences of USSR (in Russian).
8. Gorelik, G.S., 1959. *Oscillations and Waves*. Moscow: State Publishing House of Physics and Mathematics (in Russian).
9. Andronov, A.A., Vitt, A.A., Khaikin, S.Ye., 1981. *The Oscillation Theory*. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
10. Zabolotnov, Yu.M. ed., 1999. *The Oscillation Theory: Lecture Notes*. Samara: Samara State Aerospace University Publ. (in Russian).
11. Aldoshin, G.P., Yakovlev, S.P., 2012. Oscillating Spring Dynamics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 4, pp. 45–52 (in Russian).
12. Rabinovich, M.I., Trubetskov, D.I., 2000. *Introduction to the Theory of Oscillations and Waves* [pdf]. Scientific Publishing Center "Regular and Chaotic Dynamics" (R&C Dynamics) (in Russian). Available from: <http://www.iapras.ru/biblio/new/vvedtkv.pdf>
13. Kornienko, Yu.V., Stulova, L.V., Masalov, D.S., 2019. Internal Nonlinear Resonances in the Oscillatory System with Two Degrees of Freedom [pdf]. In: *All-Russian open Armand readings. Modern problems of remote sensing, radar, wave propagation and diffraction*. Materials of Russian open scientific conf. Murom. Publishing and Printing Center of MI VSU, 2019, pp. 226–235. ISSN 2304-0297 (CD-ROM) (in Russian). Available from: [http://www.mivlgu.ru/conf/armand2019/sbornik-2019/pdf/S2\\_16.pdf](http://www.mivlgu.ru/conf/armand2019/sbornik-2019/pdf/S2_16.pdf)

Received 29.07.2021



Yu. V. Kornienko, L. V. Stulova, D.S. Masalov

O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of the NASU  
12, Acad. Proskury St., Kharkiv, 61085, Ukraine

AN INTERNAL NONLINEAR RESONANCE  
IN AN OSCILLATION SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

**Subject and Purpose.** The paper is concerned with the behavior of a nonlinear dynamic system that has two degrees of freedom and whose joint nonlinearity is established by all the nonlinear coupling between the degrees of freedom. The purpose is to find out if the Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky (KBM) method is applicable to a system of partial differential equations.

**Methods and Methodology.** The consideration of the problem is by the Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky method in the first approximation. Then the results are treated using numerical methods.

**Results.** An electromechanical system with two degrees of freedom and a known parametric resonance has been studied using the Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky method in the first approximation. The phase space of the system has been described. It has been shown that the obtained solution covers an energy periodic transfer between the two degrees of freedom. The difference between the considered oscillation system and its analogs discussed in the literature lies in that the considered circuit is parametrically excited by an internal force rather than external one. In a similar system of two circuits connected through a diode, the coupling includes a linear component. In the system of present concern, the coupling is all-nonlinear.

**Conclusion.** The obtained results are of interest for the research into internal nonlinear resonances between degrees of freedom in an oscillation system that has two degrees of freedom and whose joint nonlinearity is due to all the nonlinear coupling between the degrees of freedom. The considered system can serve a test example in the development of programs implementing the Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky method as applied to an oscillation system with numerous degrees of freedom and a small nonlinearity.

**Keywords:** *nonlinear dynamic system with two degrees of freedom, internal nonlinear resonance, Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky method, nonlinear oscillations.*