

# РОЗСИЮВАННЯ І ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ

---

## SCATTERING AND DIFFRACTION OF WAVES

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra28.01.005>  
УДК 621.372(075.8)

**О.В. Лазоренко, Л.Ф. Черногор**

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
майдан Свободи, 4, Харків, 61077, Україна  
E-mail: Oleg.V.Lazorenko@karazin.ua; Leonid.F.Chernogor@gmail.com

### ФРАКТАЛЬНА РАДІОФІЗИКА. Частина 2. ФРАКТАЛЬНИЙ І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ ТА ПРОЦЕСІВ

---

**Предмет і мета роботи.** Предметом роботи є огляд сучасних методів фрактального і мультифрактального аналізу сигналів та процесів щодо цього важливого напрямку радіофізики, а також докладний розгляд алгоритмів, які дозволяють успішну практичну реалізацію зазначених методів.

**Методи та методологія.** Наводяться результати моделювання детермінованих і стохастичних фрактальних та мультифрактальних сигналів і процесів. Розглядаються відповідні практичні методи аналізу, демонструються їх основні особливості, переваги та недоліки. Обговорюються наявні проблеми.

**Результати.** Розглянуто варіанти класифікації сигналів і процесів із використанням поняття фрактальності. Докладно розібрано декілька десятків моделей детермінованих і стохастичних фрактальних та мультифрактальних сигналів і процесів. Проаналізовано більше двадцяти методів монофрактального аналізу, виявлено їх особливості, переваги, недоліки та межі застосування. Продемонстровано перспективність звернення до комплексних методів монофрактального аналізу, що базуються на сумісному використанні не тільки низки методів фрактального аналізу, а й лінійних та нелінійних часово-частотних інтегральних перетворень. Показано ефективність десяти найбільш відомих методів мультифрактального аналізу, розглянуто їх особливості, переваги і недоліки.

**Висновки.** Викладено математичні основи сучасних методів моделювання й аналізу фрактальних і мультифрактальних сигналів і процесів, що дозволяють отримати великий обсяг прихованої унікальної інформації про оточуючий нас світ.

**Ключові слова:** фрактал, фрактальна розмірність, фрактальний сигнал, фрактальний аналіз, мультифрактальний аналіз.

### Вступ

Ця стаття є другою частиною із трьох запланованих у складі аналітичного огляду з сучасної фрактальної радіофізики. Першу частину [1] бу-

ло присвячено теоретичним основам фрактальної радіофізики. У другій частині докладно розглядаються методи, що входять до складу фрактального і мультифрактального аналізу сигналів та процесів. Демонстрації та вивченню практич-

---

Ц и т у в а н н я: Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Фрактальна радіофізика. Ч. 2. Фрактальний і мультифрактальний аналіз сигналів та процесів. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2023. Т. 28. № 1. С. 5–70. <https://doi.org/10.15407/rpra28.01.005>  
C i t a t i o n: Lazorenko, O.V., Chernogor, L.F., 2023. Fractal radiophysics. Part 2. Fractal and multifractal analysis methods of signals and processes. *Radio Physics and Radio Astronomy*, 28(1), pp. 5–70. <https://doi.org/10.15407/rpra28.01.005>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Статтю опубліковано відповідно до умов відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

© Publisher PH "Akademperiodyka" of the NAS of Ukraine, 2023. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

них результатів застосування цих методів при розв'язуванні різних задач фрактальної радіофізики присвячено третю частину даного огляду.

Метою цієї роботи є систематизований виклад сучасних методів фрактального та мультифрактального аналізу.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі задачі:

- зібрати, класифікувати та проаналізувати методи фрактального аналізу, виявити їх переваги та недоліки;
- проаналізувати методи мультифрактального аналізу, які розвивають ідеї різних варіантів мультифрактального формалізму, докладно розглянутого в першій частині огляду [1].

Структуру роботи повністю підпорядковано розв'язанню цих двох задач.

## 1. Фрактальні і мультифрактальні сигнали та процеси, їх моделювання

Добре відомо (див., наприклад, [2]), що теорія сигналів є однією з невід'ємних частин сучасної радіофізики. Отже, виявлення і вивчення фрактальних властивостей сигналів та процесів є безпосередньо радіофізичною задачею.

Перед дослідженням сучасних методів фрактального аналізу введемо необхідні основні поняття та визначення, а також розглянемо існуючі моделі фрактальних сигналів, які допоможуть нам розкрити особливості, переваги та недоліки кожного методу.

### 1.1. Поняття фрактального сигналу і фрактального процесу

Як не дивно, у фізичній літературі немає єдиного загально визнаного визначення сигналу. З огляду на це в рамках даної роботи будемо використовувати визначення, яке прийшло, скоріш за все, з прикладної математики.

Сигналом називають будь-яку функцію  $s(t)$  змінної часу  $t$  (див., наприклад, [2, 3]).

Як правило, джерелами реальних сигналів є будь-які процеси, часові залежності параметрів яких фіксуються на матеріальних носіях будь-якого виду. Однак іноді досліднику залишається невідомим, який саме процес (фізичний, хімічний, біологічний або ін.) і який саме параметр (температура, тиск, напруженість електричного

поля або ін.) породив цей сигнал. Більш того, для успішного аналізу сигналу ця інформація зовсім перестає бути необхідною, а сам сигнал може взагалі виявитися лише формальною математичною моделлю, яка принципово не має пов'язаного з нею реального процесу. В останньому випадку доцільно говорити про функцію  $s(t)$  як про сигнал.

Якщо ж сигнал  $s(t)$  безпосередньо пов'язаний із деяким фізичним процесом, який його породжує, то говоритимемо про функцію  $s(t)$  як про фізичний процес [4].

Фрактальний сигнал (ФС) — це сигнал, деяка характеристика якого має фрактальні властивості [2, 5, 6].

Показник широкосмуговості сигналу (в англійській літературі — *fractional bandwidth*) за визначенням [7] задається співвідношенням

$$\mu = \frac{\Delta f}{f_0} = 2 \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{\max} + f_{\min}}, \quad (1)$$

де  $f_0$ ,  $f_{\min}$ ,  $f_{\max}$  — середня, мінімальна та максимальна частоти квадрата модуля спектральної функції (СФ) одновимірного перетворення Фур'є (ОПФ)  $\dot{S}(f)$  даного сигналу, яка, як відомо (див., наприклад, [7]), задається співвідношенням

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i2\pi ft) dt, \quad (2)$$

$\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$  — ширина смуги частот сигналу.

Модуль СФ ОПФ  $|\dot{S}(f)|$  часто називають амплітудним спектром сигналу, а його квадрат  $|\dot{S}(f)|^2$  — енергетичним спектром (див., наприклад, [7]). Останній з точністю до сталого множника збігається з функцією спектральної щільності (ФСЩ) ОПФ цього сигналу.

Задача визначення ширини смуги частот  $\Delta f$  для сигналів, які мають принципово необмежену за частотою СФ ОПФ, не має одного загальноприйнятого розв'язку. Тут і далі величини  $f_{\min}$  і  $f_{\max}$  ми знаходимо за рівнем зменшення модуля зазначеної СФ ОПФ у  $e$  разів відносно її головного максимуму [4]. При цьому ФСЩ ОПФ, зрозуміло, зменшується у  $e^2$  разів.

Зрозуміло, існують як часові  $s(t)$ , так і просторово-часові сигнали  $s(\vec{r}, t)$ . Однак у рамках цієї статті ми говоритимемо лише про перші з них.

## 1.2. Класифікація фрактальних сигналів

Класифікувати ФС можна за різними параметрами. Розглянемо найвідоміші методи класифікації.

### 1.2.1. Класифікація за показником широкосмуговості

Залежно від величини показника широкосмуговості  $\mu$  всі сигнали прийнято ділити на монохроматичні, вузькосмугові, широкосмугові, надширокосмугові та відеосигнали [4, 7].

Сигнал називають монохроматичним, якщо його показник широкосмуговості задовольняє умові  $\mu = 0$ . Таких сигналів у природі не існує, оскільки вони мали б існувати вічно, тому що  $t \in (-\infty, +\infty)$ , а також мати нескінченну енергію:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \infty.$$

Сигнал називають вузькосмуговим, якщо його показник широкосмуговості задовольняє умові  $0 < \mu \leq 0,01$ . Сигнал вважають широкосмуговим, якщо його показник широкосмуговості задовольняє умові  $0,01 < \mu < 0,2$ . Саме для таких традиційних вузькосмугових і широкосмугових сигналів протягом ХХ століття було побудовано більшість технічних рішень та математичних методів аналізу й обробки сигналів.

Сигнал називають надширокосмуговим (НШС), якщо його показник широкосмуговості задовольняє умові  $0,2 \leq \mu < 2$ . Починаючи з кінця 1990-х рр., дослідження НШС сигналів є одним із найбільш перспективних напрямів радіофізики.

Сигнал називають відеосигналом, якщо його показник широкосмуговості задовольняє умові  $\mu = 2$ . Відеосигнали не випромінюються в простір, оскільки містять у своєму складі постійну компоненту, а постійний струм, як відомо, електромагнітних хвиль не випромінює.

Будь-який ФС за величиною показника широкосмуговості може бути класифікований як широкосмуговий, надширокосмуговий або відеосигнал. Так з'являються фрактальні широкосмугові (ФСШС) та надширокосмугові (ФСНШС) сигнали, а також фрактальні відеосигнали.

Зауважимо, що фрактального монохроматичного сигналу бути не може, оскільки гармонічна

функція (синусоїда або косинусоїда) ніяких фрактальних властивостей не має. З тієї ж причини неможливе існування і фрактального вузькосмугового сигналу, оскільки сама структура ФС передбачає істотне розширення його ФСЩ ОПФ порівняно зі звичайною гармонічною функцією.

### 1.2.2. Класифікація за наявністю випадкових параметрів

За наявністю чи відсутністю у сигналі випадкових властивостей ФС прийнято поділяти на детерміновані та стохастичні (випадкові). Детермінованим вважають ФС, в алгоритмі побудови якого немає жодного випадкового параметра. Стохастичний ФС — це ФС, у процесі створення якого використовуються один чи декілька випадкових параметрів.

У процесі аналізу переважної більшості реальних фрактальних процесів дослідник має справу зі стохастичними процесами.

### 1.2.3. Класифікація за кількістю фрактальних розмірностей

За аналогією з тим, як фрактали за кількістю необхідних для опису їх властивостей фрактальних розмірностей поділяють на монофрактали та мультифрактали, також можна розглядати класи монофрактальних і мультифрактальних ФС.

Монофрактальним називають ФС, для опису фрактальних властивостей якого достатньо лише одного значення фрактальної розмірності. Мультифрактальний ФС — це ФС, для опису фрактальних властивостей якого необхідно використовувати більше одного значення фрактальної розмірності.

Далі в роботі для позначення монофрактального ФС будемо використовувати просто скорочення «ФС», а мультифрактальний ФС позначимо як «МФС».

Слід зауважити, що оскільки з рівності фрактальних розмірностей двох ФС не випливає тотожність їх часової структури, то для мультифрактальних ФС з ідентичними мультифрактальними спектрами можуть виникнути щонайменше три різні ситуації. У першому випадку ФС може бути принципово мультифрактальним в околі будь-якого фіксованого моменту часу  $t$ , тобто у його формуванні одночасно бе-

руть участь монофрактали з різними значеннями фрактальних розмірностей. У другому випадку ФС може бути фактично монофрактальним у такому околі, але фрактальна розмірність утворюючого його монофрактала змінюється у часі за певним законом. У третьому випадку спостерігається проміжна ситуація між двома попередніми випадками. У цілому, є досить прозора аналогія з часово-частотною структурою частотно-модульованих і НШС сигналів (див., наприклад, [4]). Забігаючи наперед, зазначимо, що в рамках класичного мультифрактального аналізу, коли для всього ФС обчислюється один мультифрактальний спектр, розділити ці випадки неможливо.

Таким чином, ФС можна класифікувати, як мінімум, за трьома параметрами: за показником широкосмуговості, за наявністю випадкового параметра і за кількістю необхідних для опису значень фрактальної розмірності.

### 1.3. Моделі детермінованих фрактальних і мультифрактальних сигналів

#### 1.3.1. Детерміновані фрактальні та мультифрактальні сигнали

Детермінований ФС  $s(t)$  має властивість масштабної інваріантності [2, 8]:

$$s(t) = a^{-H} s(at), \quad (3)$$

де  $a > 0$ . У математиці такі функції називають однорідними функціями степеня  $H$  (див., наприклад, [2, 8]), тому такі детерміновані ФС можна називати однорідними (англ. *homogeneous*) ФС [9].

Якщо функція  $s(t)$  задовольняє умові (3) за довільного значення  $a$ , то таку функцію називають строго однорідною, а відповідний ФС — строго однорідним ФС. Однак у цьому випадку існує проблема в знаходженні найбільш релевантного значення  $a$ . Виявляється, що таких функцій існує порівняно мало, тому моделі строго однорідних ФС великого поширення не отримали [10].

Значно багатший клас складають моделі ФС, коли  $a = 2^k$ , а самі сигнали мають властивість діадної самоподібності [2, 8, 9]:

$$s(t) = 2^{-k} s(2^{kH} t), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Такі сигнали називають біоднорідними (англ. *bihomogeneous*). Біоднорідні ФС поділяють на

енергетичні (англ. *energy-dominated*) та потужнісні (англ. *power-dominated*) [2, 9].

Тим не менш, у літературі для позначення біоднорідних ФС часто використовують термін «однорідний ФС», підкреслюючи, що мається на увазі ФС, який задовольняє саме умові (4), а не більш жорсткій умові (3) («строого однорідний ФС») [9]. Далі в роботі ми будемо додержуватись цієї традиції. Зазначимо, що найбільш зручним і наочним представленням однорідних ФС є їхнє розкладання за базисом вейвлетів [9].

Енергетичний однорідний ФС — це однорідний ФС  $s(t)$ , який, будучи пропущеним через ідеальний смуговий фільтр із передавальною характеристикою

$$B_0(\omega) = \begin{cases} 1, & \pi \leq |\omega| \leq 2\pi, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (5)$$

породжує сигнал  $\tilde{s}_0(t)$ , що має скінченну енергію [9]

$$E_{\tilde{s}_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_0^2(t) dt < \infty.$$

Установлено [9], що для енергетичного однорідного ФС  $s(t)$ , модуль його СФ ОПФ  $|\dot{S}(\omega)|$ , де  $\omega = 2\pi f$ , зі зростанням частоти  $\omega$  спадає за степеневим законом

$$|\dot{S}(\omega)| \sim \frac{1}{|\omega|^{H+1}}, \quad (6)$$

причому  $0 < H < 1$ ,  $H$  — показник Херста.

Енергетичні однорідні ФС мають необмежену енергію, причому переважна більшість із них має водночас і необмежену потужність [9]. Однак крім них існує також клас однорідних ФС з необмеженою потужністю, які не є енергетичними однорідними ФС.

Потужнісний однорідний ФС — це однорідний ФС  $s(t)$ , який, будучи пропущеним через ідеальний смуговий фільтр з передавальною характеристикою (5), породжує сигнал  $\tilde{s}_0(t)$ , що має скінченну потужність [9]

$$P_{\tilde{s}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{s}_0^2(t) dt < \infty.$$

Установлено [9], що для потужнісного однорідного ФС  $s(t)$  його потужнісний спектр  $P(\omega)$ ,



який задається співвідношенням

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T s(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2,$$

із зростанням частоти  $\omega$  зменшується за степеневим законом

$$P(\omega) \sim \frac{1}{|\omega|^\beta}, \quad (7)$$

де  $\beta = 2H + 1$ , причому  $0 < H < 1$ ,  $\beta$  – спектральний показник.

Важливо зазначити, що енергетичні та потужнісні однорідні ФС є підкласами більш загальних класів сигналів – енергетичних і потужнісних однорідних сигналів відповідно. У загальному випадку для таких сигналів величина  $H$  може набувати значення і поза інтервалом  $H \in (0,1)$ , але тоді такі сигнали вже не є фрактальними.

Окремо виділимо детерміновані ФНШС сигнали, які, зрозуміло, є окремим підкласом детермінованих ФС. Основна особливість ФНШС сигналів полягає у тому, що вони поєднують у собі переваги як фрактальних, так і НШС сигналів, що привертає до них увагу фахівців-прикладників [4].

Моделювання детермінованих ФС зручно проводити за допомогою безперервних, ніде не диференційованих функцій, фрактальних вейвлетів і систем ітерованих функцій (розглянуто в першій частині огляду [1]). Зручні моделі детермінованих МФС ґрунтуються на нестационарному варіанті функції Вейерштрасса та її модифікацій. Розглянемо їх докладніше.

### 1.3.2. Безперервні, ніде не диференційовні функції

Найбільш зручними аналітичними моделями детермінованих ФС є безперервні, ніде не диференційовні функції. Жодна звична функція, що диференціюється, принципово не може бути моделлю ФС. Справа полягає в тому, що фрактальна розмірність  $D$  гладкої кривої, окремим випадком якої є графік такої функції, дорівнює її топологічній розмірності  $D_T$  і дорівнює евклідовій розмірності  $E$  простору, в якому перебуває ця крива, причому  $D = D_T = E = 1$  (див., наприклад, [11]). Отже, така крива не підпадає під визначення фрактала, яке було розглянуте вище.

Для безперервних, ніде не диференційованих функцій це не так. Саме ці функції видатний французький математик Ш. Ерміт назвав «монстрами» [11].

Вважається, що офіційно історія цих функцій почалася 1875 р., коли у роботі П. Дюбуа–Реймонда [12] з'явилося повідомлення про те, що К. Вейерштрасс уперше побудував безперервну, ніде не диференційовну функцію. Проте досліджено її було ще 1861 р., а отримані результати доповідалися самим К. Вейерштрассом у Берлінській академії наук у 1872 р. [13]. Безперервні недиференційовні функції були також побудовані до 1860 р. Ш. Селлер'є (опубліковано лише у 1890 р., після смерті автора), Г. Ріманом (1861 р.) і Ж. Дарбу (1873–1874 рр.). Більше того, є інформація [13], що Б. Больцано побудував функцію з аналогічними властивостями, ймовірно, раніше 1830 р., хоча відомо про це стало тільки в 1930 р.

На сьогодні цей клас моделей ФС містить велику кількість різних функцій (див., наприклад, [13]), зокрема, функції Вейерштрасса, Вейерштрасса–Мандельброта, Больцано, Селлер'є, Рімана, Дарбу, Такаґі, Ван дер Вардена, Фабера, Кноппа, Перра, Шенберга, Орліча, Маккарті, Катсуури, Лінча, Вена та ін. Деякі з них розглядаються у цій роботі.

У роботі [13] запропоновано оригінальну класифікацію безперервних, ніде не диференційованих функцій, засновану на методах їх побудови, які автори називають «стратегіями». Розглядається шість таких стратегій:

- *Визначення функції як суми ряду.* Прикладами таких функцій є функції Рімана, Вейерштрасса і Дарбу [13].

- *Визначення функції за допомогою  $N$ -адного представлення змінної.* Як приклади таких функцій можна розглядати функцію Кантора (створена в 1884 р.), відому також як «диявольські сходи» [14], і функцію Мінковського (1911 р.) [13].

- *Визначення функції за допомогою самоподібного геометричного об'єкта.* Прикладами таких об'єктів є функція Гільберта (1891 р.), крива Пенано (1890 р.), крива Лебега (1904 р.) і крива Коха (1904 р.) [13].

- *Визначення кривої за допомогою випадкової функції.* Основними прикладами тут є моделі броунівського і фрактального броунівського рухів [13]. Побудова моделі броунівського руху

пов'язана, у першу чергу, з роботами Р. Брауна (1827 р.), Л. Башельє (1900 р.), а також А. Ейнштейна, Ж. Перрена і Н. Вінера [11, 15–18]. Модель фрактального броунівського руху була розроблена Б. Мандельбротом [13].

- *Визначення кривої за допомогою функціонального рівняння.* Прикладом використання цього шляху побудови фрактальної функції є функції Фабера (1907–1908 рр.) [13].

- *Визначення кривої за допомогою системи ітерованих функцій (СІФ).* Як приклад тут можна запропонувати криву Кіссвіттера (1966 р.) [13].

Існує й інша класифікація функцій, що розглядаються, запропонована в [19]. Відповідно до неї безперервні, ніде не диференційовні функції можна поділити таким чином:

- функції, побудовані за допомогою оператора стиснення (наприклад, оператора Ріда–Байрактаревича);

- локальні фрактальні функції, що будуються за допомогою локальних СІФ;

- функції, створені з використанням фрактальних базисів лагранжева типу;

- функції, побудовані за допомогою формалізму рекурентних множин;

- функції, що ґрунтуються на використанні ітеративних інтерполяційних процесів;

- функції, побудовані за допомогою рекурентних СІФ;

- функції із «прихованою» змінною.

**Функція Вейерштрасса.** Функцією Вейерштрасса (див., наприклад, [20]) називають функцію:

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{(s-2)n} \sin(b^n t), \quad (8)$$

причому  $b > 1$ ,  $1 < s < 2$ .

Установлено [20], що фрактальна розмірність графіка цієї функції  $D$  (точніше, емнісна розмірність  $D_C$ ) визначається простим співвідношенням  $D = s$ . Це дуже зручно, оскільки вибираючи  $s$ , можна створити модельний однорідний ФС з будь-яким значенням фрактальної розмірності в діапазоні  $1 < D < 2$ .

Доведено [21], що у співвідношенні (8) замість синуса може стояти взагалі будь-яка періодична функція. Цей факт пояснює наявність кількох різних версій функції Вейерштрасса. Ще один варіант подання функції Вейерштрасса [22]

є таким:

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}^n \cos(\tilde{\beta}^n t), \quad 0 < \tilde{\alpha} < 1, \quad \tilde{\beta} > 0.$$

Г. Харді у 1916 р. установив [23], що для величин  $\tilde{\alpha}$  і  $\tilde{\beta}$  має виконуватись співвідношення  $\tilde{\alpha}\tilde{\beta} > 1$  (див., наприклад, [13, 22]).

Установлено, що фрактальна розмірність  $D$  такого ФС визначається співвідношенням [13, 21]:

$$D = 2 + \frac{\ln \tilde{\alpha}}{\ln \tilde{\beta}}.$$

**Функція Вейерштрасса–Мандельброта.** Подальший розвиток ідеї К. Вейерштрасса став передумовою для створення Мандельбротом нової безперервної, ніде не диференційовної функції

$$WM(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \exp(i\lambda^n t)) \exp(i\varphi_n)}{\lambda^{(2-D)n}},$$

яка є комплекснозначною функцією дійсного аргументу та отримала назву функції Вейерштрасса–Мандельброта (див., наприклад, [24, 25]).

Функція  $WM(t)$  залежить від  $\lambda$  тривіальним чином, тому що тільки параметр  $\lambda$  визначає, яку частину кривої видно, коли аргумент  $t$  змінюється у заданому інтервалі. Щоб ця функція була би фрактальною, потрібно, щоб виконувалася умова  $\lambda > 1$ . Як і у випадку функції Вейерштрасса, фрактальна розмірність  $D$  має задовольняти умові  $1 < D < 2$ . Величина  $\varphi_n$  є довільною фазою, яка лежить в діапазоні  $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ . Різні значення фази  $\varphi_n$  відповідають різним функціям  $WM(t)$ . У найпростішому випадку вважають  $\varphi_n = 0$ .

**Косинусна функція Вейерштрасса–Мандельброта.** Косинусною функцією Вейерштрасса–Мандельброта називається дійсна частина комплекснозначної функції Вейерштрасса–Мандельброта  $WM(t)$  (див., наприклад, [24–26]):

$$C(t) = \operatorname{Re} W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\lambda^n t)}{\lambda^{(2-D)n}}. \quad (9)$$

Зазначимо, що при отриманні функції (9) вважалось, що  $\varphi_n = 0$ .

Легко переконатися, що косинусна функція Вейерштрасса–Мандельброта (9) дещо схожа на функцію Вейерштрасса (8), але не повторює її. Це

дві різні функції, хоча обидві є дійсними, безперервними та ніде не диференційовними.

За малих значень  $D$  функція  $C(t)$  є практично гладкою, але коли  $D$  зростає до 2, вона починає сильно флуктувати.

Функція  $C(t)$  є строго однорідною і задовольняє умові масштабної інваріантності (3), тобто для неї справедливе співвідношення  $C(t) = \lambda^{D-2}C(\lambda t)$ .

Якщо ми знаємо функцію  $C(t)$  на деякому інтервалі значень  $t$ , то вона є відомою нам за будь-яких  $t$ . У цьому виявляються скейлінгові властивості функції  $C(t)$ .

Слід наголосити, що крива  $C(t)$  є не самоподібною, а самоафінною, тому що у напрямку осі  $t$  і в напрямку осі  $C(t)$  використовуються різні масштабні множники [13].

**Функція Рімана.** Функція Рімана, опублікована у 1861 р., визначається співвідношенням (див., наприклад, [13]):

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Існує також узагальнена функція Рімана, яка з'явилася 1970 р. завдяки дослідженням Г. Харді [23] і Дж. Гервера [27]:

$$GR(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^{\xi}}, \quad \alpha > 0.$$

Зазначимо, що при  $\xi < 5/2$  в деяких точках похідна узагальненої функції Рімана все ж таки існує [13].

Основною особливістю функції Рімана, яка цікавить фахівців, є те, що вона має сингулярності не касп-типу, як більшість подібних функцій, а чирп-типу [28].

**Функція Рімана–Вейерштрасса.** Комплекснозначна функція Рімана–Вейерштрасса визначається співвідношенням (див., наприклад, [24]):

$$W_{\varphi}(t) = \frac{2}{\pi^{\varphi}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\varphi} \exp(i\pi n^2 t), \quad \beta > 0,5.$$

Вона є менш лакунарною, ніж функція Вейерштрасса. Як моделі ФС можна використовувати окремо дійсну

$$\operatorname{Re} W_{\varphi}(t) = \frac{2}{\pi^{\varphi}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\varphi} \cos(\pi n^2 t)$$

та уявну

$$\operatorname{Im} W_{\varphi}(t) = \frac{2}{\pi^{\varphi}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\varphi} \sin(\pi n^2 t)$$

частини цієї функції, задаючи різні значення параметра  $\varphi$ .

**Функція Селлер'є.** Функція Селлер'є (1860 р., опублікована у 1890 р.) задається співвідношенням (див., наприклад, [29]):

$$Ce(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{a}^k} \sin(\tilde{a}^k t), \quad \tilde{a} > 1.$$

Графік залежності цієї функції наведено на рис. 1, а.

**Функція Дарбу.** Функція Дарбу (1873 р., опублікована в 1875 р.) визначається співвідношенням (див., наприклад, [30]):

$$Da(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin((n+1)!t).$$

Ж. Дарбу сконструював цю функцію, узагальнивши результати досліджень, проведених за кілька років до того Г. Ханкем та Л. Шварцем (див., наприклад, [30]). Графік залежності функції Дарбу у часовій області показано на рис. 1, б.

**Функція Такагі.** Функція Такагі (1903 р.) має вигляд (див., наприклад, [13, 30]):

$$Tc(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^k t - m|,$$

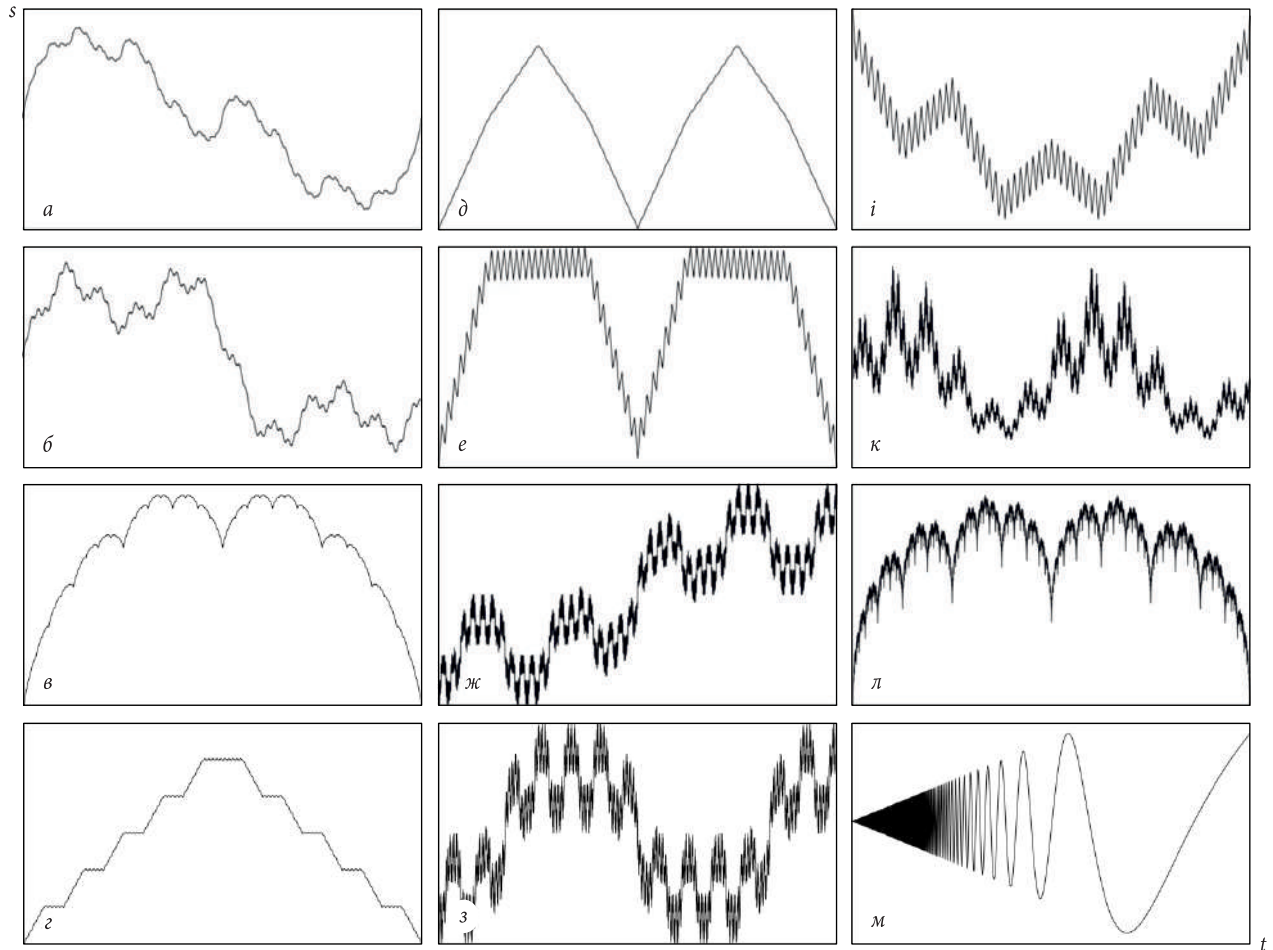
де  $\inf_A f(z)$  – мінімальне значення функції  $f(z)$  на множині  $A$  ( $z \in A$ ).

Ця функція була запропонована Такагі як більш простий варіант побудови безперервної, ніде не диференційовної функції, ніж функція Вейерштрасса. Її графік наведено на рис. 1, в.

**Функція Ван дер Вардена.** Функція Ван дер Вардена (1930 р.), яка визначається співвідношенням (див., наприклад, [30]):

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |10^k t - m|,$$

як і функція Такагі, є успішною спробою побудови безперервної, ніде не диференційовної функції більш простим способом, ніж функція Вейерштрасса. Її графік у часовій області показаний на рис. 1, г.



**Рис. 1.** Безперервні, ніде не диференційовні функції у часовій області: *a* – функція Селлер’є; *б* – функція Дарбу; *в* – функція Такагі; *з* – функція Ван дер Вардена; *д* – перша функція Фабера; *е* – друга функція Фабера; *ж* – перша функція Шенберга; *з* – друга функція Шенберга; *і* – функція Маккарті; *к* – функція Вена; *л* – функція Кноппа ( $\hat{a} = 0.75, \hat{b} = 2, D = 1.585$ ); *м* – функція Ліу-Чіу ( $\tilde{a} = 1, D = 1.5$ )

**Функції Фабера.** У 1907–1908 рр. німецький математик Г. Фабер запропонував свій варіант побудови двох безперервних, ніде не диференційовних функцій. Перша з них, відома тепер як перша функція Фабера (1907 р.), має вигляд (див., наприклад, [30]):

$$Fb1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1}t - m|.$$

Друга функція Фабера (1908 р.) задається співвідношенням:

$$Fb2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1}t - m|.$$

Графіки залежностей для функцій Фабера наведено рис. 1, *д*, *е*.

**Функції Шенберга.** Функції Шенберга (1938 р.) задаються співвідношеннями (див., наприклад, [13, 30]):

$$Sh1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{p}(3^{2k}t),$$

$$Sh2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{p}(3^{2k+1}t),$$

$$\tilde{p}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/3]; \\ 3t - 1, & t \in [1/3, 2/3]; \\ 1, & t \in [2/3, 4/3]; \\ 5 - 3t, & t \in [4/3, 5/3]; \\ 0, & t \in [5/3, 2]; \end{cases}$$

$$\tilde{p}(t + 2n) = \tilde{p}(t), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Відмінною рисою функцій Шенберга є те, що будучи взятими у вигляді параметричного задавання координат  $x$  і  $y$  на декартовій площині, вони визначають криву, яка, подібно до кривих Пеано, цілком заповнює собою однозв'язну двовимірну фігуру. Графіки залежностей для функцій Шенберга у часовій області наведено на рис. 1, ж, з.

**Функція Маккарті.** Функція Маккарті (1953 р.) задається співвідношенням (див., наприклад, [30]):

$$Mc(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{g}(2^{2^k} t),$$

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} 1+t, & t \in [-2, 0], \\ 1-t, & t \in [0, 2], \end{cases}$$

$$\tilde{g}(t+4n) = \tilde{g}(t), \\ n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}.$$

Графік залежності функції Маккарті у часовій області наведено на рис. 1, і.

**Функція Вена.** У 2002 р. китайський математик Ліу Вен запропонував сімейство безперервних, ніде не диференційовних функцій, одна з яких визначається так (див., наприклад, [30]):

$$Wn(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + 2^{-n} \sin \left( 6^n \pi \frac{2}{3} t \right) \right).$$

Графік залежності цієї функції наведено на рис. 1, к.

**Функція Кноппа.** Функція Кноппа (1918 р.) задається співвідношенням (див., наприклад, [13, 31]):

$$Kn(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}^k \tilde{\varphi}(\hat{b}^k t),$$

де  $\tilde{\varphi}(x) = |x - [x]|$ ,  $\hat{b} = 2, 3, 4, \dots$ ,  $\hat{a} \in [0, 1]$ ,  $[x]$  — ціла частина числа  $x$ . Якщо  $\hat{a}\hat{b} \geq 1$ , то така функція є скрізь безперервною, але ніде не диференційовною. Для  $1/2 < \hat{a} < 1$  і  $t \in [0, 1]$  справедлива така оцінка емнісної фрактальної розмірності цієї функції:

$$D_C = \frac{\log(4\hat{a})}{\log \hat{b}}.$$

Останнє дозволяє отримувати моделі ФС із різними значеннями фрактальної розмірності.

Графік залежності для функції Кноппа в часовій області наведено на рис. 1, л.

**Функція Ліу–Чіу.** Ще одна корисна безперервна, ніде не диференційовна функція з'явилася в 2009 р. у роботі [32]:

$$LCh(t) = t^{\tilde{a}} \cos(1/t^{\tilde{b}}), \quad (10)$$

де  $t \in (0, 1]$ ,  $\tilde{a}$  і  $\tilde{b}$  — числові параметри. Зважаючи на прізвища авторів, її логічно назвати функцією Ліу–Чіу.

Установлено [32], що фрактальна розмірність  $D$  графіка функції Ліу–Чіу залежить від параметрів  $\tilde{a}$  і  $\tilde{b}$ :

$$D = 2 - \frac{\tilde{a} + 1}{\tilde{b} + 1}.$$

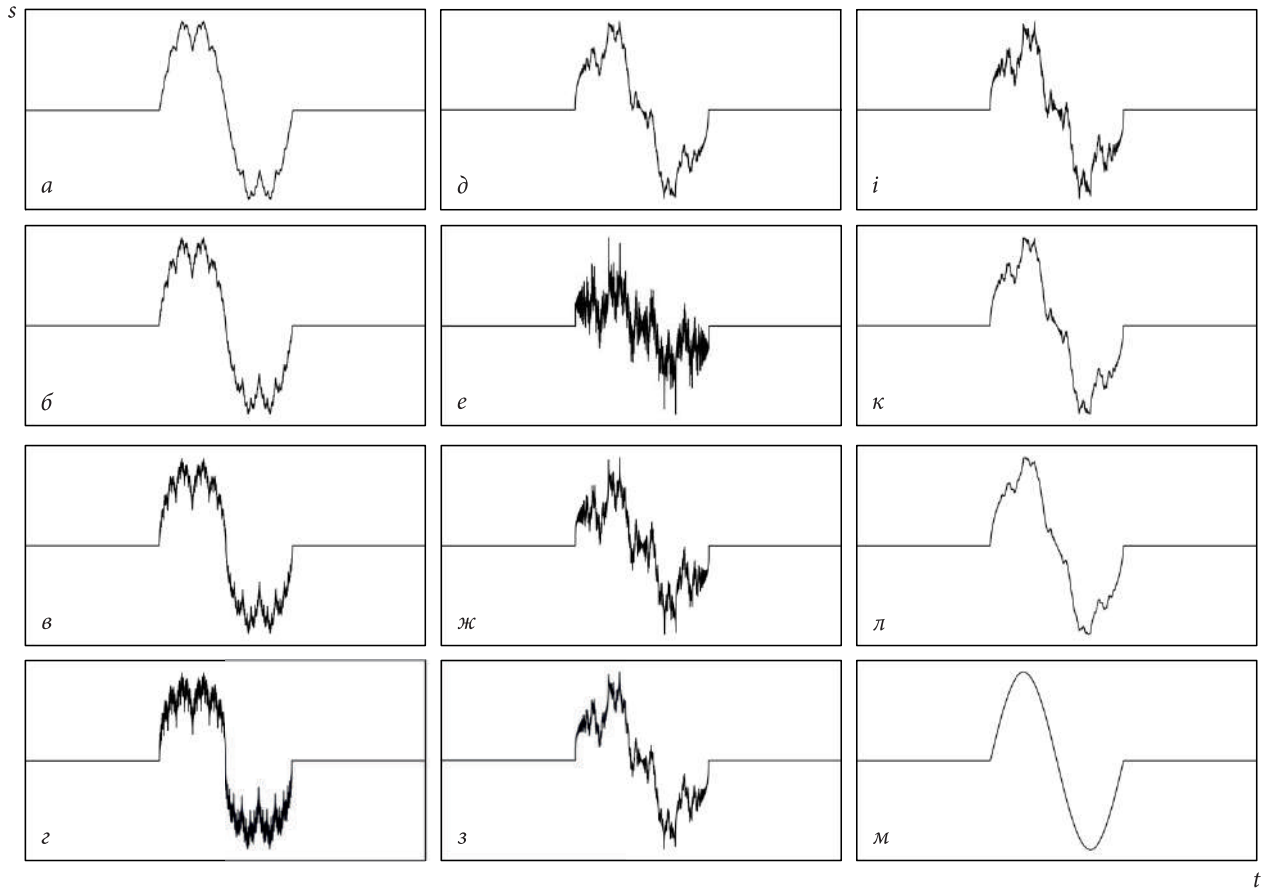
Для того, щоб функція (10) була фрактальною, необхідно виконувати умову  $1 \leq D \leq 2$ . Графік залежності для функції Ліу–Чіу у часовій області наведено на рис. 1, м.

### 1.3.3. Фрактальні вейвлети

Приблизно на початку 1990-х рр. все більшої популярності серед фахівців у різних галузях науки та техніки став набувати новий математичний метод аналізу сигналів і процесів — вейвлет-аналіз. Установлено, що деякі вейвлет-твірні функції, на основі яких будуються бази різних вейвлет-перетворень, мають фрактальну структуру (див., наприклад, [33, 34]), а тому можуть використовуватись як детерміновані моделі ФС.

До фрактальних вейвлетів належать, зокрема, вейвлети Добеші, симлети, койфлети, біортогональні вейвлети. Для зручності далі в роботі будемо використовувати позначення вказаних вейвлетів, що застосовуються в пакеті Wavelet Toolbox для MatLab. Вейвлети Добеші 2-, 3-, 4-го порядків будемо записувати відповідно як db2, db3, db4; симлети 2-, 3-, 4-го порядків — як sym2, sym3, sym4; койфлет 1-го порядку — coif1; біортогональні вейвлети — bior3.3, bior3.5.

Зазначимо, що ці вейвлети існують як частотні фільтри (див., наприклад, [33, 34]), тому не можуть задаватися аналітичними виразами у часовій області. З огляду на це, на відміну від моделей ФС, заснованих на безперервних, ніде не дифе-



**Рис. 2.** Аналітичні моделі фрактальних (а–л) і нефрактальних (м) НШС сигналів у часовій області: а –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 2$ ; б –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 2$ ; в –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.7$ ,  $\beta = 2$ ; г –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 2$ ; д –  $FUWB_2(t)$ , е –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.5$ ; ж –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.7$ ; з –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.8$ ; и –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.9$ ; к –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 1.1$ ; л –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 1.3$ ; м –  $UWB(t)$  [4].

ренційовних функціях, тут ми говоримо не про аналітичні, а про числові моделі ФС.

Розвитком ідеї побудови ФС на основі вейвлетів є запропонована у 2013 р. ідея створення ФС за допомогою сплайнів [35]. Вважаємо, що цей напрямок можна розглядати як самостійний, оскільки далеко не всі сплайни є вейвлетами (див., наприклад, [33]).

### 1.3.4. Фрактальні надширокопasmові сигнали

У 2004 р. ми запропонували новий клас ФС – фрактальні надширокопasmові (ФНШС) сигнали (англ. *fractal ultra-wideband signals*) [4, 36, 37].

До моделей ФНШС сигналів у часовій області  $s(t)$  та їх СФ ОПФ  $\dot{S}(f)$  висуваються такі вимоги [4, 37]:

$$\int_{\tau_s} s(t) dt = 0 \text{ або } \dot{S}(f) \Big|_{f=0} = 0;$$

$$s(t) = 0, \text{ якщо } t \notin [0, \tau_s];$$

$$s(t) \text{ — безперервна для } t \in \mathbb{R};$$

$$D[s(t)] \notin \mathbb{Z}, \text{ де } \mathbb{Z} \text{ — множина цілих чисел};$$

$$s(t) \text{ — самоафінна при } t \in [0, \tau_s].$$

Існують детерміновані аналітичні та числові моделі ФНШС сигналів у часовій області. Аналітичні моделі сигналів ФНШС зручно будувати на основі безперервних, ніде не диференційовних функцій, а числові — на базі фрактальних вейвлетів [4].

**Аналітичні моделі.** У 2004 р. з'явилися моделі ФНШС сигналів [4, 37], засновані на безперервних, ніде не диференційовних функціях Вейерштрасса, Рімана та Рімана–Вейерштрасса відповідно. Тут і далі скорочення  $FUWB_k(t)$  (*fractal ultra-wideband signal*) означає аналітичну модель ФНШС сигналу у часовій області, нижній індекс

відповідає порядковому номеру моделі:

$$FUWB_1(t) = \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(3\beta^n(2t-1)) \right) \times \text{sign}(2t-1)\Theta(t),$$

$$\text{де } \text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad \Theta(t) = \eta(t) - \eta(t-1),$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \eta(t) - \text{функція Хевісайда;}$$

$$FUWB_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin(2\pi n^2 t) \Theta(t);$$

$$FUWB_3(t) = \frac{2}{\pi^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\beta} \sin(2\pi n^2 t) \Theta(t).$$

Графіки залежностей модельних ФНШС сигналів  $FUWB_1(t) - FUWB_3(t)$  у часовій області для різних значень їх параметрів наведено на рис. 2. Для порівняння там також продемонстровано модель нефрактального ультракороткого НШС сигналу  $UWB_1(t)$ . Позначення моделі НШС сигналу  $UWB(t)$  введено для зручності за аналогією з позначеннями моделей ФНШС сигналів. Дещо пізніше (у 2016 р.) клас детермінованих аналітичних моделей ФНШС сигналів поповнився ще десятьма моделями, заснованими на таких безперервних, ніде не диференційовних функціях [38]:

функції Селлер'є –

$$FUWB_4(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sin(\tilde{a}^k \pi t) \Theta(t);$$

функції Дарбу –

$$FUWB_5(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin(\pi(n+1)t) \Theta(t);$$

функції Такагі –

$$FUWB_6(t) = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^k t + m|, & t \in [-1, 0), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^k t - m|, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

функції Ван дер Вардена –

$$FUWB_7(t) = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |10^k t + m|, & t \in [-1, 0), \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |10^k t - m|, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

першій функції Фабера –

$$FUWB_8(t) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1} t + m|, & t \in [-1, 0), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1} t - m|, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

другій функції Фабера –

$$FUWB_9(t) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1} t + m|, & t \in [-1, 0), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1} t - m|, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

функціях Шенберга –

$$FUWB_{10}(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{p}(3^{2k}(1+t)), & t \in [-1, 0), \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{p}(3^{2k}(1-t)), & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

$$FUWB_{11}(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{p}(3^{2k+1}(1+t)), & t \in [-1, 0), \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{p}(3^{2k+1}(1-t)), & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

функції Маккарті –

$$FUWB_{12}(t) = \begin{cases} -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{g}(2^{2^k}(t+1)), & t \in [-1, 0), \\ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{g}(2^{2^k} t), & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

функції Вена —

$$FUWB_{13}(t) = \begin{cases} -\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - 2^{-n} \sin \left( 6^n \pi \frac{2}{3} t \right) \right), & t \in [-1, 0), \\ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + 2^{-n} \sin \left( 6^n \pi \frac{2}{3} t \right) \right), & t \in [0, 1], \\ 0, & t \in [-1, 1]. \end{cases}$$

**Числові моделі.** Установлено, що деякі фрактальні вейвлет-твірні функції є одночасно і НШС сигналами [39, 40]. Їх можна використовувати як числові моделі ФНШС сигналів [4, 37]. До таких моделей належать, зокрема, вейвлети Добеши, симлети, койфлети, біортогональні вейвлети. Основними особливостями цих числових моделей є те, що всі вони, по-перше, мають фрактальну структуру, по-друге, є НШС сигналами, хоча і не мають аналітичного виразу і можуть бути побудовані лише за допомогою ітераційних алгоритмів числовими методами.

### 1.3.5. Моделі мультифрактальних сигналів

При моделюванні МФС (локально самоподібних процесів) часто використовується нестационарний варіант функції Вейерштрасса (див., наприклад, [41, 42]):

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}^{-kH(t)} \sin(\tilde{\lambda}^k t), \quad (11)$$

де  $H(t)$  — показник Гельдера, що залежить від часу. Як відомо, він пов'язаний із залежною від часу фрактальною розмірністю співвідношенням  $D(t) = 2 - H(t)$ .

Важливо зазначити, що коли показник Гельдера не залежить від часу ( $H(t) = H = \text{const}$ ), формула (11) описує монофрактальний сигнал. Більше того, виявляється, що величина  $H$  дорівнює показнику Херста цього сигналу. (До речі, саме тому Б. Мандельброт позначав показник Херста через  $H$ , а не через  $K$ , як робив сам Г. Херст.) В іншому випадку, незалежно від характеру самої функції  $H(t)$ , ми отримуємо детерміновану модель мультифрактального сигналу. Використання у ній різних функцій  $H(t)$  дозволяє отримувати різні за своїми властивостями моделі мультифрактальних сигналів. Особливо звертаємо увагу на те, що можна використовувати як де-

терміновані, так і випадкові функції  $H(t)$ . Щоправда, у другому випадку ми отримаємо модель стохастичного мультифрактального сигналу, що розглядатиметься нижче. Єдиною вимогою для забезпечення фрактальності модельного сигналу є виконання умови  $0 < H(t) < 1$ .

Зазначимо, що і для інших модифікацій функції Вейерштрасса можна використовувати функцію  $H(t)$  замість звичайної константи  $H$ .

Важливо зауважити, що модель узагальненого броунівського руху, про яку йтиметься далі, дає нам глобально самоподібний сигнал, а сигнали із кусково-неперервною функцією  $H(t)$  — кусково-самоподібний сигнал [42].

Отже, ми розглянули методи побудови детермінованих моделей ФС. Ці моделі базуються на детермінованих алгоритмах, які не містять жодного випадкового параметра. Разом з тим, поява одного або декількох таких параметрів призводить до суттєвого розширення класу моделей ФС та появи моделей стохастичних ФС, що розглядаються нижче.

## 1.4. Моделі стохастичних фрактальних сигналів

### 1.4.1. Стохастичні фрактальні та мультифрактальні сигнали

Фрактальність розглянутих вище детермінованих ФС, зазвичай, виявлялася у фрактальності графіка самих сигналів. Отже, такі ФС були фрактальні в алгебричному (властивості самоподібності, самоафінності, подані в алгебричній формі) і геометричному сенсі (фрактальність графіка як геометричного об'єкта).

Водночас більшість реальних процесів у природі мають випадковий характер, а тому і відповідні їм часові залежності тих чи інших параметрів (тобто сигнали) також є випадковими. На жаль, такі сигнали не мають ті фрактальні властивості, які є у детермінованих ФС.

Випадкові (стохастичні) сигнали та процеси є фрактальними не в алгебричному або геометричному, а в статистичному сенсі. Це означає, що фрактальність виявляють не самі випадкові сигнали та процеси, а деякі невідповідні їм характеристики. З цієї причини їх часто називають «статистично самоподібними» або «статистично самоафінними». Це робиться для того, щоб відо-



кремити їх від детермінованих ФС, які є самоподібними або самоафінними в алгебричному чи геометричному сенсі [43].

Отже, стохастичними фрактальними процесами називають статистично самоподібні чи самоафінні процеси з показником Херста  $H$  та стаціонарними приростами ( $H$ -SSSI процеси) [43]. Перша згадка про моделі стохастичних ФС зустрічається у 1965 р. у роботі Б. Мандельброта [44].

Більш точно поняття стохастичного фрактального процесу можна сформулювати за допомогою двох визначень [43].

**Визначення 1.** Дійсний процес  $X(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , називають самоподібним з індексом  $H > 0$  ( $H$ -SS процесом), якщо для всіх  $a > 0$  скінченновимірні розподіли  $X(at)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , є ідентичними скінченновимірним розподілом  $a^H X(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

**Визначення 2.** Процес  $X(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , називають  $H$ -SSSI процесом, якщо він є самоподібним з індексом  $H$  та має стаціонарні прирости.

Розглянемо стохастичні (випадкові) моделі ФС та МФС. Найбільш відомими серед них є модель класичного броунівського руху, модель узагальненого броунівського руху, модель мультифрактального узагальненого броунівського руху, модель фрактального гауссівського шуму, модель мультифрактального випадкового блукання, модель ММАР (від англ. *multifractal model of asset return*) і модель польоту Леві.

Детальний розгляд названих моделей становить, насамперед, практичний інтерес, оскільки моделі стохастичних ФС активно застосовуються в різних галузях науки та техніки, наприклад, при моделюванні трафіка в телекомунікаційних системах (див., наприклад, [45, 46]).

#### 1.4.2. Узагальнена функція Вейерштрасса

Узагальненою функцією Вейерштрасса називають комплекснозначну функцію виду [26]:

$$GW(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \exp(i\hat{b}^n t)) \exp(i\varphi_n)}{\hat{a}^n},$$

де  $\varphi_n$  — довільна фаза,  $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ . За умови  $\hat{b} = \lambda$ ,  $\hat{a} = \lambda^{D-2}$ , узагальнена функція Вейерштрасса зводиться до функції Вейерштрасса-Мандельброта  $WM(t)$  [26].

При створенні детермінованих моделей ФС ми вважали  $\varphi_n = \text{const}$  (у найпростішому ви-

падку —  $\varphi_n = 0$ ). Якщо ж зробити фазу  $\varphi_n$  випадковою величиною, розподіленою за деяким заданим законом на інтервалі  $[0, 2\pi]$ , то отримаємо модель стохастичного ФС.

З урахуванням того, що  $GW(t)$  є комплекснозначною функцією дійсного аргументу  $t$ , при моделюванні ФС зручніше використовувати модифікацію косинусної функції Вейерштрасса-Мандельброта, отриману з урахуванням фази  $\varphi_n$  [13]:

$$MW_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(D-2)n} \cos(\lambda^n t + \varphi_n).$$

Важливо, що незалежно від закону розподілу  $\varphi_n$  розмірність одержуваного стохастичного ФС залишається рівною  $D$  [13].

#### 1.4.3. Модель узагальненого броунівського руху

Модель узагальненого броунівського руху (УБР) була запропонована Б. Мандельбротом та Дж. Ван Нессом у 1968 р. [47]. В англomовній літературі цю модель називають fBm (*fractional Brownian motion*). Автором останнього терміна є Б. Мандельброт (див., наприклад, [43, 47, 48]). До речі, є відомості [43], що автором ідеї УБР є А.М. Колмогоров, який опублікував роботу [49] ще у 1940 р. Розглянемо модель УБР детальніше [8, 47, 50, 51].

Броунівський сигнал — це сигнал  $X(t)$ , який отримано на основі реєстрації залежного від часу положення броунівської частинки щодо однієї з осей координат.

Вважається, що гауссівський сигнал  $X(t)$  зі стандартним відхиленням  $\sigma$  підпорядковується моделі УБР, якщо приріст

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1), \quad t_2 > t_1$$

має гауссівський розподіл, що характеризується виразом

$$F_{\Delta X}(x) \equiv P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}(t_2 - t_1)^H}} \times \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\tilde{\sigma}(t_2 - t_1)^H}\right)^2\right) du. \quad (12)$$

Дельта-дисперсія у моделі УБР дорівнює

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \tilde{\sigma}^2 |t_2 - t_1|^{2H}. \quad (13)$$

Параметр  $H$  у виразах (12) і (13) — показник (або параметр) Херста. Його значення задовольняють співвідношенню  $0 < H \leq 1$ . За умови  $H = 0.5$  модель УБР збігається із класичною моделлю броунівського руху.

Математичне сподівання приросту сигналу (структурна функція 1-го порядку) визначається виразом:

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{\sigma} (t_2 - t_1)^H. \quad (14)$$

Формула (14) допускає узагальнення на структурні функції порядку  $q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ). Використовуючи співвідношення (12), можна показати, що

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|^q] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{\sigma} (t_2 - t_1)^{qH}.$$

Прирости мають властивість статистичної самоподібності, яка математично виражається таким чином:

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{r^H} (X(t + \Delta t) - X(t)),$$

для будь-якого  $r > 0$ .

Обчислимо фрактальну розмірність сигналу УБР. Зробимо це за тією самою схемою, що і для класичного броунівського руху. Основна відмінність полягає в тому, що тут оцінка числа квадратів має вигляд:

$$N(\Delta t) \approx \frac{\tilde{\sigma}}{\Delta t^{2-H}},$$

що призводить до співвідношення

$$D = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln N(\Delta t)}{\ln \Delta t} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln \Delta t^{H-2}}{\ln \Delta t} = 2 - H.$$

Видно, що за умови  $H = 0.5$  ми отримуємо фрактальну розмірність класичного броунівського сигналу.

У роботі [47] сигнал УБР було подано у вигляді стохастичного інтеграла для  $t \geq 0$ :

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \times \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] d\tilde{W}(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\tilde{W}(s) \right\},$$

де  $\tilde{W}$  позначає вінерівський процес, визначений на інтервалі  $(-\infty, \infty)$ .

Зазначимо, що на практиці при програмній реалізації генерації ФС у рамках моделі УБР використовують два основні методи: метод Девіса і Харта (метод ДНМ), запропонований Р. Девісом та Д. Хартом у 1987 р. [50], та метод спектрально-го синтезу (метод SSM), де застосовується перетворення Фур'є [51].

Слід також зазначити, що сигнали УБР мають сингулярності касп-типу [28]. Сигнали УБР належать до нестационарних сигналів (див., наприклад, [51]). Більш того, сигнал УБР є унікальним  $H$ -SSSI процесом, що має гауссівський розподіл та значення введеної нижче характеристичної експоненти  $\alpha = 2$  [43].

І ще декілька слів щодо термінології. У деяких роботах модель УБР, в якій сигнал визначається лише для  $t \geq 0$ , називають односторонньою моделлю УБР, або моделлю УБР типу Рімана-Ліувілля [52].

#### 1.4.4. Персистентність та антиперсистентність

Введемо для функцій, які описують сигнали з певним значенням показника Херста  $H$  у рамках моделі УБР, позначення  $X_H(t)$ . Вважаючи для зручності, що  $\langle X_H(t) \rangle = 0$ , де  $\langle \dots \rangle$  — операція усереднення за ансамблем реалізацій, можна показати, що взаємна кореляційна функція (ВКФ) майбутніх приростів  $X_H(t)$  з минулими  $-X_H(-t)$ , нормована на дисперсію  $X_H(t)$ , дорівнює

$$\tilde{C}(t) = \frac{\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1.$$

Видно, що за умови  $H = 0.5$  ВКФ  $\tilde{C}(t)$  перетворюється на нуль для будь-яких значень  $t$ , як і має бути для випадкового процесу із незалежними приростами. Однак при  $H \neq 0.5$  ми отримуємо  $\tilde{C}(t) \neq 0$  незалежно від  $t$ . У цьому проявляється основна властивість моделі УБР, яка полягає у персистентності (коли зберігається тенденція зміни характеру сигналу) або антиперсистентності. За умови  $H > 0.5$  підтримується існуюча тенденція. Якщо в цьому випадку прирости були додатними протягом деякого проміжку часу в минулому, тобто відбувалося збільшення сигналу, то й надалі в середньому ймовірнішим

буде його збільшення. Таким чином, для сигналу з  $H > 0.5$  тенденція до збільшення в минулому означає тенденцію до збільшення в майбутньому і, більш того, це справедливо для довільно великих значень  $t$ . І навпаки, тенденція до зменшення у минулому означає, у середньому, продовження зменшення у майбутньому. Випадок  $H < 0.5$  характеризується антиперсистентністю. У цьому випадку зростання в минулому означає зменшення в майбутньому, а тенденція до зменшення в минулому робить імовірним збільшення в майбутньому (див., наприклад, [2]).

Таким чином, фізичний сенс показника Херста  $H$  випадкового ФС полягає в тому, що він показує, чи є сигнал, який вивчається, персистентним або антиперсистентним.

#### 1.4.5. Фрактальні шуми. Зв'язок фрактальності із спектральними характеристиками

Іноді стохастичні ФС називають шумами. Найчастіше це відбувається в теорії сигналів, радіофізиці, радіотехніці, радіолокації та ін., де випадкові сигнали є шкідливими і заважають — на відміну від корисних сигналів, які, як правило (але не завжди), мають більш детермінований характер.

Оскільки, як ми вже зазначали раніше, конкретні часові реалізації стохастичних сигналів і відповідні частотні характеристики, одержувані за допомогою ОПФ, мають випадковий характер, то для їх описування користуються не випадковими характеристиками — автокореляційною функцією (АКФ) сигналу  $\tilde{R}(t)$  та його енергетичним спектром  $\tilde{W}(f)$ .

Як відомо (див., наприклад, [2]), АКФ стохастичного сигналу  $X_H(t)$  задається співвідношенням

$$\tilde{R}(\tau) = E[X_H(t)X_H^*(t-\tau)],$$

де «\*» — операція комплексного спряження.

Автокореляційна функція випадкового сигналу  $\tilde{R}(\tau)$  і його енергетичний спектр  $\tilde{W}(f)$  пов'язані між собою за допомогою ОПФ (див., наприклад, [2]):

$$\tilde{W}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau,$$

$$\tilde{R}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(f) \exp(i2\pi f\tau) df.$$

Інтегрування  $\tilde{R}(\tau)$  і  $\tilde{W}(f)$  за відповідною змінною дає енергію сигналу  $E_s$ :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(f) df.$$

Відомо, що для стохастичних сигналів енергетичні спектри (спектральні щільності потужності сигналу) дуже часто підпорядковуються степеневим законам із постійним спектральним індексом  $\beta$  (див., наприклад, [2]):

$$\tilde{W}(f) \propto f^{-\beta}. \quad (15)$$

Добре відомий білий шум, у якого значення в конкретний момент часу ніяк не залежить від значень у всі інші моменти часу, має АКФ у вигляді  $\delta$ -функції Дірака:

$$\tilde{R}(t) = \delta(t).$$

Тоді легко отримати, що його енергетичний спектр має вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{W}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-i2\pi ft) dt = A \exp(-i2\pi f \cdot 0) = Af^0. \end{aligned}$$

Отже, для білого шуму  $\beta = 0$ . На практиці часто зустрічається так званий рожевий шум (фліккер-шум), для якого  $\beta = 1$ . Шум із  $\beta = 2$  називають коричневим шумом, а з  $\beta = 3$  — чорним шумом.

У рамках моделі УБР для ФС спектральний індекс  $\beta$  пов'язаний з параметром Херста  $H$  простим співвідношенням:

$$\beta = 2H + 1. \quad (16)$$

Із співвідношення (16) випливає, що ФС, які описуються моделлю УБР ( $0 < H < 1$ ), мають спектральний показник  $\beta$  ( $1 < \beta < 3$ ).

Фрактальний сигнал, що відповідає моделі класичного броунівського руху ( $H = 0.5$ ), належить до класу коричневих шумів ( $\beta = 2$ ).

Із співвідношення (16) також видно, що при переході від білого до рожевого, коричневого або чорного шуму все сильніше проявляється персистентність.

Рожевий і чорний шуми дуже поширені у природі. Рожеві шуми виникають у багатьох фізичних системах і знаходять дивовижні естетичні застосування у музиці та інших видах мистецтва.

Чорні спектри описують розвиток у часі багатьох природних, техногенних і соціальних катастроф. Повені, посухи, падіння курсу валют на фінансовому ринку, аварійні ситуації на об'єктах критичної інфраструктури (зокрема, перебої у подачі електроенергії) — через свої чорні спектри подібні неприємності трапляються нерідко по кілька разів поспіль.

Таким чином, існує зв'язок між спектральними (спектральний індекс  $\beta$ ) і фрактальними (показник Херста  $H$  та фрактальна розмірність  $D$ ) характеристиками ФС. Однак такий зв'язок не є взаємно однозначним. Насправді, для випадкового ФС енергетичний спектр матиме значений характер залежності, а тому такий ФС можна класифікувати як кольоровий шум. Проте зворотної відповідності немає. Формула (18) є справедливою для ФС, тобто коли відомо, що сигнал фрактальний. Якщо цього не відомо, то її застосовувати не можна, оскільки не кожен кольоровий шум є фрактальним сигналом. Сподіваємося, що знання та розуміння цього факту убереже від «відкриття» фрактальних властивостей об'єктів там, де їх немає зовсім.

#### 1.4.6. Інші моделі

Крім розглянутих вище існують інші моделі ФС, але вкрай обмежений обсяг цього огляду не дає можливості розглянути навіть основні з них, до яких, поза сумнівами, належать моделі мультифрактального броунівського руху, мультифрактального гауссівського шуму, мультифрактального випадкового блукання, *MMAR* (від англ. *multifractal model of asset return*), узагальненого процесу Коші, альфа-стабільних процесів, узагальнених процесів Орнштейна–Уленбека, а також модель на основі циклоїдальних функцій [53] і цілий набір каскадних моделей МФС (детерміновані та стохастичні каскади), добре описаний у [54].

## 2. Фрактальний аналіз сигналів і процесів

### 2.1. Особливості фрактального аналізу

Дослідник-практик, який має намір застосувати фрактальний (а точніше, монофрактальний, званий іноді ще «гомогенним» [55]) аналіз, наражається на факт, що досі немає загальноприйнятого розуміння, які саме методи та числові характеристики входять до складу фрактального аналізу. Різні автори під терміном «фрактальний аналіз» мають на увазі абсолютно різні, а іноді й погано сумісні речі (див., наприклад, [56–58]). Отже, необхідно розібратися, що ж є сучасним фрактальним аналізом сигналів і процесів.

Найпростіший варіант фрактального аналізу [56, 58, 59] зводиться до обчислення однієї чи декількох фрактальних розмірностей, все різноманіття яких було розглянуто у першій частині нашого огляду [1]. Однак на сьогодні такий підхід уже безнадійно застарів, оскільки безпосереднє обчислення таких розмірностей саме для сигналів з тих чи інших причин виявляється занадто складним. За останні тридцять років розроблено багато методів обчислення інших фрактальних розмірностей, які є добрими оцінками попередніх. Основна перевага таких методів полягає в тому, що вони створювалися безпосередньо для аналізу сигналів і процесів, а не множин довільної природи (наприклад, атракторів у фазовому просторі).

Хоча ці методи і розрізняються за підходами, що використовуються в них, як зазначають автори [60], більшість із них укладаються в простий алгоритм з трьох кроків:

- 1) вимірюється деяка кількісна характеристика сигналу з використанням масштабованої величини;
- 2) будується графік залежності логарифму цієї характеристики від логарифма масштабованої величини, після чого проводиться апроксимація лінійною регресією;
- 3) із використанням отриманого кутового коефіцієнта лінійної регресії оцінюється величина фрактальної розмірності або пов'язаної з нею величини (наприклад, показника Херста).

Розглянемо найпопулярніші серед фахівців методи монофрактального аналізу сигналів і процесів докладніше. Оскільки таких методів у



нашому огляді наводиться досить багато, важливою є послідовність їх розгляду. Ми дотримувалися наступного принципу. Першими розглядалися методи, засновані на одновимірному перетворенні Фур'є досліджуваного сигналу. Після них викладено методи, у яких безпосередньо оцінюється та чи інша фрактальна розмірність. Далі розглядаються методи, базовані на обчисленні показника Херста. За ними йдуть методи, що базуються на складніших числових характеристиках і підходах. Методи усередині кожної з груп хронологічно упорядковані, що дозволяє зрозуміти логіку розвитку тієї чи іншої ідеї.

Велика кількість розглянутих нами методів монофрактального аналізу пояснюється тим, що вони розроблялися паралельно в абсолютно різних галузях науки і техніки (від фінансів до квантової механіки, від математики до медицини). Незважаючи на те, що різні дослідники в цих областях стикалися з розв'язанням формально схожих задач, судячи з публікацій, багато з них не тільки не читали один одного, а й взагалі не підозрювали про існування таких робіт. Непряме підтвердження цьому дають, зокрема, оглядові статті [31, 51, 57, 60, 61] і монографії [54, 62]. На жаль, ці якісні роботи, написані в різні роки висококваліфікованими фахівцями, містять згадки в середньому про п'ять-шість окремих методів.

Нижче ми спробуємо виправити цей недолік, представивши до уваги читача понад п'ять десятків різних методів монофрактального аналізу одновимірних сигналів і процесів. Незважаючи на велику кількість аналізованих методів, ми не беремо на себе відповідальність стверджувати, що це найповніший огляд з усіх можливих, оскільки процес створення нових методів триває й досі. Як приклад наведемо роботу [63], що вийшла у 2017 р. і присвячена розв'язанню задач фрактального аналізу в екології. У цій роботі запропоновано три досить простих, формально нових методи, в яких у різних поєднаннях повторюються ідеї, оприлюднені значно раніше за дату виходу роботи, до того ж зовсім іншими авторами.

## 2.2. Метод розмірності Фур'є

Ідея методу розмірності Фур'є, званого також методом потужнісного спектра (метод PSA) [51, 62], полягає в тому (див., наприклад, [16, 51, 62]), що для фрактального сигналу  $s(t)$  при  $\omega \rightarrow \infty$

його потужнісний спектр Фур'є має вигляд  $P(\omega) \sim |\omega|^{-\beta}$ , де величина спектрального індексу  $\beta$  безпосередньо пов'язана з фрактальною розмірністю Фур'є  $D_F$  простим співвідношенням

$$\beta = 5 - 2D_F. \quad (17)$$

Співвідношення (17) було отримане 1979 р. М. Беррі (M. Berry) [64] і часто називається формулою Беррі. Зауважимо, що формула Беррі справедлива лише у рамках моделі УБР ( $1 < \beta < 3$ ).

Багато відомих фахівців (див., наприклад, [60]) вважають, що метод розмірності Фур'є уперше був викладений у 1984 р. А. Пентландом (A. Pentland) [65]. Між тим, основна ідея методу була сформульована вже 1979 р. тим же М. Беррі [64]. З огляду на це роком створення методу розмірності Фур'є, на нашу думку, справедливо вважати саме 1979 р.

Повернемося до алгоритму аналізованого методу. Як відомо, потужнісний спектр сигналу  $P(\omega)$  пов'язаний з його амплітудним спектром Фур'є  $\hat{S}(\omega)$  співвідношенням

$$P(\omega) = |\hat{S}(\omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2.$$

Оскільки на практиці для реальних сигналів і процесів усі обчислення виконуються числовими методами, замість безперервного сигналу  $s(t)$  розглянемо дискретний сигнал  $s_i$ ,  $i = 1, N$ , де  $N$  – кількість відліків сигналу.

Обчисливши за допомогою, наприклад, швидкого перетворення Фур'є, амплітудний дискретний спектр сигналу  $\hat{S}_j$ ,  $j = -n, n$ , отримуємо його дискретний потужнісний спектр  $P_j = |\hat{S}_j|^2$  і беремо його додатну половину  $P_k$ ,  $k = 1, n$ . Далі апроксимуємо отриманий потужнісний спектр  $P_k$  за допомогою функції  $\hat{P}_k = c|k|^{-\beta}$ . У подвійних логарифмічних координатах ця степеневая залежність перетворюється на лінійну:

$$\ln \hat{P}_k = C - \beta \ln k, \quad C = \ln c.$$

Апроксимацію здійснюємо методом найменших квадратів (див., наприклад, [16, 66]), для чого спочатку будуємо функціонал:

$$F(C, k) = \left\| \ln P_k - \ln \hat{P}_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \left[ \ln P_k - (C - \beta \ln k) \right]^2.$$

а потім мінімізуємо його. Для цього вимагаємо одночасної рівності нулю часткових похідних від даного функціоналу:

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$$

Розв'язуючи останню систему відносно  $\beta$  і  $C$ , отримуємо

$$\beta = \frac{\sum_{k=1}^n \ln k \sum_{k=1}^n \ln P_k - n \sum_{k=1}^n (\ln P_k) \ln k}{n \sum_{k=1}^n (\ln k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \ln k \right)^2}; \quad (18)$$

$$C = \frac{\sum_{k=1}^n (\ln k)^2 \sum_{k=1}^n \ln P_k - \sum_{k=1}^n \ln k \sum_{k=1}^n (\ln P_k) \ln k}{n \sum_{k=1}^n (\ln k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \ln k \right)^2}. \quad (19)$$

У результаті, підставляючи величину  $\beta$ , яка задається виразом (18), у співвідношення  $D_F = (5 - \beta)/2$ , отримуємо шукане значення фрактальної розмірності Фур'є  $D_F$ . Похибка визначення величини  $\beta$  задається співвідношенням [66]:

$$\sigma_\beta^2 = \frac{\frac{n}{n-2} \sum_{k=1}^n (\ln P_k - (C - \beta \ln k))^2}{n \sum_{k=1}^n (\ln k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \ln k \right)^2}, \quad (20)$$

що дозволяє оцінити похибку визначення величини  $D_F$  як  $\sigma_D = \sigma_\beta / 2$ .

Додамо, що автори [67] стверджують, що після видалення з аналізованого сигналу низько-частотного тренду описуваний метод забезпечує обчислення величини  $D_F$  з точністю до двох знаків після коми. Для підвищення точності методу розмірності Фур'є також використовуються різні спектральні вікна в частотній області [68].

Метод фрактальної розмірності Фур'є у комбінації з використанням ковзної віконної функції у часовій області з початку 1990-х рр. успішно застосовується для проведення процедури сегментації складних сигналів (англ. *Fractal Dimension Segmentation*) за допомогою віконних функцій шириною не менше 32 відліків [67].

Будучи заснованим на перетворенні Фур'є, описуваний метод успадкував недоліки Фур'є-аналізу дискретних сигналів, зокрема, вплив накладання спектрів на отриманий результат (див., наприклад, [51]).

Метод розмірності Фур'є часто передбачає фільтрацію сигналу та обчислення розмірності в ковзному часовому вікні [50, 69]. Особливо можна відзначити модифікацію даного методу [69], у якій застосовується параболічна віконна функція у часовій області та видалення частини точок при побудові лінійної регресії.

На сьогодні метод розмірності Фур'є є одним із найпопулярніших методів оцінювання фрактальної розмірності сигналів і процесів (див., наприклад, [58, 66, 70]).

### 2.3. Метод періодограм Ломба

Цей метод був запропонований М. Ломбом у 1976 р. [71]. Метод періодограм Ломба, певною мірою, є розвитком методу розмірності Фур'є. Розглянемо його суть.

Нехай  $\epsilon$  дискретний фрактальний сигнал  $x_i \equiv x(t_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Періодограма Ломба цього сигналу визначається співвідношенням

$$P_L(\omega) = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \frac{\left[ \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \sin \omega(t_i - \tau) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \omega(t_i - \tau)} + \frac{\left[ \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cos \omega(t_i - \tau) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \cos^2 \omega(t_i - \tau)} \right\},$$

де  $\omega = 2\pi f$  — кутова частота, а величина  $\tau$  задається виразом

$$\operatorname{tg}(2\omega\tau) = \frac{\sum_{i=1}^N \sin 2\omega t_i}{\sum_{i=1}^N \cos 2\omega t_i}.$$

Лінійна регресія, побудована методом найменших квадратів у координатах  $\log P_L(\omega)$  і  $\log \omega$ , дозволяє оцінити спектральний індекс  $\beta$ .

Метод періодограм Ломба зустрічається у роботах спеціалістів, які використовують монофрактальний аналіз [72].

## 2.4. Метод CGSA

Метод CGSA (від англ. *coarse graining spectral analysis*), запропонований у 1991 р. Й. Ямамото (Y. Yamamoto) і Р. Хафсоном (R. Hughson) [73] та доопрацьований ними у 1993 р. [74], є розвитком ідеї методу розмірності Фур'є і дозволяє розділити фрактальну та гармонічну компоненти сигналу, а також оцінити спектральний індекс  $\beta$  без урахування впливу гармонічної компоненти на потужнісний спектр сигналу. Ідея методу полягає в наступному (див., наприклад, [74, 75]).

У рамках моделі УБР [47] для фрактального процесу  $x(t)$  виконується співвідношення

$$s(ht) = h^H s(t),$$

причому рівність слід розуміти в тому сенсі, що процеси в обох частинах рівності мають одну й ту ж саму статистичну функцію розподілу.

Важливо, що для фрактального процесу його масштабування у часовій області не призводить до зміни показника Херста  $H$ , а отже, не змінює його потужнісний спектр. Водночас таке перетворення гармонічного сигналу впливає на потужнісний спектр останнього. Саме ця відмінність дозволяє розділити фрактальну і гармонічну компоненти сигналу та усунути вплив гармонічної компоненти на оцінку спектрального індексу фрактального сигналу.

Отже, нехай є дискретний фрактальний сигнал  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . На його основі будуються  $K$  допоміжних сигналів  $s(i, i_0) = s_{i_0+i}$ ,  $i = \overline{0, M-1}$ , які мають тривалість  $M$  і починаються з відліку за номером  $i_0$ .

Також над вихідним сигналом проводиться CG-операція (від *coarse graining*), або ренормалізація, яка являє собою  $h$ -разове розріджування, де  $h = 2, 3, 4, \dots$ . У результаті виходить  $K$  сигналів  $s_h(i, i_0) = s_{i_0+ih}$ ,  $i = \overline{0, M-1}$ .

Далі будується потужнісний спектр сигналу  $s(i, i_0)$ :

$$S_{xx}(n) = \frac{1}{K} \sum_{i_0}^K \left| \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} s(k, i_0) e^{-j2\pi kn/M} \right|^2,$$

$$n = \overline{0, M/2-1},$$

де зовнішня сума обчислюється за  $K$  наявними допоміжними сигналами, що відрізняються один від одного величиною  $i_0$ .

Аналогічним чином обчислюється кроспектр сигналів  $s(i, i_0)$  і  $s_h(i, i_0)$ :

$$S_{xx_h}(n) = \frac{1}{K} \sum_{i_0}^K \left[ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} s(k, i_0) e^{-j2\pi kn/M} \times \left( \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} s_h(k, i_0) e^{-j2\pi kn/M} \right)^* \right], \quad (21)$$

$$n = \overline{0, M/2-1},$$

де « $*$ » — операція комплексного спряження.

Якщо  $s(i, i_0)$  є гармонічним сигналом із частотою  $\omega$ , то  $s_h(i, i_0)$  виявляється гармонічним сигналом із частотою  $h\omega$ . Тому при  $h \neq 1$  кроспектр  $S_{xx_h}(n) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$ , оскільки два гармонічні сигнали з різними частотами є ортогональними. Зрозуміло, з потужнісним спектром  $S_{xx}(n)$  нічого подібного не відбувається.

Якщо ж  $s(i, i_0)$  є самоафінним фрактальним сигналом, то  $s(i, i_0)$  і  $s_h(i, i_0)$  мають однакові закони розподілу, а тому

$$\frac{\|S_{xx_h}(n)\|}{\|S_{xx}(n)\|} = h^H, \quad (22)$$

звідки за допомогою рівняння лінійної регресії у координатах  $\log(\|S_{xx_h}(n)\|/\|S_{xx}(n)\|)$  і  $\log h$  можна оцінити показник Херста  $H$ . Це дійсно так, якщо в аналізованому сигналі немає гармонічної складової.

Якщо ж присутність гармонічної компоненти (однієї чи навіть кількох) хоча б підозрюється, то краще використовувати складніший підхід.

Введемо фіксований зсув  $L$  для задавання величини  $i_0$  так, щоб  $i_0 = Lk$ ,  $k = \overline{0, K-1}$ . У чисельнику співвідношення (22) слід використовувати

вати вираз

$$\overline{S_{xx_h}}(n) = \sqrt{\|S_{xx_h}(n)\| \|S_{xx_{1/h}}(n)\|}.$$

Звернемо увагу на те, що у другому співмножнику під коренем « $1/h$ » означає операцію, обернену до децимації. Для її проведення будується сигнал, у якому кожна точка вихідного сигналу повторюється  $h$  разів поспіль.

Крім того, замість формули (21) слід використовувати

$$\|S_{xx_h}(n)\| = \frac{2}{K-2} \sum_{k=3}^K G'_{h,n,k},$$

$$\text{де } G'_{h,n,k} = \frac{\|S_{h,n,k-1} \cdot S'_{h,n,k}\|}{\|S_{h,n,k-1}\|},$$

$$S'_{h,n,k} = G_{h,n,k} e^{-j(\Theta_{h,n,k} + \pi/2 - \delta\Theta_{h,n,k})}, \quad k = \overline{3, K},$$

$$\delta\Theta_{h,n,k} = \Theta_{h,n,k-1} - \Theta_{h,n,k-2},$$

$$S_{h,n,k} \equiv S_{xx_h}(n, k) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x(k, i_0) e^{-j2\pi kn/M} \times \left( \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_h(k, i_0) e^{-j2\pi kn/M} \right)^* = G_{h,n,k} e^{-j\Theta_{h,n,k}},$$

$$n = \overline{0, M/2-1}.$$

Виходячи з власного досвіду, автори методу рекомендують дотримуватися таких інструкцій [74]:

1) величину  $M$  слід обирати у вигляді степеня двійки, причому  $M \leq 0.9N$ ;

2) величину  $K$  потрібно зафіксувати ( $K = 10$ ). Затримку  $L$  необхідно обчислювати за формулою

$$L = \frac{N - M}{K - 1};$$

3) величину  $i_0$  слід використовувати у вигляді  $i_0 = Lk$ , де  $k = \overline{2, K-1}$ . При обчисленні потужнісного спектра сигналу рекомендується використання спектральних вікон;

4) у більшості практичних випадків крос-спектри достатньо обчислити лише для  $h = 2$  і  $h = 1/2$ . Тоді метод дозволяє отримати коефіцієнт «фрактальної потужності», що присутня в

даному сигналі:

$$K_f = \frac{\sum_{n=0}^{M/2-1} \overline{S_{xx_2}}(n)}{\sum_{n=0}^{M/2-1} S_{xx}(n)}, \quad 0 \leq K_f \leq 1.$$

Якщо  $K_f = 0$ , то сигнал є суто гармонічним, якщо ж  $K_f = 1$ , то сигнал виявляється суто фрактальним. Проміжна ситуація ( $0 < K_f < 1$ ) відповідає адитивній суміші фрактального та гармонічного сигналів.

Метод CGSA успішно застосовується на практиці (див., наприклад, [51, 75]).

## 2.5. Клітинний метод

Клітинний метод (англ. *box-counting method*), іноді званий також звичайним клітинним методом (англ. *ordinary box-counting*), мабуть, є найстарішим методом практичного оцінювання фрактальних розмірностей. Автори [60] стверджують, що цей метод був запропонований Д. Расселлом (*D. Russell*) 1980 р. у [76] для оцінювання розмірностей дивних атракторів. Проте Б. Мандельброт у своїй основній праці [11] як джерело ідеї клітинного методу вказує роботу [77], яка вийшла друком ще у 1932 р. Цей метод дозволяє досить просто оцінити ємнісну розмірність  $D_C$ . Стосовно аналізу сигналу або процесу  $s(t)$ , представленого у вигляді дискретного вектора даних  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , його суть полягає в наступному (див., наприклад, [16, 56, 60]).

Оскільки область значень сигналу  $s_i$  залишається безперервною множиною (відрізком  $[\min(s_i), \max(s_i)]$ , де  $\min(s_i)$  і  $\max(s_i)$  — мінімальне та максимальне значення  $s_i$  на області існування  $i = \overline{1, N}$ ), її необхідно дискретизувати. Це можна зробити за  $N$  рівнями. Тоді сигнал  $s_i$  можна представити у вигляді матриці  $S_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , яка містить  $N$  ненульових точок і є фактично бітовим зображенням графіка сигналу на декартовій площині.

Далі будується ітераційний процес, на кожному кроці  $k$  ( $k = \overline{1, k_{\max}}$ ) якого це зображення покривається сіткою з  $M_k = a^{2k}$  квадратів зі стороною  $r_k = a^{-k}$ , де  $a$  — деяке ціле число, причому  $a \geq 2$ , і рахується кількість квадратів  $R_k$ , до кожного з яких потрапила хоча б одна точка



з аналізованого зображення. Ітераційний процес формально триває, доки кількість квадратів по горизонталі (або вертикалі) залишатиметься меншою від кількості відліків сигналу  $N$ . Іншими словами, величина  $k_{\max}$  — це максимальна величина  $k$ , для якої ще виконується співвідношення  $a^k < N$ .

Зв'язок між кількістю зайнятих квадратів  $R_k$  і стороною квадрата  $r_k$  апроксимується степеневою залежністю  $\hat{R}_k = cr_k^{-D_C}$ , де  $C$  — деяка стала величина. У подвійних логарифмічних координатах ця залежність перетворюється на лінійну:  $\log \hat{R}_k = C - D_C \log r_k$ , де  $C = \log c$ . Для обчислення величини ємнісної розмірності  $D_C$  можна використовувати результати застосування методу найменших квадратів із попереднього підрозділу (формули (20)–(22)). Тоді отримуємо:

$$D_C = \frac{\sum_{k=1}^n \log r_k \sum_{k=1}^n \ln R_k - n \sum_{k=1}^n (\log R_k) \ln r_k}{n \sum_{k=1}^n (\log r_k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \log r_k \right)^2}; \quad (23)$$

$$C = \frac{\sum_{k=1}^n (\log r_k)^2 \sum_{k=1}^n \log R_k - \sum_{k=1}^n \log r_k \sum_{k=1}^n (\log R_k) \ln r_k}{n \sum_{k=1}^n (\log r_k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \log r_k \right)^2}; \quad (24)$$

$$\sigma_D^2 = \frac{\frac{n}{n-2} \sum_{k=1}^n \left( \log R_k - (C - D_C \log r_k) \right)}{n \sum_{k=1}^n (\log r_k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \log r_k \right)^2}. \quad (25)$$

На практиці здебільшого використовується діадна сітка, для якої  $a = 2$ . Оскільки  $M_k = 2^{2k}$  і  $r_k = 2^{-k}$ , то у формулах (23)–(25) зручно вибрати логарифм за основою 2, що призведе до спрощення даних формул.

Основним недоліком клітинного методу [60] є виникнення так званого виснаження (*depletion*), коли через скінченність відліків аналізованого сигналу  $N$  при великих значеннях  $n$  залежність  $\log R_k$  від  $\log r_k$  починає суттєво відрізнятись

від лінійної. Зрозуміло, це призводить до зниження точності оцінки  $D_C$ , тому такі точки доводиться викидати з розгляду, що додає до алгоритму неабияку частку суб'єктивізму. Більше того, деякі автори (див., наприклад, [60]) вважають, що клітинний метод дає задовільні результати тільки для статистично самоподібних сигналів і взагалі є недостатньо теоретично обґрунтованим [78]. У свою чергу, автор [79] пропонує після кожної ітерації випадковим чином змінювати положення сітки, яка покриває об'єкт, щоб знизити залежність результату від цього положення. Автор [80] відзначає наявність залежності результату від конкретних розмірів клітин.

Поліпшити ситуацію покликані різні модифікації клітинного методу. Найбільш відомі серед них метод дійсних кліток, метод сосисок Мінковського та варіаційний метод. Разом з тим, будучи найстарішим методом оцінювання фрактальної розмірності сигналів, клітинний метод продовжує успішно використовуватись фахівцями (див., наприклад, [51, 58]).

На думку авторів [60], до різновидів клітинного методу належить також запропонований у 1983 р. Б. Мандельбротом [11] і модифікований у 1990 р. [81] метод компасної розмірності, званої також лінійковою або ділильною. Цей метод уже було розглянуто у підрозділі 2.4.14 першої частини огляду [1]. Приклади його успішного застосування можна знайти у роботах [25, 58].

## 2.6. Метод дійсних клітин

Метод дійсних клітин (англ. *real box-counting method*) як розвиток ідеї клітинного методу був запропонований у 1987 р. К. Адлером, П. Картером та Р. Коулі [82, 83]. Основна ідея методу полягає в тому, щоб замінити цілий лічильник зайнятих клітин  $R_k$ , який використовується у звичайному клітинному методі, на дійсний лічильник  $R_k^*$ , який будується з таких міркувань.

У [82] показано, що будь-який сигнал  $s(t)$ , заданий на проміжку  $t \in [t_0, t_1]$ , шляхом використання афінних перетворень  $f = as + b$  і  $x = ct + d$ , де  $a, b, c$  і  $d$  — деякі числа, доцільно привести до вигляду  $f(x) \in [0, 1]$  і  $x \in [0, 1]$ . Тепер на кожному  $k$ -му кроці алгоритму одиничний квадрат, що вийшов, розбивається не на клітини, а на вертикальні смуги шириною  $r_k = r^{-k}$ ,

де  $r \geq 2$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . При цьому кожна  $j$ -та смуга  $(j-1)r^{-k} \leq x \leq jr^{-k}$  ( $j=1, r^k$ ) характеризується ваговою функцією  $w_{k,j}(f)$ , яка пропорційна довжині смуги, на яку припадає графік функції  $f(x)$ :

$$w_{k,j}(f) = \left[ \max_{k,j}(f) - \min_{k,j}(f) \right] r^k,$$

де  $\max_{k,j}(f)$  і  $\min_{k,j}(f)$  — максимальне та мінімальне значення функції  $f(x)$ , обчислені всередині  $j$ -тої смуги.

Дійсний лічильник  $R_k^*$  пов'язаний з ваговою функцією співвідношенням

$$R_k^* = \sum_{j=1}^{r^k} w_{k,j}(f).$$

Його слід використовувати замість цілого лічильника  $R_k$  у співвідношеннях (22)–(24) для обчислення ємнісної розмірності  $D_C$ . Звернемо увагу на те, що на практиці найчастіше використовується діадна сітка, для якої  $r_k = 2^{-k}$ .

Установлено (див., наприклад, [82, 83]), що наведені вище міркування є справедливими не тільки у випадку, коли аналізується безперервний сигнал  $s(t)$ , але й для дискретизованого сигналу  $s_i$ ,  $i=1, N$ . При цьому одержувані оцінки вагової функції  $\hat{w}_{k,j}(f)$  задовольняють співвідношення  $\hat{w}_{k,j}(f) \leq w_{k,j}(f)$ , а відмінності, що виникають між ними, досить швидко зменшуються зі зростанням величини  $k$ .

## 2.7. Диференціальний клітинний метод

Диференціальний клітинний метод запропонований у 1992 р. Н. Саркар (N. Sarkar) та Б. Чаудхурі (B. Chaudhuri) [84]. Подальшого розвитку цей метод набув у роботі [85]. Його основна ідея полягає в наступному [86].

Нехай є дискретний сигнал  $s_k$ ,  $k=1, N$ . Область декартової площини, де розташований графік цього сигналу, послідовно покривається квадратами зі стороною  $r = \zeta/N$ , де величина  $\zeta$  набуває цілих значень від  $\zeta_{\min} = 2$  до  $\zeta_{\max} = [N/2]$  з кроком  $\Delta\zeta = 1$ . Тоді уздовж осі абсцис з'являються  $[N/\zeta]$  підінтервалів завдовжки  $\zeta$ , які пронумеруємо за допомогою лічильника  $i$ ,  $i=1, [N/\zeta]$ . Нехай кожен квадрат по осі ординат має свій унікальний порядковий номер  $j$ .

Для кожного окремого підінтервалу, який має фіксоване значення  $i$ , графік сигналу покривається деякою кількістю квадратів. Визначаємо порядкові номери  $j$  квадратів, що містять мінімальне та максимальне значення сигналу на даному підінтервалі, та позначаємо їх  $J_{\min}(i)$  і  $J_{\max}(i)$  відповідно. Після цього будуюмо величину

$$S(r) = \sum_{i=1}^{[N/\zeta]} (J_{\max} - J_{\min} + 1).$$

Відомо, що  $S(r) \propto (1/r)^{D_C}$ . Тому оцінку ємнісної розмірності графіка досліджуваного сигналу  $D_C$  отримуємо шляхом обчислення кутового коефіцієнта лінійної регресії, побудованої методом найменших квадратів у координатах  $\ln S(r)$  і  $\ln(1/r)$ .

Слід брати до уваги, що, порівняно з клітинним методом, розглянутим вище, диференціальний клітинний метод дає дещо завищену оцінку ємнісної розмірності.  $D_C$ .

Додамо, що алгоритм диференціального клітинного методу може бути дещо покращений шляхом адаптивного зміщення вздовж осей абсцис та ординат положення деяких покриваючих графік сигналу квадратів [87], хоча в цілому позитивний ефект у підвищенні точності оцінки фрактальної розмірності виявляється порівняно невеликим.

## 2.8. Розширений клітинний метод

Розширений клітинний метод (англ. *extended counting method*) був запропонований у 1997 р. К. Сендау (K. Sandau) та Х. Курцем (H. Kurz) у роботі [88] як альтернатива клітинному методу.

Принцип розширеного клітинного методу можна сформулювати в такий спосіб [64]. Клітинний метод застосовується до великої кількості підмножин фрактальної множини, і максимальна з фрактальних розмірностей цих підмножин оголошується розмірністю всієї множини. З іншого боку, клітинний метод, застосований для підмножин, є занадто спрощеним, оскільки лінійна регресія будується, власне, лише за двома точками. Водночас розширений клітинний метод взагалі не використовує регресію. Міра, на основі якої отримується оцінка фрактальної розмірності, зростає монотонно зі збільшенням складності сигналу та визначається

областю сигналу з найбільшою складністю. Останнє найкращим чином відповідає основній вимозі до фрактальної розмірності.

Ідея розширеного клітинного методу полягає в наступному [88, 89]. Нехай  $A$  є множина, яка є підмножиною у просторі  $R^2$ . Зафіксуємо початкову точку  $(x_0, y_0) \in R^2$  і представимо простір  $R^2$  як суму непересічних «атомарних» квадратів  $S_{ij}^{(1)}$ , бічна сторона яких дорівнює  $d_1$ :

$$R^2 = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} S_{ij}^{(1)},$$

$$S_{ij}^{(1)} = [x_0 + i d_1, x_0 + (i+1) d_1] \times [y_0 + j d_1, y_0 + (j+1) d_1].$$

Визначаємо атомарні квадрати, що містять точки з множини  $A$ .

Зафіксуємо деяке число  $M \in \mathbb{N}$ , зване дослідницьким множником (*exploratory factor*), і розглянемо множину не обов'язково непересічних «досліджуваних» квадратів

$$S_{kn}^{(2)} = [x_0 + k d_1, x_0 + k d_1 + d_2] \times [x_0 + n d_1, x_0 + n d_1 + d_2],$$

де  $d_2 = M d_1$  і  $k, n \in \mathbb{Z}$ . Кожен такий досліджуваний квадрат  $S_{kn}^{(2)}$  містить  $M^2$  атомарних квадратів  $S_{ij}^{(1)}$ , деякі з яких містять точки з множини  $A$ . Для кожного окремого досліджуваного квадрата  $S_{kn}^{(2)}$  отримуємо кількість  $N_{kn}$  атомарних квадратів  $S_{ij}^{(1)} \subset S_{kn}^{(2)}$ , які містять точки з множини  $A$ .

Знаходимо  $N_{\max} = \max_{k,n} N_{kn}$  та оцінюємо величину

$$\text{xdim}[d_1, d_2](A) = \frac{\log N_{\max}}{\log d_2 - \log d_1} = \frac{\log N_{\max}}{\log M}.$$

Для відповідних параметрів  $d_1$  і  $d_2$  величина  $\text{xdim}[d_1, d_2](A)$  може трактуватися як оцінка фрактальної розмірності множини  $A$ . За аналогією з попередніми методами, цю розмірність можна назвати розширеною клітинною розмірністю та позначити як  $D_{\text{Ext}}$ .

Таким чином, для використання даного методу на практиці слід зафіксувати такі параметри: положення початкової точки  $(x_0, y_0)$ , розмір бічної сторони атомарного квадрата  $d_1$  і дослідницький множник  $M$ .

Для узагальнення застосування розширеного клітинного методу для аналізу дискретного сигналу  $s(ih)$ ,  $i = 1, N$ , заданого з кроком  $h$ , необхідно: 1) визначити параметри методу; 2) визначити атомарні квадрати, які має перетинати графік досліджуваної функції  $s(t)$ . Розв'язання цих двох задач є далеко не очевидним. Проблема у тому, що немає загальноприйнятого алгоритму відновлення функції безперервного аргументу  $s(t)$  за її дискретними відліками  $s(ih)$ . Зазвичай із цією метою використовується кусково-лінійна інтерполяція, хоча принципово можливий інший підхід (наприклад, застосування самоподібних конструкцій). Більше того, щоб виявити атомарні квадрати, які перетинаються графіком досліджуваної функції, доцільно провести попереднє масштабування. Це означає, що розширений клітинний метод має застосовуватися не безпосередньо до  $s(ih)$ , а до функції

$$y(i) = C s(ih).$$

Тут уведено додатковий параметр  $C$ , який залежить від кількості відліків  $N$  і від розмаху сигналу  $x(ih)$ ,  $i = 1, N$ . Для визначення величини  $C$  використовується таке правило:

$$C \left[ \frac{\max_i s(ih) - \min_j s(jh)}{N-1} \right] = C_y,$$

де  $C_y$  — масштабуючий множник.

У результаті графік кусково-лінійної функції, що проходить через точки  $(i, y(i))$ , опиняється усередині прямокутника з розмірами  $(N-1) \times C_y (N-1)$ .

У роботі [89] автори на практиці використовували два різні набори параметрів методу: 1)  $d_1 = 1$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $y_0 = y(1) - 0.5$  і 2)  $d_1 = 2$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $y_0 = y(1) - 0.5$ . Очевидно, що у другому випадку атомарні квадрати були вдвічі більшими, ніж у першому.

Легко помітити, що поки що нічого не сказано про те, як на практиці обирають дослідницький множник  $M$  і масштабуючий множник  $C_y$ . Автори [89] досліджували залежності точності оцінки фрактальних розмірностей  $D$  відомих сигналів від цих параметрів. Виявляється, вони мають досить складний характер і до того ж залежать від самої оцінюваної величини  $D$ . Загальна тенденція полягає в тому, що отримува-

на величина розширеної клітинної розмірності  $D_{Ext}$  збільшується зі зростанням  $C_y$ , і зменшується зі зростанням  $M$ . Автори [89] відмовилися формулювати якесь універсальне правило вибору параметрів даного методу, проте рекомендують при виборі  $M$  дотримуватися співвідношення  $N/(d_1 M) \approx 5$ , а масштабуючий множник  $C_y$  брати із проміжку [1, 3].

До недоліків методу розширеної клітинної розмірності відноситься [60], насамперед, те, що він застосовується виключно для бінарних послідовностей, а по-друге, що він має тенденцію до деякого завищення оцінки самої фрактальної розмірності. І нарешті, у роботі [89] зроблено висновок про небажаність застосування даного методу для аналізу сигналів, отриманих на основі моделі УБР.

На нашу думку, ці недоліки не є такими критичними, щоб відмовитися від використання даного методу. По-перше, досліджуваний сигнал можна перетворити на бінарну послідовність, наприклад, одним з п'яти способів, запропонованих у методі Петросяна, що розглядається нижче. По-друге, не всі реальні аналізовані сигнали мають відношення виключно до моделі УБР. По-третє, якщо застосовувати розширений клітинний метод паралельно з іншими методами, то тенденція до завищення оцінок фрактальної розмірності є не такою вже й важливою.

## 2.9. Клітинний метод з мультирозрізненням

Ще один варіант клітинного методу, який отримав назву «клітинний метод з мультирозрізненням» (англ. *multiresolution box-counting method*), запропонували Б.С. Рагхавендра (B.S. Raghavendra) і Д.Н. Дутт (D.N. Dutt) у 2010 р. [31].

Нехай є дискретний сигнал  $s_i$ ,  $i = 1, N$ , кожна точка якого на декартовій площині може бути задана у вигляді пари її координат  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, N$ . Алгоритм методу складається з чотирьох кроків.

**Крок 1.** Розглянемо дві точки  $s_i$  і  $s_{i+1}$  на кривій, яка являє собою графік досліджуваного сигналу. Відстань між цими точками за обома координатами позначимо відповідно  $\delta t = x_{i+1} - x_i = 1/f_s$  і  $h = y_{i+1} - y_i$ , де  $f_s$  — частота відліків сигналу. Розмір клітини, що покриває дві точки, дорівнює  $\delta t$ , кількість клітин такого розміру становить

$b(i) = \lceil |h|/\delta t \rceil$ , де  $\lceil a \rceil$  — операція знаходження найближчого до  $a$  цілого числа, що лежить на координатній прямій праворуч від  $a$ . Далі проводиться коригування величини  $y_{i+1}$ . Якщо  $h > 0$ , то  $y_{i+1} = y_i + |h| - \delta t$ , якщо ж  $h < 0$ , то  $y_{i+1} = y_i - |h| + \delta t$ . Процедура повторюється для всіх точок кривої. Загальна кількість клітин, необхідних для покриття кривої на даному рівні розрізнення  $r = 1/f_s$ , виявляється рівною

$$B(r) = \sum_{i=1}^{N-1} b(i).$$

**Крок 2.** Здійснюємо децимацію сигналу вдвічі, щоб часове розрізнення стало рівним  $r = 2/f_s$ , а  $\delta t = 2/f_s$ . Повторюємо процедуру, описану в кроці 1, для цього нового розрізнення. Після цього оцінюємо загальну кількість клітин, необхідних для покриття всієї кривої цьому рівні розрізнення.

**Крок 3.** Повторюємо процедуру, описану в кроці 1, для розрізень  $r = 3/f_s, \dots, R/f_s$ , де  $R$  — максимально грубе розрізнення, на якому можна розглядати криву. У результаті отримуємо залежність  $B(r)$  для різних значень  $r$ .

**Крок 4.** Із використанням лінійної регресії у координатах  $\log B(r)$  і  $\log(1/r)$  отримуємо оцінку фрактальної розмірності  $D$ , яка дорівнює кутовому коефіцієнту цієї регресії.

Автори [31] пояснюють назву методу тим, що оцінювання кількості клітин, необхідних для покриття всієї кривої, проводиться на різних часових масштабах, а отже, з мультирозрізненням.

Даний метод, будучи досить простим у реалізації, сьогодні успішно застосовується на практиці (див., наприклад, [31]).

## 2.10. Метод Холла–Вуда

Цей метод був запропонований П. Холлом (P. Hall) і А. Вудом (A. Wood) у 1993 р. [90]. Метод є ще одним із варіантів розвитку клітинного методу. Його ідея полягає в наступному [91, 92].

Нехай є графік сигналу, заданий у вигляді множини точок:

$$\left\{ (t, s_t) : t = \frac{i}{N}, i = \overline{0, N} \right\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (26)$$

Позначимо через  $A(\varepsilon)$  загальну площу клітин, які на масштабі перетинаються лінійною



інтерполяцією розглянутого графіка сигналу (26). Кількість таких клітин дорівнює  $N(\varepsilon)$ . Величини  $A(\varepsilon)$  і  $N(\varepsilon)$  пов'язані співвідношенням  $A(\varepsilon) \propto N(\varepsilon)\varepsilon^2$ . Ємнісна розмірність графіка сигналу  $D_C$  може бути отримана за допомогою виразу

$$D_C = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log A(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

На масштабі  $\varepsilon_l = l/N$ , де  $l = 1, 2, \dots$ , оцінку величини  $A(l/N)$  можна отримати за допомогою співвідношення

$$\hat{A}(l/N) = \frac{l}{N} \sum_{i=1}^{\lfloor N/l \rfloor} |s_{il/N} - s_{(i-1)l/N}|,$$

де [...] — операція виділення цілої частини числа.

Оцінка ємнісної розмірності  $D_C$ , званої іноді розмірністю Холла–Вуда  $D_{HW}$  (див., наприклад, [92]), проводиться за допомогою обчислення кутового коефіцієнта лінійної регресії, що будується методом найменших квадратів у координатах  $\log \hat{A}(l/N)$  і  $\log(l/N)$ . Це можна здійснити з використанням співвідношення:

$$\hat{D}_{HW} = 2 - \left\{ \sum_{l=1}^L (\Lambda_l - \bar{\Lambda}) \log \hat{A}(l/N) \right\} \times \left\{ \sum_{l=1}^L (\Lambda_l - \bar{\Lambda})^2 \right\}^{-1},$$

$$\Lambda_l = \log(l/N), \quad \bar{\Lambda} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \Lambda_l,$$

де  $L \geq 2$ .

Автори методу в роботі [90] рекомендували використовувати  $L = 2$ , що дозволяє мінімізувати похибку, яка виникає через скінченність величини  $\varepsilon$ . У цьому випадку останній вираз можна спростити:

$$\hat{D}_{HW} = 2 - \frac{\log \hat{A}(2/N) - \log \hat{A}(1/N)}{\log 2}.$$

На сьогодні метод Холла–Вуда є добре відомим фахівцям-практикам (див., наприклад, [91, 92]).

## 2.11. Метод сосисок Мінковського

Як розумна альтернатива клітинному методу досить широко застосовується метод сосисок Мінковського [82]. У цьому методі ємнісна роз-

мірність  $D_C$  обчислюється з використанням геометричних об'єктів, званих «сосисками Мінковського» (*Minkowski sausages*). Якщо у просторі  $\mathbb{R}^N$  є деяка множина  $E$ , то  $\varepsilon$ -сосиска Мінковського  $E(\varepsilon)$  містить усі точки, які перебувають на відстані, що не перевищує  $\varepsilon$ , від деякого елемента множини  $E$ . Узагальнений об'єм сосиски  $\lambda_N(E(\varepsilon))$  в даному просторі приблизно задається співвідношенням

$$\lambda_N(E(\varepsilon)) \approx k N_{2\varepsilon}(E) \varepsilon^N,$$

де  $N_{2\varepsilon}(E)$  — мінімальна кількість куль діаметром  $2\varepsilon$ , необхідних для покриття множини  $E$ ,  $k$  — деякий коефіцієнт пропорційності. Установлено [93, 94], що

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\lambda_N(E(\varepsilon)) / \varepsilon^N)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Якщо ж у якості множини  $E$  виступає графік функції  $f(x)$ , який зручно позначити як  $G_f$ , то отримуємо

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\lambda_2(G_f(\varepsilon)) / \varepsilon^2)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Здавалося б, метод досить простий. Однак тут виникає неприємна ситуація, пов'язана із нелінійністю зазначеної залежності. Причина цього ось у чому. Розглянемо, як  $\varepsilon$ -сосиска Мінковського покриває відрізок довжиною  $L$ . У якості узагальненого об'єму сосиски тут виступає її площа, яка становить

$$\lambda_2(G_f(\varepsilon)) = \pi \varepsilon^2 + 2L\varepsilon.$$

Тоді функція

$$\begin{aligned} \frac{\log(\lambda_2(G_f(\varepsilon)) / \varepsilon^2)}{\log(1/\varepsilon)} &= \frac{\log(\pi \varepsilon + 2L) + \log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \\ &= 1 + \frac{\log(\pi \varepsilon + 2L)}{\log(1/\varepsilon)} \end{aligned}$$

у подвійних логарифмічних координатах за великих значень  $\varepsilon$  виявляється суттєво нелінійною, що у випадку її апроксимації прямою лінією призводить до значних похибок визначення  $D_C$ . Особливо чутливими до цього ефекту є точки локальних екстремумів графіка  $G_f$ , де й трапляються найбільші значення  $\varepsilon$ , тобто сосиска виявляється особливо «товстою».

## 2.12. Варіаційний метод

Для усунення описаного вище недоліку методу сосисок Мінковського і в рамках подальшого розвитку методу дійсних клітин у 1989 р. Б. Дубуком (B. Dubuc) та К. Трико (C. Tricot) був запропонований варіаційний метод [91], який іноді також називають варіаційним клітинним методом (див., наприклад, [95]).

У рамках розробки цього методу спочатку було запропоновано замінити  $\varepsilon$ -сосиску Мінковського на  $\varepsilon$ -покриття з використанням методу горизонтальних структуруючих елементів, який зазвичай позначають аббревіатурою HSEM (від англ. *horizontal structuring element method*). При покритті розглянутого вище відрізка довжиною  $L$  площа  $\varepsilon$ -покриття з використанням HSEM як площа паралелограма з висотою  $2\varepsilon$  та стороною  $L$  складає  $\lambda_2(G_f(\varepsilon)) = 2L\varepsilon$ , а тому функція

$$\frac{\log(\lambda_2(G_f(\varepsilon))/\varepsilon^2)}{\log(1/\varepsilon)} = \frac{\log(2L) + \log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = 1 + \frac{\log(2L)}{\log(1/\varepsilon)}$$

виявляється у зазначеному вище сенсі набагато менше нелінійною, а отже, забезпечує більш високу точність оцінки  $D_C$ .

Хоча принципово є можливим безпосередньо реалізувати й таку процедуру обчислення фрактальної розмірності  $D_C$  будь-якого графіка  $G_f$ , автори [82] розробили набагато ефективніший алгоритм. Йдеться про варіаційний метод, який використовує, з одного боку, ідею  $\varepsilon$ -покриттів з використанням HSEM, а з іншого боку, є добре згладженою версією методу дійсних клітин. Розглянемо цей алгоритм докладніше [82].

Нехай  $f^*(x, \varepsilon) = \max\{f(y) \mid |y - x| \leq \varepsilon\}$  і  $f_*(x, \varepsilon) = \min\{f(y) \mid |y - x| \leq \varepsilon\}$ . Тоді повна  $\varepsilon$ -варіація функції  $f(x)$  на області  $I$  визначатиметься виразом

$$V_f(\varepsilon) = \int_I (f^*(x, \varepsilon) - f_*(x, \varepsilon)) dx. \quad (27)$$

Установлено, що  $V_f(\varepsilon) = \lambda_2(G_f(\varepsilon))$ , а тому пряме обчислення  $\lambda_2(G_f(\varepsilon))$  можна замінити на обчислення інтеграла (27).

Припустимо, що функцію  $f(x)$  вже обчислено в  $N+1$  еквідистантних точках  $x_j = j/N$ ,

$j = \overline{0, N}$ . Оберемо дві величини — цілу  $R < N$  і дійсну  $\varepsilon_j = k_j/R$ , де  $k_j \in \mathbb{N}$  і  $1 = k_1 < k_2 < \dots < k_m$ . Величина  $R$  визначає розрізнення, з яким оцінюватиметься повна варіація. Слід зазначити, що її не рекомендується обирати надто близькою до  $N$ , щоб уникнути можливих проблем із розрізненням. Далі для кожної смуги  $\varepsilon_j$  визначаємо максимальне і мінімальне значення функції  $f(x)$  на кожному інтервалі  $x \in [k/R - \varepsilon_j, k/R + \varepsilon_j]$ , де  $k = \overline{0, R}$ . Отримані величини позначимо за допомогою  $\hat{f}^*(k/R, \varepsilon_j)$  і  $\hat{f}_*(k/R, \varepsilon_j)$ . Тоді повна  $\varepsilon_j$ -варіація функції  $f(x)$  задається співвідношенням:

$$\hat{V}_f(\varepsilon_j) = \frac{1}{R+1} \sum_{k=0}^R (\hat{f}^*(k/R, \varepsilon_j) - \hat{f}_*(k/R, \varepsilon_j)).$$

Тепер оцінку фрактальної розмірності  $D_C$  можна отримати як кутовий коефіцієнт апроксимуючої прямої, побудованої на графіку залежності  $\log(\hat{V}_f(\varepsilon_j)/\varepsilon_j^2)$  від  $\log(1/\varepsilon_j)$  для  $j = \overline{1, m}$ . Зробити це можна, наприклад, за допомогою простої модифікації співвідношень (18)–(20), які були розглянуті у підрозділі 2.2.

Автори [96] стверджують, що серед розглянутих вище методів саме варіаційний забезпечує найкращу точність одержуваних результатів. На сьогодні цей метод досить активно використовується фахівцями-практиками [88].

Зауважимо, що у російськомовній літературі, згадуючи метод варіацій, посилаються на роботу [97], яку було опубліковано у 2004 р. Описувані в ній дослідження стосуються відносно нового наукового напрямку — екофізики, де методи статистичної фізики застосовуються для аналізу фінансових рядів. Сам термін «екофізика» був запроваджений Ю. Стенлі у 1995 р. [98].

## 2.13. Метод Берлаги–Клейна

У 1986 р. американські геофізики Л.Ф. Берлага (L.F. Burlaga) і Л.В. Клейн (L.W. Klein) у статті [99] запропонували метод обчислення фрактальної розмірності сигналу, заснований, по суті, на оцінюванні його ємнісної розмірності  $D_C$  (див. пункт 2.4.2 у першій частині нашого огляду [1]), що зводиться до визначення довжини графіка досліджуваного сигналу.

Нехай  $s$  є сигнал  $s(t)$ , визначений для  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$  і заданий у вигляді набору з  $N$

еквідистантних дискретних відліків  $s(t_i) \equiv s_i$ ,  $t_i = t_{\min} + (i-1)(t_{\max} - t_{\min})/(N-1)$ ,  $i = 1, N$ . Поділимо область існування сигналу на однакові проміжки з тривалістю  $\tau$  так, щоб виконувалася умова  $\tau > (t_{\max} - t_{\min})/(N-1)$ , інакше кажучи, щоб кожен отриманий проміжок містив хоча б один дискретний відлік сигналу. Оскільки у загальному випадку на  $k$ -му проміжку може перебувати  $M$  таких відліків, охарактеризуємо кожний проміжок  $t \in [t_k, t_k + \tau]$  оцінкою середнього значення сигналу:

$$\hat{s}(t_k) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M s_j.$$

Тут під  $s_j$  слід мати на увазі ті відліки сигналу  $s(t_i)$ , які перебувають на  $k$ -му проміжку. Тоді «довжина» ступінчастої кривої, що апроксимує графік сигналу  $s(t)$  на деякому інтервалі  $0 \leq t \leq T_0$ , де  $T_0 = n\tau$  і  $n \in \mathbb{N}$  (за виключенням сталих горизонтальних відрізків), визначається співвідношенням

$$L(\tau) = \sum_{k=1}^n \left| \hat{s}(t_k + \tau) - \hat{s}(t_k) \right|.$$

Важливо, що для статистично самоафінних кривих функція  $L(\tau)$  має вигляд

$$L(\tau) = L_0 \tau^{-S},$$

де  $L_0$  і  $S$  — деякі сталі величини. Перша з них нас не цікавить, натомість друга виявляється корисною. Оцінку величини  $S$  та її похибки  $\sigma_S$  можна отримати за допомогою обчислення кутового коефіцієнта лінійної регресії в координатах  $\log(L(\tau))$  і  $\log(1/\tau)$ , використовуючи співвідношення (18)–(20), наведені у підрозділі 2.2.

Важливо, що величина  $S$  пов'язана з показником Херста  $H$  простим співвідношенням:  $S = 1 - H$ . Нагадаємо, що у межах моделі УБР фрактальна розмірність, яка базується на показникові Херста, пов'язана з ним співвідношенням  $D_H = 2 - H$  [11, 99, 100]. Цю фрактальну розмірність можна назвати розмірністю Берлаги–Клейна  $D_{BK}$ . У статті [101] показано, що розмірність Берлаги–Клейна  $D_{BK}$  є досить вдалою оцінкою емнісної розмірності  $D_C$ .

На думку автора [102], необхідність створення методу Берлаги–Клейна підтверджується такими міркуваннями. Доки розглядається монофрак-

тальний сигнал за відсутності завад, для його аналізу цілком достатньо застосовувати метод розмірності Фур'є. Якщо ж досліджується монофрактальний сигнал на фоні адитивної, статистично стаціонарної завади, то достатньо розбити аналізований сигнал на декілька інтервалів і застосувати метод розмірності Фур'є до усередненого за отриманими реалізаціями спектра.

Однак якщо статистичні характеристики завади швидко змінюються у часі, то таке усереднення виявляється неефективним, а тому слід застосовувати інші методи оцінювання фрактальної розмірності. Одним з таких методів є метод Берлаги–Клейна (див., наприклад, [72]).

## 2.14. Метод Хігучі

Цей метод фрактального аналізу був запропонований Т. Хігучі (*T. Higuchi*) у 1988 р. [102]. За словами автора, він є розвитком ідей, закладених у методі Берлаги–Клейна. Низка авторів (див., наприклад, [103]) відзначають високу ефективність методу Хігучі при оцінюванні фрактальної розмірності сигналів і процесів різноманітного походження [56, 103].

Розглянемо алгоритм методу Хігучі [61, 102]. Припустимо, що існує сигнал  $s(t)$ , визначений для  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$  і заданий у вигляді набору з  $N$  еквідистантних дискретних відліків  $s(t_i)$ ,  $t_i = t_{\min} + (i-1)(t_{\max} - t_{\min})/(N-1)$ ,  $i = 1, N$ . Тут зручно ввести позначення для одного відліку сигналу як  $s(t_i) \equiv s_i$ .

Тепер на основі вихідного сигналу будуюмо  $k$  допоміжних сигналів, які позначимо  $s_k^m$ . Принцип їх побудови такий:

$$s_k^m : s_m, s_{m+k}, s_{m+2k}, \dots, s_{m + \left\lceil \frac{N-m}{k} \right\rceil k},$$

де  $m = \overline{1, k}$ , [...] — операція обчислення цілої частини числа,  $k \in \mathbb{N}$ , причому  $1 \leq k \ll N$ .

Довжина графіка кожного такого сигналу  $s_k^m$  визначається співвідношенням

$$L_m(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{N-m}{k} \right\rceil} \left| s_{m+ik} - s_{m+(i-1)k} \right| \left[ \frac{N-1}{\left\lceil \frac{N-m}{k} \right\rceil k} \right].$$

Тут конструкція  $(N-1)/(k[(N-m)/k])$  є нормуючим множником.

Усереднюючи довжини графіків допоміжних сигналів, отримуємо

$$\langle L(k) \rangle = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k L_m(k).$$

Установлено, що за умови  $\langle L(k) \rangle \propto k^{-D}$  досліджуваний сигнал є фрактальним з фрактальною розмірністю  $D$ . Останнє означає, що фрактальна розмірність  $D$  може бути визначена як кутовий коефіцієнт лінійної регресії, побудованої в координатах  $\log \langle L(k) \rangle$  і  $\log(1/k)$ . Для цього зручно використовувати модифіковані відповідним чином співвідношення (18)–(20), наведені у підрозділі 2.2.

На практиці також часто виникає питання, у яких межах варто змінювати величину  $k$ . Автор [102] пропонував спочатку брати  $k = 1; 2; 3; 4$ , а потім для  $k > 4$  використовувати  $k = \lceil 2^{(j-1)/4} \rceil$  при  $j = 11, 12, 13, \dots$ . Максимальне значення величини  $k$  має бути значно меншим за кількість відліків сигналу  $N$ . Так, при  $N = 2^{15} - 2^{17}$  використовувалося  $k_{\max} = 2^{11}$ , іншими словами,  $N/k_{\max} = 16 - 64$ . Досвід авторів цього огляду каже, що ці величини мають відрізнятися не менше ніж на порядок. Водночас автори [104] доводять, що в більшості випадків достатньо забезпечити  $k_{\max} = 6$  і  $N > 125$ .

Отримана у результаті застосування даного методу фрактальна розмірність  $D$  часто називається розмірністю Хігучі  $D_{\text{Hig}}$  (див., зокрема, [61]). У [102] на прикладі аналізу модельних монофрактальних сигналів з відомими фрактальними розмірностями продемонстровано, що метод Хігучі забезпечує найкращу точність оцінювання фрактальної розмірності порівняно з методом розмірності Фур'є та методом Берлагі-Клейна.

Іноді зустрічається застосування методу Хігучі в ковзному вікні у часовій області (ширина вікна становить від 160 до 1 280 пікселів) [105]. Наприклад, у роботі [106] повідомляється про успішне використання вікна шириною 128 відліків, а в роботі [56] — 70...100 відліків. До речі, в останній роботі одержувану розмірність  $D_{\text{Hig}}(t)$  називають біжучою фрактальною розмірністю Хігучі. Така розмірність добре відображає нестационарність аналізованого сигналу.

У роботі [107] продемонстровано, що залежність  $\log \langle L(k) \rangle$  від  $\log(1/k)$  може успішно апро-

ксимуватися не однією, а двома різними прямими, що призводить до отримання двох різних оцінок  $D_{\text{Hig}}$  для різних діапазонів масштабів.

На сьогодні метод Хігучі широко застосовується дослідниками у різних галузях науки та техніки [31, 56, 61, 70, 72, 87, 104, 106].

## 2.15. Метод Катца

Цей метод був запропонований М. Катцем (М. Katz) у 1988 р. [108]. Ідея методу полягає в наступному (див., наприклад, [31, 61]).

Фрактальну розмірність кривої у загальному вигляді можна визначити таким чином [11]:

$$D = \frac{\log L}{\log d}, \quad (28)$$

де  $L$  — загальна довжина кривої;  $d$  — діаметр кривої (відстань між початковою точкою кривої та найбільш віддаленою її точкою).

У випадку дискретного сигналу  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , маємо

$$L = \sum_{i=1}^{N-1} \text{dist}(i, i+1), \quad d = \max_{2 \leq i \leq N} (\text{dist}(1, i)),$$

де  $\text{dist}(a, b)$  — відстань між двома точками на декартовій площині. У нашому випадку вона складає

$$\text{dist}(i, i+1) = \sqrt{(s_{i+1} - s_i)^2 + 1},$$

$$\text{dist}(1, i) = \sqrt{(s_i - s_1)^2 + (i-1)^2}.$$

Автор методу запропонував у формулі (28) замість загальної довжини кривої  $L$  та її діаметра  $d$  використовувати їх усереднені значення. З огляду на це фрактальна розмірність  $D_K$ , звана розмірністю Катца, визначається за формулою

$$D_K = \frac{\log(N-1)}{\log(d/L) + \log(N-1)}.$$

Метод Катца показує в цілому дещо гірші результати порівняно з методом Хігучі, проте він є більш стійким до зашумленості аналізованого сигналу [61]. Зазначимо, що іноді звучить критика методу Катца (див., наприклад, [31, 109]). Так, у 2010 р. у роботі [109], яка стала відповіддю на повідомлення авторів [31] про недостатню якість результатів, отриманих ними за допомогою даного методу. Відзначимо, що дійсно, ме-



тод Катца дає значно кращі результати для опису випадкового броунівського руху на площині, ніж для сигналів. Це пояснюється тим, що в першому випадку обидві координати мають одну й ту саму одиницю вимірювання, а в другому — ні. Усунення цього недоліку зроблено у методі Мандельброта, описаному нижче.

Тим не менш, на сьогодні метод Катца досить добре відомий фахівцям і продовжує іноді використовуватися на практиці (див., наприклад, [87, 110, 111]).

## 2.16. Метод Петросяна

Цей метод, запропонований А. Петросяном (A. Petrosian) у 1995 р. [112], є розвитком ідеї методу Катца. Його суть полягає в наступному (див., наприклад, [61, 112]).

На основі дискретного сигналу  $s_i, i = \overline{1, N}$ , генерується бінарна послідовність. Це можна зробити одним із п'ятих запропонованих методів (збережені позначення методів «а», ..., «е», введені автором у [112]):

а) метод усереднення: якщо даний відлік  $s_i$  сигналу перевищує середнє значення сигналу по всій реалізації  $\bar{s}$  ( $s_i > \bar{s}$ ), то генерується 1, інакше — 0;

б) модифікований зональний метод: якщо даний відлік сигналу  $s_i$  лежить поза смугою  $\bar{s} \pm \sigma_s$  ( $\sigma_s$  — середньоквадратичне відхилення), то генерується 1, інакше — 0;

с) диференціальний метод: якщо  $s_{i+1} \geq s_i$ , то генерується 1, інакше — 0;

д) зональний диференціальний метод: якщо  $|s_{i+1} - s_i| \geq \sigma_s$ , то генерується 1, інакше — 0;

е) модифікований зональний диференціальний метод: у зональному диференціальному методі як порогове значення замість  $\sigma_s$  використовується будь-яка, наперед задана величина  $\Delta > 0$ .

Після цього фрактальна розмірність  $D_p$ , яку можна за аналогією з попередніми методами назвати розмірністю Петросяна, визначається співвідношенням

$$D_p = \frac{\log n}{\log n + \log \left( \frac{n}{n + 0.4N_\Delta} \right)},$$

де  $n$  — довжина бінарної послідовності;  $N_\Delta$  — кількість змін знака бінарної послідовності.

Очевидно, що отриманий результат залежить від методу формування бінарної послідовності. З огляду на це в літературі (див., наприклад, [61]) іноді говорять про «а-метод Петросяна», «б-метод Петросяна» тощо.

Метод Петросяна є менш поширеним, ніж методи Хігучі або Катца, проте іноді теж використовується на практиці (див., наприклад, [87]).

## 2.17. Метод Мандельброта

У 2010 р. П. Кастільйоні (P. Castiglioni) у роботі [109] запропонував покращити метод Катца. Цей метод він назвав методом Мандельброта. Його суть полягає в наступному [109].

Нехай є дискретний сигнал  $s_i, i = \overline{1, N}$ , кожна точка якого на декартовій площині може бути задана у вигляді пари її координат  $(x_i, y_i), i = \overline{1, N}$ . Його фрактальна розмірність  $D$ , як і в методі Катца, визначатиметься співвідношенням (28), проте величини  $d$  і  $L$  будуть обчислюватися інакше. Тепер вони задаються співвідношеннями:

$$d = \max\{y_i\} - \min\{y_i\}, i = \overline{1, N}; \quad (29)$$

$$L = \sum_{i=1}^N |y_{i+1} - y_i|. \quad (30)$$

Автор [109] стверджує, що такий підхід у багатьох випадках є більш виправданим, ніж метод Катца, до того ж він виявляється більш простим у реалізації та швидким під час обчислень.

Більше того, автор [109] також пропонує ще один, більш ефективний алгоритм отримання скоригованої фрактальної розмірності, що базується на методі Мандельброта. Він складається із чотирьох кроків.

*Крок 1.* Оцінюємо величину  $d$  за допомогою формули (29) за всіма відліками сигналу  $i = \overline{1, N}$ .

*Крок 2.* Множина точок, що задають вихідний сигнал, сканується для виявлення послідовностей точок довжиною  $n_{Wj}$  (причому  $n_{Wj} \geq 8$  для забезпечення статистичної спроможності отриманих результатів), у яких їхня власна величина  $d_j$  (величина  $d$ , обчислена для такої послідовності з номером  $j$ ) задовольняє співвідношення  $d_j \geq d/2$ .

*Крок 3.* Для всіх  $k$  отриманих послідовностей з довжинами  $n_{Wj}$  ( $j = \overline{1, k}$ ) за формулами (28)–(30) обчислюються власні значення фрактальних розмірностей  $D_j$ .

Крок 4. Скоригована фрактальна розмірність оцінюється як середнє арифметичне фрактальних розмірностей, отриманих на попередньому кроці:

$$D = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k D_j.$$

У роботі [109] наводяться досить переконливі докази ефективності обох варіантів методу Мандельброта, що ґрунтуються на аналізі модельних сигналів. У літературі зафіксовано успішне застосування у методі Мандельброта ковзного вікна у часовій області із шириною від 160 до 1 280 точок [113].

Метод Мандельброта успішно застосовується на практиці (див., наприклад, [113]). Зауважимо, що фрактальну розмірність, яку отримують у такий спосіб, іноді називають розмірністю Кастільоні [113].

### 2.18. Метод довжини з мультирозрізненням

Ще один варіант розвитку ідеї методу Катца, який отримав назву «метод довжини з мультирозрізненням» (англ. *multiresolution length method*), був запропонований Б.С. Рагхавендрой (B.S. Raghavendra) і Д.Н. Дуттом (D.N. Dutt) у 2010 р. [31].

Нехай є дискретний сигнал  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , кожному точку якого на декартовій площині можна задати парою її координат  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Відстань між двома наступними точками в евклідовому просторі становить

$$\text{dist}(s_i, s_{i+1}) = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 - (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Довжина кривої, якою є графік досліджуваного сигналу на декартовій площині, на даному рівні розрізнення (позначимо його через  $r_1$ ) дорівнює

$$L(r_1) = \sum_{i=1}^{N-1} \text{dist}(s_i, s_{i+1}).$$

Змінюючи розрізнення ( $r_2 = 2r_1$ ,  $r_3 = 3r_1, \dots$ ,  $r_R = Rr_1$ , де  $R$  визначається максимально грубим розрізненням, на якому може розглядатися крива), проводимо децимацію сигналу у відповідну кількість разів та оцінюємо довжини кривої на відповідному рівні розрізнення  $L(r_2), \dots, L(r_R)$ .

Тепер розміщуємо отримані дані на координатній площині  $\log L(r)$  і  $\log(1/r)$  та апроксимуємо їх лінійною регресією за допомогою методу найменших квадратів. Кутовий коефіцієнт отриманої регресії є оцінкою фрактальної розмірності  $D$  досліджуваного сигналу.

Будучи досить простим у реалізації, цей метод успішно застосовується спеціалістами-практиками (див., наприклад, [31]).

### 2.19. Метод Шевчика

Цей метод був запропонований К. Шевчиком (C. Sevcik) у 1998 р. [114].

Нехай є дискретний сигнал  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , кожному точку якого на декартовій площині можна задати парою її координат  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Необхідно провести відображення даного сигналу на одиничний квадрат, що робиться за допомогою співвідношень

$$x_i^* = \frac{x_i}{x_{\max}}, \quad y_i^* = \frac{y_i - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}, \quad i = \overline{1, N},$$

де  $x_{\max}$  — максимальне значення  $x_i$ ,  $y_{\min}$  і  $y_{\max}$  — мінімальне та максимальне значення  $y_i$  відповідно. Після цього фрактальну розмірність  $D$  аналізованого сигналу можна оцінити за формулою

$$D = 1 + \frac{\ln L + \ln 2}{\ln[2(N-1)]},$$

де  $L$  — довжина кривої, що визначається як

$$L = \sum_{i=1}^{N-1} \text{dist}(i, i+1),$$

$$\text{dist}(s_i, s_{i+1}) = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 - (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Зрозуміло, що чим більше значення  $N$ , тим точнішою виявляється оцінка величини фрактальної розмірності  $D$ .

Деякі автори (див., наприклад, [115]) вважають метод Шевчика модифікацією методу Катца, проте сам К. Шевчик у роботі [114] категорично це спростовує.

### 2.20. Метод послідовних різниць

Метод послідовних різниць (англ. *consecutive differences method*) у 2005 р. був запропонований А. Калаузі та ін. у роботі [116]. Цей метод базу-

ється на описі складності сигналу за допомогою аналізу його похідних аж до  $n$ -го порядку. Розглянемо основну ідею методу.

Нехай є дискретний фрактальний сигнал  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Алгоритм обчислення фрактальної розмірності містить чотири кроки.

**Крок 1.** Нормалізація досліджуваного сигналу  $s_i$ . Зробити це можна так:

$$y_i = \frac{s_i - \bar{s}}{|s'|}, \quad \bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i,$$

$$|s'| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |s_i - \bar{s}|, \quad i = \overline{1, N}.$$

**Крок 2.** Обчислення похідних  $n$  перших порядків

$$y_i^{(n)} = y_{i+1}^{(n-1)} - y_i^{(n-1)}, \quad i = \overline{1, N-n}, \quad n = \overline{1, n_{\max}},$$

та коефіцієнтів на їх основі

$$m_y^{(n)} = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n} |y_i^{(n)}|.$$

**Крок 3.** Побудова лінійної регресії

$$\log(m_W^{(n)}) = (\text{slope})n + Y_{\text{int}}, \quad n = \overline{1, n_{\max}}$$

та визначення за нею величини  $Y_{\text{int}}$ . Вираз для лінійної регресії отримано за допомогою функції Вейерштрасса, а тому в останній формулі є  $m_W^{(n)}$ , а не  $m_y^{(n)}$ .

**Крок 4.** Визначення за табл. 1 коефіцієнтів  $A(n_{\max})$  і  $B(n_{\max})$ . Таблицю 1 автори [116] отримали при калібруванні методу за допомогою функції Вейерштрасса.

**Крок 5.** Визначення фрактальної розмірності  $DF$  за формулою

$$DF = A(n_{\max})Y_{\text{int}} + B(n_{\max}).$$

Для забезпечення відносної похибки обчислення  $DF$  не більше 1.5 % достатньо застосовувати  $n_{\max} = 3$  [116].

При аналізі нестационарного фрактального сигналу, для якого  $DF = DF(t)$ , автори [116] пропонують розбити сигнал  $y_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , на  $M$  сегментів, що не перетинаються, довжиною  $L = \lfloor N/M \rfloor$ , після чого вирахувати  $DF$  у кожному сегменті. Після цього весь діапазон зна-

чень отриманих фрактальних розмірностей необхідно розбити на інтервали шириною  $\Delta D$  і побудувати гістограму, яка відобразить кількість сегментів, що потрапили до кожного з таких інтервалів. Отриману гістограму потрібно апроксимувати однією або декількома функціями Гаусса. Тоді якщо досліджуваний мультифрактальний процес складається з декількох монофрактальних, їх можна буде розрізнити й оцінити відповідні розмірності. Ця ідея, на нашу думку, є дуже перспективною.

Для отримання оцінки  $DF = DF(t)$ , швидше за все, досить просто вирахувати  $DF$  у ковзному вікні шириною  $L$ . Вочевидь, що положення вікон у цьому випадку можуть перекриватися.

До речі, графік залежності фрактальної розмірності  $D$  від часу  $t$  іноді називають фрактограмою (англ. *fractogram*). Цей термін уперше був застосований у 2010 р. [31].

Таким чином, проста реалізація, обчислювальна ефективність алгоритму та невелика відносна похибка обчислення фрактальної розмірності роблять метод послідовних різниць привабливим для дослідників.

## 2.21. Метод нормалізованої щільності довжини

Метод нормалізованої щільності довжини (англ. *normalized length density method*) був запропонований А. Калаузі (А. *Kalauzi*) та ін. у 2009 р. [117]. Він є розвитком ідеї методу послідовних різниць для випадку аналізу сильно нестационарних фрактальних сигналів, коли кількість точок  $L$ , за якими проводиться оцінка фрактальної розмірності, виявляється невеликою ( $L < 30$ ). Розглянемо ідею цього методу докладніше [117].

Таблиця 1. Емпірична залежність значень коефіцієнтів  $A(n_{\max})$  і  $B(n_{\max})$  від максимального порядку використовуваної похідної  $n_{\max}$  [116]

$n_{\max}$	$A(n_{\max})$	$B(n_{\max})$
3	0.34458	2.0956
4	0.33864	2.1008
5	0.33554	2.1070
6	0.33367	2.1133
7	0.33247	2.1195

Нехай є дискретний фрактальний сигнал  $s_i$ ,  $i = 1, N$ . Алгоритм обчислення фрактальної розмірності містить такі кроки.

**Крок 1.** Нормалізація досліджуваного сигналу  $s_i$ . Зробити це можна так:

$$y_i = \frac{s_i - \bar{s}}{|s'|}, \quad \bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i,$$

$$|s'| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |s_i - \bar{s}|, \quad i = 1, N.$$

**Крок 2.** Обчислення так званої нормалізованої щільності довжини:

$$NLD = \frac{1}{N} \sum_{i=2}^N |y_i - y_{i-1}|.$$

**Крок 3.** Оцінка фрактальної розмірності  $FD$  всього сигналу за відомою величиною  $NLD$ . Автори [117] із використанням функції Вейерштрасса побудували емпіричну нелінійну функцію

$$FD = a(NLD - NLD_0)^k,$$

де параметри  $a$ ,  $NLD_0$  і  $k$  були оцінені статистично на вибірці приблизно з 4 000 реалізацій функції Вейерштрасса. Виявилось що  $a = 1.9079$ ,  $NLD_0 = 0.097178$ ,  $k = 0.18383$ .

Для дослідження сильно нестационарного фрактального сигналу кроки 2 і 3 слід проводити всередині ковзного вікна шириною  $L$ . У результаті отримуємо часову залежність  $FD = FD(t)$ .

Також слід зазначити, що операцію нормалізації (крок 1) можна проводити не для всього сигналу, як описано вище, а лише всередині ковзного вікна шириною  $L$ . У результаті отримуємо другий варіант цього методу. Хоча такий метод оцінювання фрактальної розмірності і здається, на нашу думку, не зовсім коректним, автори [117] на конкретних прикладах доводять його корисність. Більш того, слід зазначити, що його ідея перегукується з ідеєю кореляційного прийому сигналів.

### 2.22. Метод критичного показника степеневі залежності

Метод критичного показника степеневі залежності (англ. *critical exponent method*) запропонував М. Накагава (М. Nakagawa) у 1993 р. [118].

У підрозділі, присвяченому методу розмірності Фур'є, було показано, що для фрактального сигналу  $s(t)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  його потужнісний спектр Фур'є  $P(\omega) \sim |\omega|^{-\beta}$ , де величина  $\beta$  безпосередньо пов'язана з фрактальною розмірністю Фур'є  $D_F$  співвідношенням  $\beta = 5 - 2D_F$ .

Розглянемо функцію  $I_\alpha$ , яка для безперервного і дискретного сигналів задається співвідношеннями  $I_\alpha = \int_1^\infty P(v)v^\alpha dv$  та  $I_\alpha = \sum_{v=1}^\infty P(v)v^\alpha$  відповідно, де  $v = \omega / \omega_c$ ,  $\omega_c$  — частота відсікання, нижче якої залежність  $P(\omega) \sim |\omega|^{-\beta}$  вже не виконується.

Установлено, що функція  $\log I_\alpha$  має дві асимптоти:  $\log I_\alpha = 0$  при  $\alpha \ll \alpha_c$  і  $\log I_\alpha \sim \log \Omega (\alpha - \beta + 1)$  при  $\alpha \gg \alpha_c$  ( $\Omega \gg 1$ ). Величину  $\alpha_c = \beta - 1$ , яка розділяє ці два режими, називають критичним показником степеневі залежності. Фрактальна розмірність сигналу  $D$  визначається через критичну експоненту як  $D = (4 - \alpha_c) / 2$ .

У 1996 р. М. Накагава у роботі [119] на основі методу критичної експоненти ввів залежну від часу фрактальну розмірність, яка обчислюється в ковзному вікні.

Метод критичного показника степеневі залежності зустрічається у сучасних роботах з фрактального аналізу [120, 121].

### 2.23. Метод нормованої середньої автокореляції

Метод нормованої середньої автокореляції (англ. *average normalized autocorrelation method* — ANAM) запропонували М. Бігерелль (М. Bigerelle) і А. Іост (А. Iost) у 1996 р. [122].

Нехай є сигнал  $s(t)$ , числа  $a < b$  і  $\alpha \geq 1$ . Для них визначається функція:

$$M_\tau^\alpha(s, x) = \left[ \frac{1}{\tau^2} \int_0^x \int_0^x |s(x+t_1) - s(x-t_2)|^\alpha dt_2 dt_1 \right]^{1/\alpha}.$$

Усреднюючи її на інтервалі  $x \in [a, b]$ , отримуємо функцію

$$K_\tau^\alpha(s, a, b) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b \left[ \frac{1}{\tau^2} \int_0^x \int_0^x |s(x+t_1) - s(x-t_2)|^\alpha dt_2 dt_1 \right]^{1/\alpha} dx.$$



Кутовий коефіцієнт лінійної регресії, побудованої в координатах  $\log K_\tau^\alpha(s, a, b)$  і  $\log \tau$ , дає оцінку показника Гельдера цієї функції  $H(s, a, b)$ , який пов'язаний з відповідною фрактальною розмірністю  $D_{AN} \equiv D(s, a, b)$  простим співвідношенням  $D(s, a, b) = 2 - H(s, a, b)$ .

У випадку дискретного сигналу  $s(x_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , функція  $K_\tau^\alpha(s, a, b)$  задається співвідношенням

$$K_\tau^\alpha(s, a, b) = K_\tau^\alpha(s, k) = \frac{(k+1)^{-2/\alpha}}{N-2k} \times \sum_{i=k+1}^{N-k} \left[ \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k |s(x_i + j\Delta x) - s(x_i - l\Delta x)|^\alpha \right]^{1/\alpha},$$

де  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ ,  $\tau = k\Delta x$ . Установлено, що величина  $D_{AN}$  не залежить від  $\alpha$ , тому для спрощення обчислень приймають  $\alpha = 1$ .

Очевидно, що цей метод є не дуже вдалим у випадку широкого вікна  $[a, b]$ , для якого обчислюється фрактальна розмірність, оскільки вкладені одна в одну три суми роблять час обчислень надто великим. У цьому полягає, мабуть, основний недолік цього методу.

## 2.24. Метод Марагоса–Сана

Цей метод був запропонований П. Марагосом (P. Maragos) і Ф.-К. Саном (F.-K. Sun) у 1993 р. [123].

Основна ідея методу полягає у застосуванні операторів ерозії (*erosion*) і дилатації (*dilation*) з галузі математичної морфології — теорії і техніки аналізу й обробки геометричних структур, заснованої на теорії множин, топології та випадкових функціях, яка з'явилася у 1960-х рр. [124].

Нехай є дискретний сигнал  $s(i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Як функція, що відповідає так званому структурному елементу (див., наприклад, [123]), вибирається прямокутне вікно шириною в три дискретні відліки:  $g[j]$ ,  $j = -1, 0, 1$ . Тепер на кожному масштабі  $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$  будуються рекурентні функції з використанням оператора ерозії (оператор  $\oplus$ )

$$s \oplus g^{\oplus k}[i] = \max\{s[i-1], s[i], s[i+1]\}, \quad k = 1;$$

$$s \oplus g^{\oplus k+1}[i] = \max\{s \oplus g^{\oplus k}[i-1], s \oplus g^{\oplus k}[i+1]\},$$

$k \geq 2,$

та оператора дилатації (оператор  $\odot$ )

$$s \odot g^{\oplus k}[i] = \min\{s[i-1], s[i], s[i+1]\}, \quad k = 1;$$

$$s \odot g^{\oplus k+1}[i] = \min\{s \odot g^{\oplus k}[i-1], s \odot g^{\oplus k}[i+1]\},$$

$k \geq 2.$

На основі цих рекурентних функцій обчислюється функція

$$F(k) = \sum_{i=1}^N \left( (s \oplus g^{\oplus k}) - (s \odot g^{\oplus k}) \right)[i].$$

У результаті отримуємо пари  $(k, F(k))$ . Кутовий коефіцієнт лінійної регресії на площині  $\ln(F(k)/K^2)$  і  $\ln(1/K)$ , де  $K = 2k/N$ , визначає фрактальну розмірність  $D_{MS}$ , яку називають розмірністю Марагоса–Сана.

Зрозуміло, що на оцінку величини  $D_{MS}$  істотний вплив має величина  $k_{\max}$ . Її зазвичай визначають за допомогою евристичного правила, сформульованого П. Марагосом [123]. Воно говорить, що для сигналу з кількістю відліків  $N$  величина  $k_{\max}$  має задовольняти співвідношення

$$k_{\max} = \min \left[ \max \left( \frac{(D-1.2)}{1.5}, 10 \right), \frac{N}{2} \right].$$

Тут під  $D$  мають на увазі очікувану величину фрактальної розмірності сигналу.

Якщо ж такої інформації немає, необхідно провести адаптацію алгоритму до досліджуваного сигналу. Для цього спочатку слід застосувати алгоритм для  $k_{\max} = 10$  та отримати оцінку фрактальної розмірності  $D$ , після чого визначити  $k_{\max}$  за допомогою наведеного вище правила і лише тоді, застосувавши алгоритм удруге, отримати більш точну оцінку  $D_{MS}$ .

У [123] також встановлено, що для різних модельних фрактальних сигналів  $D = 1.2 \dots 1.6$  за відсутності шумів відносна похибка визначення фрактальної розмірності методом Марагоса–Сана становить  $\delta D_{MS} \sim (0.5 \dots 4.1)\%$ , що перевершує результат, показаний методом розмірності Фур'є ( $\delta D_F \sim (2.7 \dots 5.3)\%$ ). Однак у діапазоні  $D = 1.6 \dots 1.8$ , де відносна похибка першого методу збільшується ( $\delta D_{MS} \sim (2.9 \dots 8.6)\%$ ), другий метод виявляється більш ефективним ( $\delta D_F \sim (1.4 \dots 3.3)\%$ ). При оцінюванні ж фрактальної розмірності на фоні шумів величина  $\delta D_{MS}$

зі зменшенням співвідношення сигнал/шум  $q$  зростає набагато повільніше, ніж величина  $\delta D_F$ . Так, у діапазоні  $D = 1.2 \dots 1.8$  для  $q = 30$  дБ маємо  $\delta D_{MS} \sim (1.2 \dots 8.7)\%$ ,  $\delta D_F \sim (2.3 \dots 24.4)\%$ , для  $q = 20$  дБ —  $\delta D_{MS} \sim (0.8 \dots 16.9)\%$ ,  $\delta D_F \sim (5.0 \dots 47.4)\%$ , для  $q = 10$  дБ —  $\delta D_{MS} \sim 2.2 \dots 33.4\%$ ,  $\delta D_F \sim (12.6 \dots 72.9)\%$ . Більш того, для  $q \leq 10$  дБ метод розмірності Фур'є взагалі не застосовується, оскільки дає оцінки величини поза дозволеним інтервалом [1,2].

Разом з тим, деякі автори, порівнюючи методи Хігучі та Марагоса–Сана (див., наприклад, [104]), за порівняно невеликих рівнів шуму віддають перевагу методу Хігучі, відзначаючи його більш високу точність і швидкість отримання результату.

Таким чином, метод Марагоса–Сана виявляється досить завадостійким, що є його безперечною перевагою, оскільки на практиці в більшості випадків дослідник стикається з необхідністю оцінки фрактальної розмірності сигналу саме на фоні адитивної завади [125].

Згодом метод Марагоса–Сана був модифікований для аналізу мультифрактальних процесів (див., наприклад, [125]).

### 2.25. Метод узагальнених розмірностей Реньї

Узагальнені розмірності Реньї (*A. Renyi*) вже були розглянуті в пункті 2.4.6 першої частини огляду [1]. Тут же наведемо простий і оригінальний метод оцінки узагальнених розмірностей Реньї, що розвивається В. Кулішем та ін. із середини 2000-х років (див., наприклад, [126]). Алгоритм цього методу такий.

Нехай є дискретний фрактальний сигнал  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Знайдемо його мінімальне та максимальне значення:

$$s_{\min} = \min_{i=1, N} s_i, \quad s_{\max} = \max_{i=1, N} s_i,$$

після чого отримуємо величину

$$\Delta s = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{n},$$

де  $n$  — кількість інтервалів ( $1 \ll n \ll N$ ), на які розбивається вся область значень сигналу. Далі оцінимо кількість точок сигналу  $N_j$ , які потрапили до кожного з інтервалів вигляду  $[s_{\min} + (j-1)\Delta s, s_{\min} + j\Delta s]$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Тоді узагальнені розмірності Реньї можна обчислити за допомогою співвідношень

$$D_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^n N_j \log_2 N_j - N \log_2 N}{N \log_2 \Delta x},$$

$$D_q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log_2 \sum_{j=1}^n N_j^q - q \log_2 N}{\log_2 \Delta x}.$$

Автори [126] також пропонують проводити наведені вище оцінки не тільки для всього сигналу, але і у ковзному вікні шириною  $L$ . Останнє забезпечує появу часової залежності для оцінюваних узагальнених розмірностей Реньї.

Даний метод є досить простим у реалізації, хоч і не є особливо відомим.

### 2.26. Метод DFA

Метод *DFA* (від англ. *detrended fluctuation analysis*) був запропонований С.-К. Пенгом (С.-К. Peng) та ін. у 1994 р. [127]. Він є творчим розвитком ідеї, висловленої у 1985 р. Б. Мандельбротом [128]. Розглянемо цей метод докладніше [6, 51, 62, 127, 129, 130].

Нехай є дискретний сигнал  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Алгоритм методу складається із п'яти кроків.

*Крок 1.* Для сигналу  $s_i$  будується кумулятивна сума

$$y(I) = \sum_{i=1}^I [s_i - \bar{s}], \quad \bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i,$$

для всіх  $I = \overline{1, N}$ .

*Крок 2.* Графік отриманої функції  $y(I)$  ділиться на  $m$  однакових сегментів, що не перекриваються, довжиною  $L$ , причому  $m = \lceil N/L \rceil$ . Кожен сегмент позначимо через  $y_{j,k} = y(I)$ , де  $k = \overline{1, m}$  — порядковий номер сегмента,  $j = \overline{1, L}$  — номер точки всередині сегмента,  $I = (k-1)L + j$ . Оскільки в загальному випадку  $N$  на  $L$  націло не ділиться, то залишається сегмент із довжиною, меншою за  $L$ . Щоб це не впливало на кінцевий результат, розбиття сигналу на сегменти в роботі [131] рекомендується проводити двічі: зліва направо та зправа наліво. Тоді кількість одержаних сегментів подвоїться. Тому формули, наведені у кроках

3 та 4, слід розглядати з урахуванням цього подвоєння.

**Крок 3.** У межах кожного сегмента методом найменших квадратів функція  $y_{j,k}$  апроксимується лінійною регресією  $P_{j,k}^1$ , яка являє собою тренд усередині даного сегмента. Далі обчислюємо дисперсію флуктуацій усередині кожного сегмента:

$$F_k^2(L) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (y_{j,k} - P_{j,k}^1)^2, \quad k = \overline{1, 2m}. \quad (31)$$

**Крок 4.** Усереднюємо отримані дисперсії за всіма сегментами, які мають однакову довжину  $L$ , і будуємо флуктуаційну функцію

$$F(L) = \sqrt{\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{2m} F_k^2(L)}. \quad (32)$$

**Крок 5.** Цю функцію необхідно обчислити для різних значень  $L$ . У роботі [132] автори цього методу рекомендують обирати  $L = \overline{10, N}$ . Після цього отримані результати слід помістити у подвійні логарифмічні координати  $\log F(L)$  від  $\log L$ . Кутівий коефіцієнт лінійної регресії, побудованої за допомогою методу найменших квадратів, позначимо через  $\alpha$ .

Якщо  $\alpha = 0.5$ , то аналізований сигнал є білим шумом. Випадок  $0 < \alpha < 0.5$  описує антиперсистентну, а  $0.5 < \alpha \leq 1$  — персистентну поведінку сигналу. Випадок  $\alpha = 1$  відповідає так званому  $1/f$  шуму. При  $\alpha \geq 1$  кореляційна залежність у поведінці сигналу продовжує існувати, але вже не у вигляді степеневому закону. Для нас це важливо, оскільки сигнал перестає бути фрактальним. Сигнал з  $\alpha = 1.5$  називається коричневим шумом. Важливо, що його можна отримати інтегруванням сигналу білого шуму. Величина  $\alpha$  також може розглядатися як індикатор «порізаності» вихідного сигналу  $s_i$ : чим більше  $\alpha$ , тим більше згладженим виявляється сигнал. Зі спектральним індексом  $\beta$  величина  $\alpha$  пов'язана простим співвідношенням  $\alpha = (\beta + 1)/2$ .

Автори [129] стверджують, що цей метод дає дуже хороші результати, якщо кількість відліків вихідного сигналу  $N \geq 4096$ .

Наступний етап розвитку методу *DFA* почався у 2000 р., коли у роботі А. Бунде та ін. [133] з'явилася ідея використання в алгоритмі методу поліноміальної апроксимації замість лінійної. Для

цього у формулі (31) слід замінити лінійну регресію  $P_{j,k}^1$  на поліноміальну  $P_{j,k}^n$ , де  $n$  — степінь апроксимуючого полінома, а функцію  $F(L)$  — на  $F^{(n)}(L)$ , де  $L \geq n + 2$ . Після цього залежно від порядку  $n$  використовуюваного полінома стали розрізняти методи *DFA1*, *DFA2*, ..., *DFA<sub>n</sub>*.

У 2001 р. Я. Кантельхардт та ін. у роботі [131] запропонували скоригований варіант функції  $F^{(n)}(L)$ , названий модифікованою флуктуаційною функцією:

$$F_{\text{mod}}^{(n)}(L) = F^{(n)}(L) \frac{\left\langle \left[ F_{\text{shuff}}^{(n)}(L') \right]^2 \right\rangle^{1/2} L^{1/2}}{\left\langle \left[ F_{\text{shuff}}^{(n)}(L) \right]^2 \right\rangle^{1/2} L'^{1/2}}, \quad L' \gg 1,$$

де  $\left\langle \left[ F_{\text{shuff}}^{(n)}(L) \right]^2 \right\rangle^{1/2}$  — флуктуаційна функція, розрахована за формулою (32) з використанням усереднення за кількома наборами даних, отриманих перемішуванням вихідного сигналу  $x_i$ . Величину  $L'$  пропонується обирати рівною  $L' \approx N/20$ .

Важливо, що в залежності  $\log F_{\text{mod}}^{(n)}(L)$  від  $\log L$  іноді можна виділити більше однієї лінійної ділянки. У такому разі говорять про різні фрактальні розмірності досліджуваного сигналу на різних діапазонах масштабів. Як правило, подібний поділ здійснюється дослідником інтуїтивно.

Скористатися статистичним підходом у цьому випадку дозволяє ще одна модифікація методу *DFA*, запропонована у 2017 р. А. Хабібом та ін. [134] і відома як робастний метод *DFA* (*r-DFA*).

На сьогодні метод *DFA* є дуже популярним серед фахівців (див., наприклад, [55, 70, 72, 91, 129–131, 135]). Тонкощі застосування методу *DFA*, а також особливості відповідного програмного забезпечення, на нашу думку, добре викладені у роботі [136].

## 2.27. Інші методи

Аналізуючи доступні нам літературні джерела, ми виділили та ретельно вивчили понад п'ять десятків найбільш відомих методів монофрактального аналізу. На жаль, вкрай обмежений об'єм огляду не дозволяє нам поділитися всією цією інформацією із читачами. Зокрема, за межами цієї роботи залишилися такі цікаві та корисні мето-

ди, як метод варіаційної розмірності [126], метод Ліу–Чіу [32], метод перетинань нуля [66], метод Корчака [66], метод Ченів [130], метод нормованого розмаху [132], метод Мандельброта й Уолліса [137], метод автокореляційного аналізу [124], метод *AFA* (*Adaptive Fractal Analysis*) [138, 139], метод *DMA* (від англ. *detrended moving average*) [140], метод другого моменту [66], метод Пельт'є–Леві-Вехела [141], метод варіаційного графіка [135], метод варіограми [142], узагальнений метод варіограми [92], метод агрегованої дисперсії [143], метод абсолютних величин агрегованого сигналу [143], метод періодограми [144], метод, що ґрунтується на вейвлет-аналізі [33], метод, що ґрунтується на розвиненні за емпіричними модами [145], метод дисперсійного аналізу [146], метод *SWV* (від англ. *scaled windowed variance method*) [147], метод перетворення суми сигналу [69], метод регуляризаційної розмірності [148] і метод *DEA* (від англ. *diffusion entropy analysis*) [133].

Зазначимо, що у цьому огляді основну увагу ми приділили методам обчислення фрактальних розмірностей сигналів і процесів. Однак частина методів розроблялася фахівцями в галузі детермінованого хаосу, а тому вони були націлені безпосередньо на обчислення фрактальних розмірностей дивних атракторів у фазовому просторі (див., наприклад, [149–152]). До їх числа належать, зокрема, метод Грассбергера і Прокаччі [153] (1983 р.), який дозволяє оцінити кореляційну розмірність (він розглядався у першій частині нашого огляду [1]), методи Грассбергера [154] (1983 р.), Ханта і Саллівана [155] (1986 р.), Джорджиллі [156] (1986 р.), Тейлера [157] (1987 р.), Лібовича і Тота [158] (1989 р.), які є модифікаціями клітинного методу, а також багато інших.

Іноді з'являються методи, в яких характеристики, отримані у фазовому просторі, використовуються для опису сигналів і процесів. До них належить, наприклад, метод, запропонований В. Пітсікалісом і П. Марагосом у 2009 р. [159].

Також слід зазначити, що крім розглянутих вище, існують інші модифікації методу нормованого розмаху, наприклад, метод Ло [160], який дозволяє визначити наявність або відсутність у сигналу довготривалої залежності. На жаль, він не дає можливості оцінити показник Херста, а отже, і фрактальну розмірність.

Останніми роками з'явився цілий набір нових методів, що застосовуються на стику фрактального і кореляційного аналізів. Серед них, наприклад, метод *MF-X-PF* (від англ. *multifractal cross-correlation analysis based on the partition function approach*), метод *MFSMXA* (від англ. *multifractal statistical moment crosscorrelation analysis*), метод *MF-HXA* (від англ. *multifractal height cross-correlation analysis*), метод *MF-X-DFA* (від англ. *detrended fluctuation analysis extended into multifractal detrended cross-correlation analysis*), метод *MF-DMA* (від англ. *multifractal detrending moving-average analysis*), метод *MF-X-DMA* (від англ. *detrending moving-average analysis extended into cross multifractal formulism*), метод *MFCCA* (від англ. *multifractal cross-correlation analysis*), метод *MFDPXA* (від англ. *multifractal detrended partial correlation analysis*) тощо (див., наприклад, [161]). На жаль, розгляд цих методів виходить далеко за рамки цієї оглядової статті.

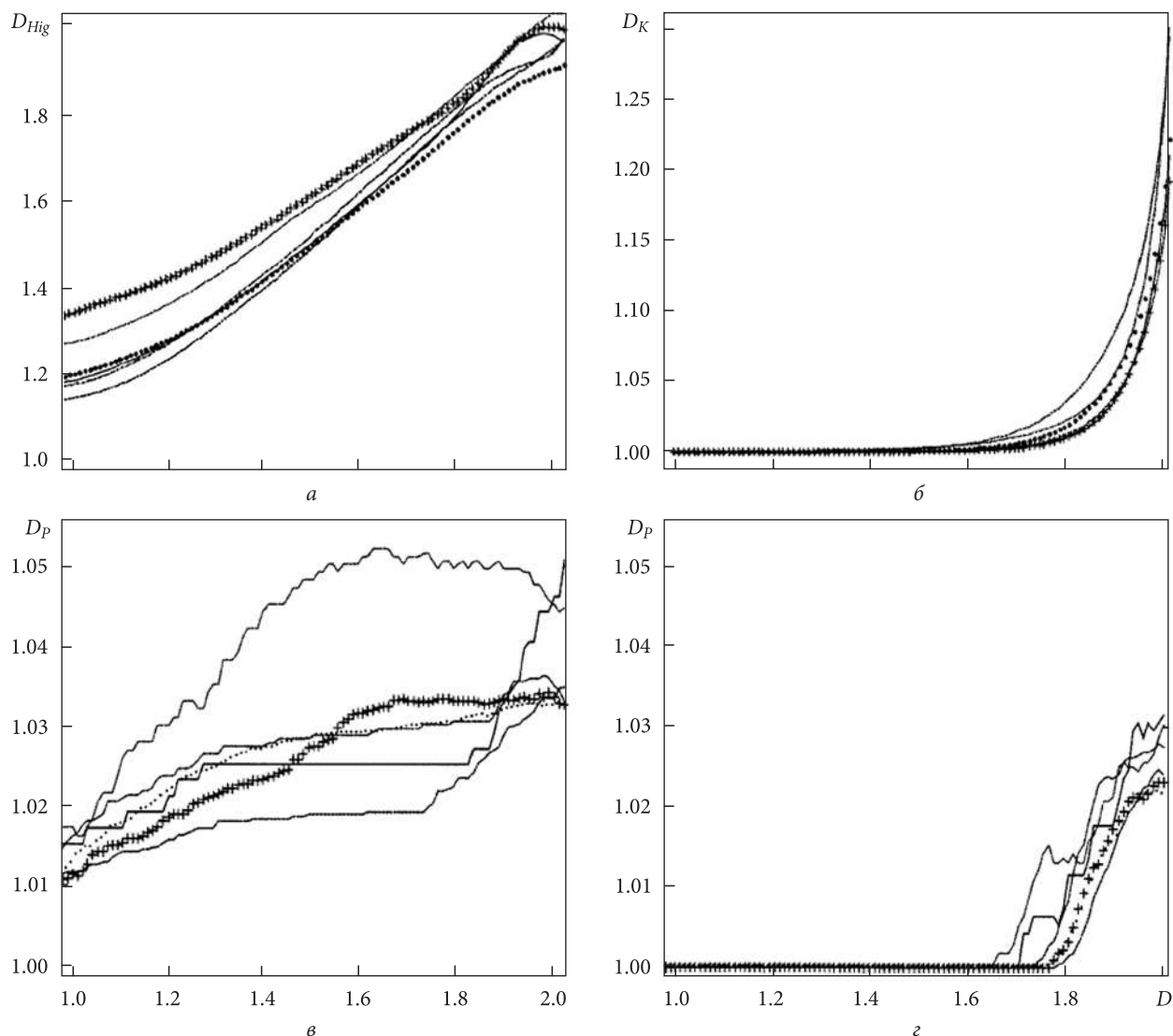
Слід зазначити, що в різні роки фахівцями в абсолютно різних галузях науки і техніки були написані докладні оглядові статті з методів фрактального аналізу. На нашу думку, найбільш вдалими є роботи [58, 60, 162].

## 2.28. Залежність ефективності оцінювання фрактальної розмірності від різних факторів

На точність оцінювання фрактальної розмірності досліджуваного сигналу будь-яким з наведених вище методів впливає низка факторів. Найважливішими серед них є кількість дискретних відліків сигналу  $N$ , наявність у структурі сигналу повільно змінюваного або гармонічного трендів, а також присутність адитивних або мультиплікативних шумів (див., наприклад, [61, 87]). На жаль, дослідження впливу цих факторів проводилися лише для невеликої кількості окремих методів, а тому рекомендацій загального характеру досі не сформульовано.

Установлено, що для різних методів монофрактального аналізу спостерігаються різні залежності точності оцінювання фрактальної розмірності  $D$  за різних  $N$ . Так, наприклад, у роботі [61] для аналізу модельних фрактальних сигналів, заснованих на косинусній функції Вейерштрасса, використовувалися методи Хігучі, Катца





**Рис. 3.** Залежність оцінюваних фрактальних розмірностей Хігучі  $D_{\text{Hig}}$ , Катца  $D_K$  і Петросяна  $D_P$  від фрактальної розмірності сигналу  $D$  для різних значень кількості відліків  $N$ : *a* – розмірність Хігучі  $D_{\text{Hig}}$ ; *б* – розмірність Катца  $D_K$ ; *в* – розмірність Петросяна  $D_P$  (метод «с»); *г* – розмірність Петросяна  $D_P$  (метод «d») для +++ –  $N = 150$ , --- –  $N = 250$ , ... –  $N = 500$ , ——— –  $N = 750$ , -.- –  $N = 1\,000$ , - - - - -  $N = 2\,000$ , [61]

і Петросяна. Характер отриманих залежностей для  $N = 150 \dots 2000$  показано на рис. 3. Виявлено, що для методу Хігучі при збільшенні  $N$  спостерігається стабільне підвищення ефективності оцінювання фрактальної розмірності у всьому її діапазоні від 1 до 2. Для методу Петросяна не виявлено такої залежності від величини  $N$  (принаймні, у межах зазначеного діапазону її зміни). Для методу Катца існує деяке квазіоптимальне значення ( $N = 250$ ), однак обґрунтування цієї величини в літературі відсутнє. Додамо, що автори роботи [87] стверджують, що у методі Хігучі достатньо використовувати  $N = 1024$ . Також

неодноразово проводилися дослідження ефективності отримання показника Херста методом нормованого розмаху (див., наприклад, [61, 87]).

Що ж до впливу повільних і гармонічних трендів, то в алгоритмах низки розглянутих вище методів безпосередньо проводиться їх усунення. Для інших методів рекомендується перед проведенням фрактального аналізу здійснювати фільтрацію низькочастотної компоненти, проте питання, що саме вважати трендом, а що – сигналом, залишається відкритим.

Важливим є також те, що збільшення потужності шуму, на фоні якого проводиться мо-

нофрактальний аналіз досліджуваного сигналу, призводить до зниження (іноді — істотного) ефективності методів. Так, наприклад, у статті [61] показано, що за умови  $q = 10$  дБ серед методів Хігучі, Катца і Петросяна найбільш захищеними від впливу шумів виявляються метод Хігучі та  $s$ -метод Петросяна. Інші варіанти методу Петросяна демонструють результати навіть кращі, ніж метод Катца, але динамічний діапазон вірно оцінюваних фрактальних розмірностей методу Катца залишається найкращим.

## 2.29. Комплексні методи монофрактального аналізу

### 2.29.1. Неєфективність використання одного методу у монофрактальному аналізі

Наведені вище методи фрактального аналізу дозволяють обирати різні стратегії отримання головного інформаційного параметра — фрактальної розмірності: від безпосереднього обчислення до оцінювання величин, пов'язаних із фрактальною розмірністю певними співвідношеннями.

Однією з таких величин є показник Херста  $H$ , який пов'язаний з фрактальною розмірністю  $D$  простим співвідношенням  $D = 2 - H$ . Це співвідношення є властивим для всіх типів ФС.

З іншими характеристиками все набагато складніше. Зокрема, зв'язок між спектральним індексом  $\beta$  та показником Херста  $H$ , обумовлений формулою Беррі, є справедливим лише в рамках моделі УБР. Однак моделі УБР підпорядковується лише деяка частина реально існуючих фрактальних сигналів і процесів. Іншими словами, можуть існувати два ФС, які мають однаковий показник Херста  $H$  (а отже, однакову фрактальну розмірність), але абсолютно різні спектральні індекси  $\beta$ . Це дозволяє дійти висновку, що для всебічного аналізу ФС обчислення лише фрактальної розмірності  $D$  виявляється недостатнім.

Більше того, у всіх розглянутих вище методах монофрактального аналізу а ргіогу вважалося, що досліджуваний сигнал є фрактальним. Однак при аналізі довільного реального сигналу це може бути зовсім не так. Отже, щоб уберегти себе від «відкриття» фрактальних властивостей там, де їх насправді немає, потрібно перевіряти досліджуваний сигнал на фрактальність як таку.

Таким чином, необхідно використовувати складніші алгоритми фрактального аналізу, що передбачають отримання й аналіз більшої кількості числових характеристик і використовують кілька простих методів у єдиному комплексі. Такі алгоритми вже розроблені і застосовуються на практиці.

### 2.29.2. Алгоритм на основі методу фрактальної розмірності Фур'є

Скоріш за все, перший комплексний алгоритм виконання монофрактального аналізу сигналів було запропоновано 2000 р. у роботі [69] і покращено у 2002 р. у роботі [51]. Алгоритм цього методу наведено на рис. 4. Розглянемо суть методу.

Спочатку до досліджуваного сигналу  $s(t)$  застосовується метод розмірності Фур'є. Якщо потужнісний спектр  $P(\omega)$  не підпорядковується степеневому закону, то досліджуваний сигнал вважають нефрактальним і його подальший фрактальний аналіз припиняється.

Якщо ж степеневу залежність виявлено, то отримується оцінка спектрального індексу  $\beta$ . Залежно від величини  $\beta$  можливі три випадки:

1)  $\beta < 1$ . Досліджуваний сигнал класифікується як стаціонарний і зараховується до класу сигналів дробового гауссівського шуму (ДГШ). Для оцінювання його показника Херста  $H$  далі застосовується метод дисперсійного аналізу.

2)  $\beta > 1$ . Досліджуваний сигнал визначається як нестационарний і сприймається як сигнал УБР. Для оцінювання його показника Херста  $H$  далі використовується метод  $SWV$ .

3)  $\beta \approx 1.0$ . Найнеприємніша ситуація. Сигнал не може бути впевнено віднесений ані до сигналів ДГШ, ані до сигналів УБР. У цьому випадку для визначення показника Херста залучається метод  $DFA$ .

Тепер у будь-кого, хто вивчив даний алгоритм, виникають щонайменше три питання: 1) Чому просто не зупинитися на методі розмірності Фур'є? 2) Чому не скористатися відомими теоретичними співвідношеннями між  $\beta$  і  $H$ , коли клас сигналу вже встановлений? 3) Чому не застосувати у всіх трьох випадках метод  $DFA$  або будь-який із двох інших? Відповіді на ці питання, на нашу думку, є важливими для подальшого усвідомлення корисності комплексних методів фрактального аналізу.

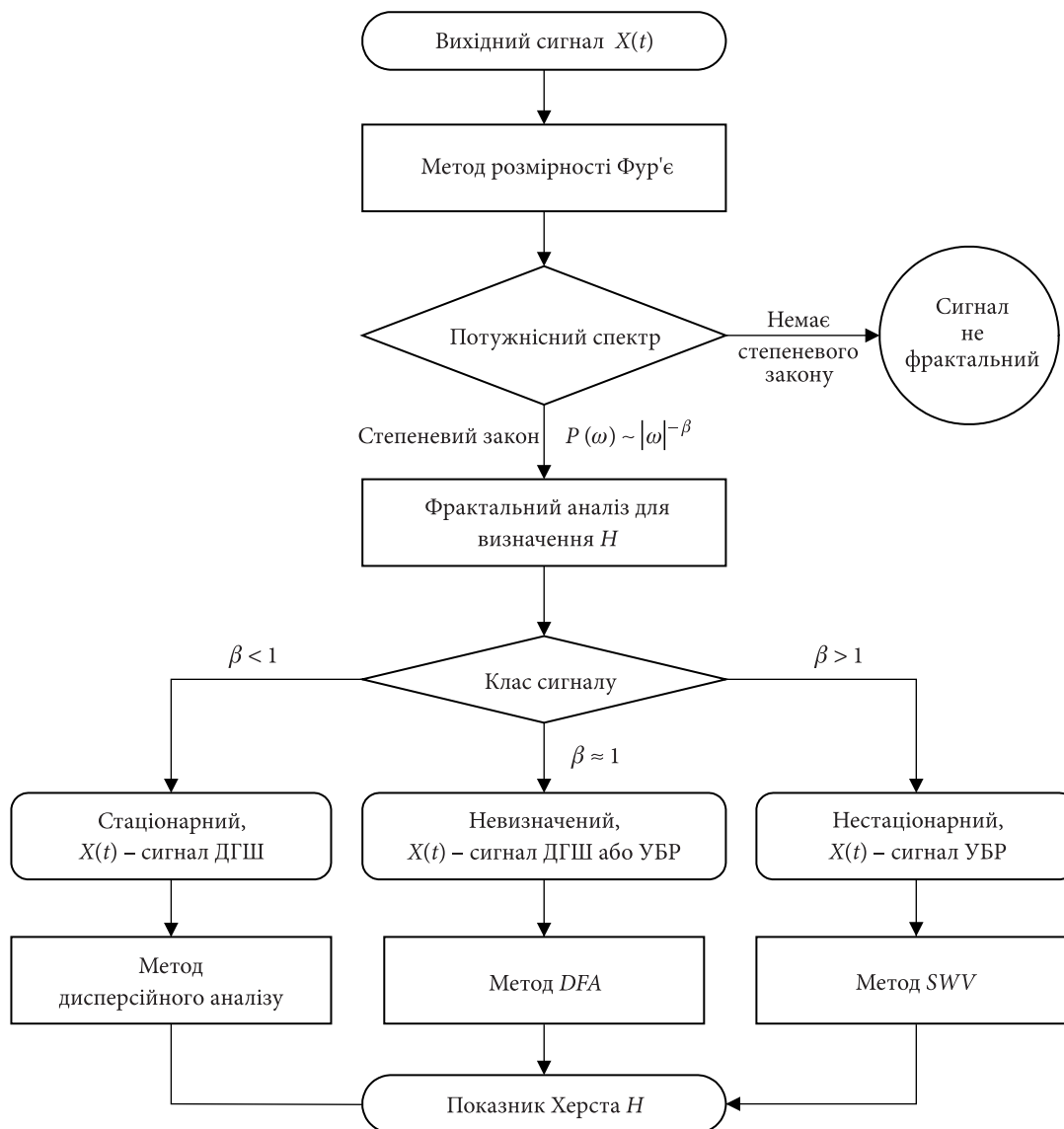


Рис. 4. Алгоритм на основі методу розмірності Фур'є [51]

По-перше, метод розмірності Фур'є одразу не дає ані показника Херста  $H$ , ані фрактальної розмірності  $D$ . Він дозволяє лише оцінити спектральний індекс  $\beta$ . Важливо, що без знання того, до якого класу належить аналізований ФС, не можна встановити правильний зв'язок між  $\beta$  і  $D$  або  $H$ . Понад те, найважливіша мета цього методу – відсіювати нефрактальні сигнали.

По-друге, автори [51, 69] встановили, що спектральний індекс  $\beta$  оцінюється досить грубо, а тому й оцінка  $H$ , зроблена за допомогою формул зв'язку між цими величинами, виявляється дуже неточною. Саме тому для кожного класу ФС рекомендується свій метод.

По-третє, метод  $DFA$  є насправді універсальним, але точність оцінок показника Херста  $H$ , що одержуються за його використання, поступається двом іншим методам. У свою чергу, кожен із цих двох методів показує добрий результат тільки для сигналів того класу, для яких він рекомендований. Отже, метод  $DFA$  є розумним компромісом у ситуації, коли клас ФС з достатньою надійністю визначити не вдалося.

На нашу думку, до висновків авторів методу варто прислухатися, оскільки вони перевірили якісні показники всіх чотирьох методів на прикладі аналізу близько 20 тис. реалізацій модельних сигналів.

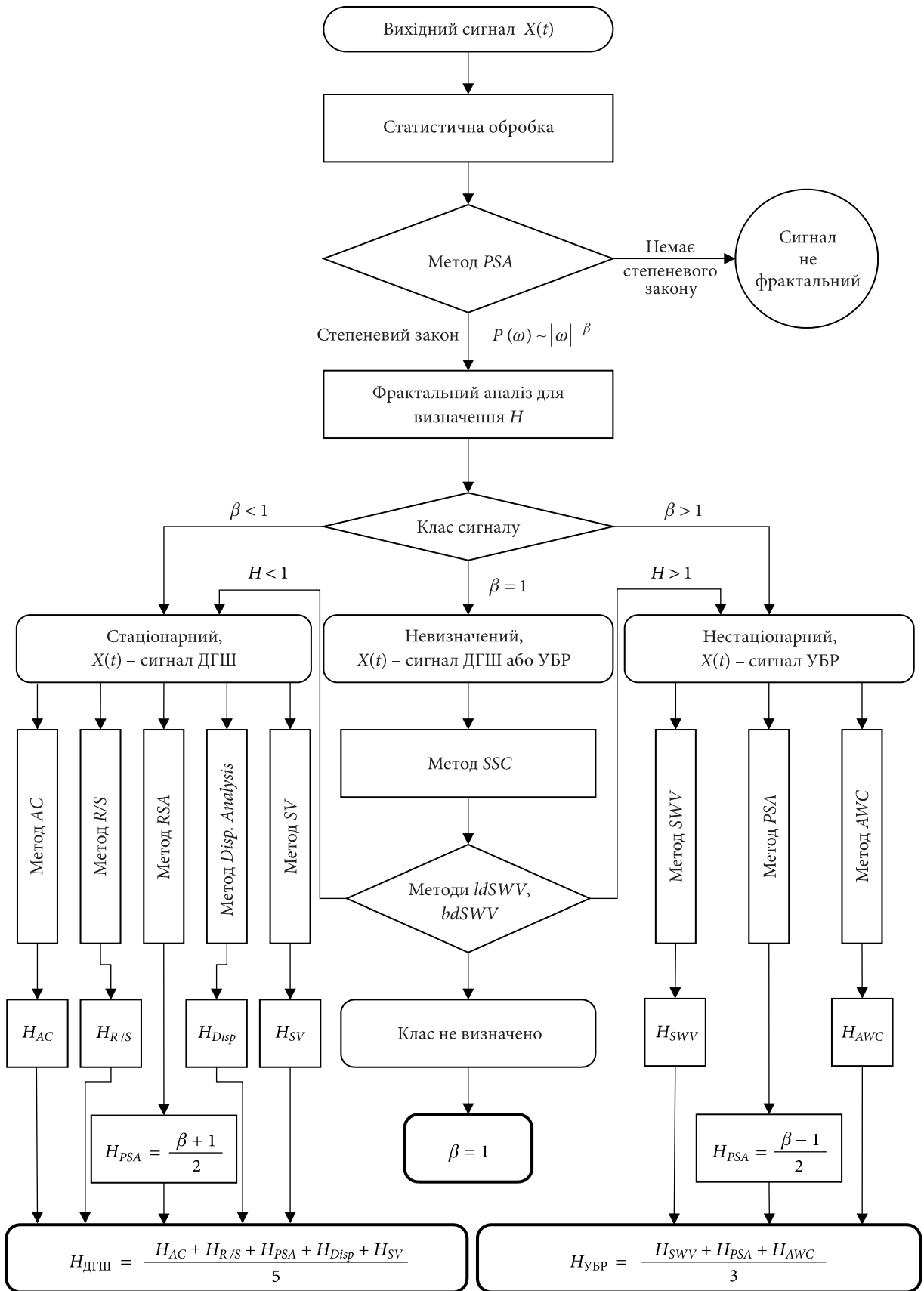


Рис. 5. Модернізований алгоритм на основі методу розмірності Фур'є [62]



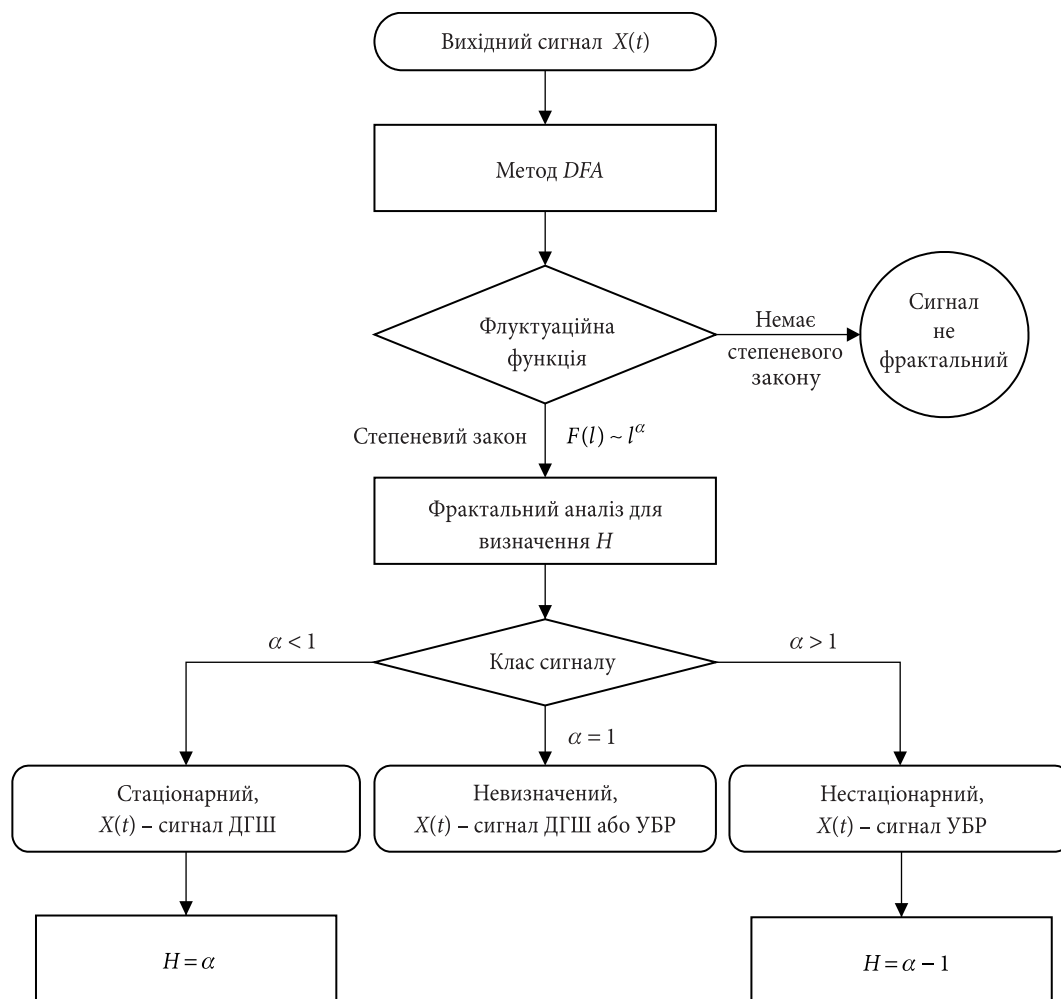


Рис. 6. Алгоритм на основі методу DFA [62]

Розвиток ідеї описуваного алгоритму наведено у книзі [62], яка, на нашу думку, може бути дуже корисною для практиків. Блок-схему відповідного алгоритму, що використовує цілий набір розібраних методів фрактального аналізу, показано на рис. 5.

### 2.29.3. Алгоритм на основі методу DFA

Цей алгоритм, запропонований у 2010 р. Л. Сеуронтом (L. Seuront) в [62], є розвитком ідеї попереднього алгоритму. У ньому використовується здатність методу DFA відрізнити фрактальні сигнали від нефрактальних і сигнали, які підпорядковуються моделі УБР, від сигналів, що описуються моделлю ДГШ. Блок-схему алгоритму наведено на рис. 6.

Спочатку обчислюється традиційна для методу DFA флуктуаційна функція  $F(l)$ . Якщо в

координатах  $\log F(l)$  отримана залежність від  $\log l$  виявляється відмінною від лінійної, параметр визначити не вдається, і сигнал вважається нефрактальним. В іншому випадку при  $\alpha \in (0,1)$  сигнал є сигналом ДГШ, тому його показник Херста дорівнює  $H = \alpha$ . Якщо  $\alpha \in (1,2]$ , то маємо сигнал УБР, тоді  $H = \alpha - 1$ . У разі ж  $\alpha = 1$  відповідь отримати не вдається. Очевидно, що відповідна фрактальна розмірність обчислюється за формулою  $D = 2 - H$ .

Додамо, що між параметром  $\alpha$  з методу DFA і спектральним індексом  $\beta$  існує добре відомий зв'язок:  $\beta = 2\alpha - 1$ . Проте, як свідчить практика (див., наприклад, [62]), у деяких випадках це співвідношення може порушуватися.

Існує також розширена версія описуваного алгоритму [62], де спільно використовується цілий набір методів фрактального аналізу, які ми

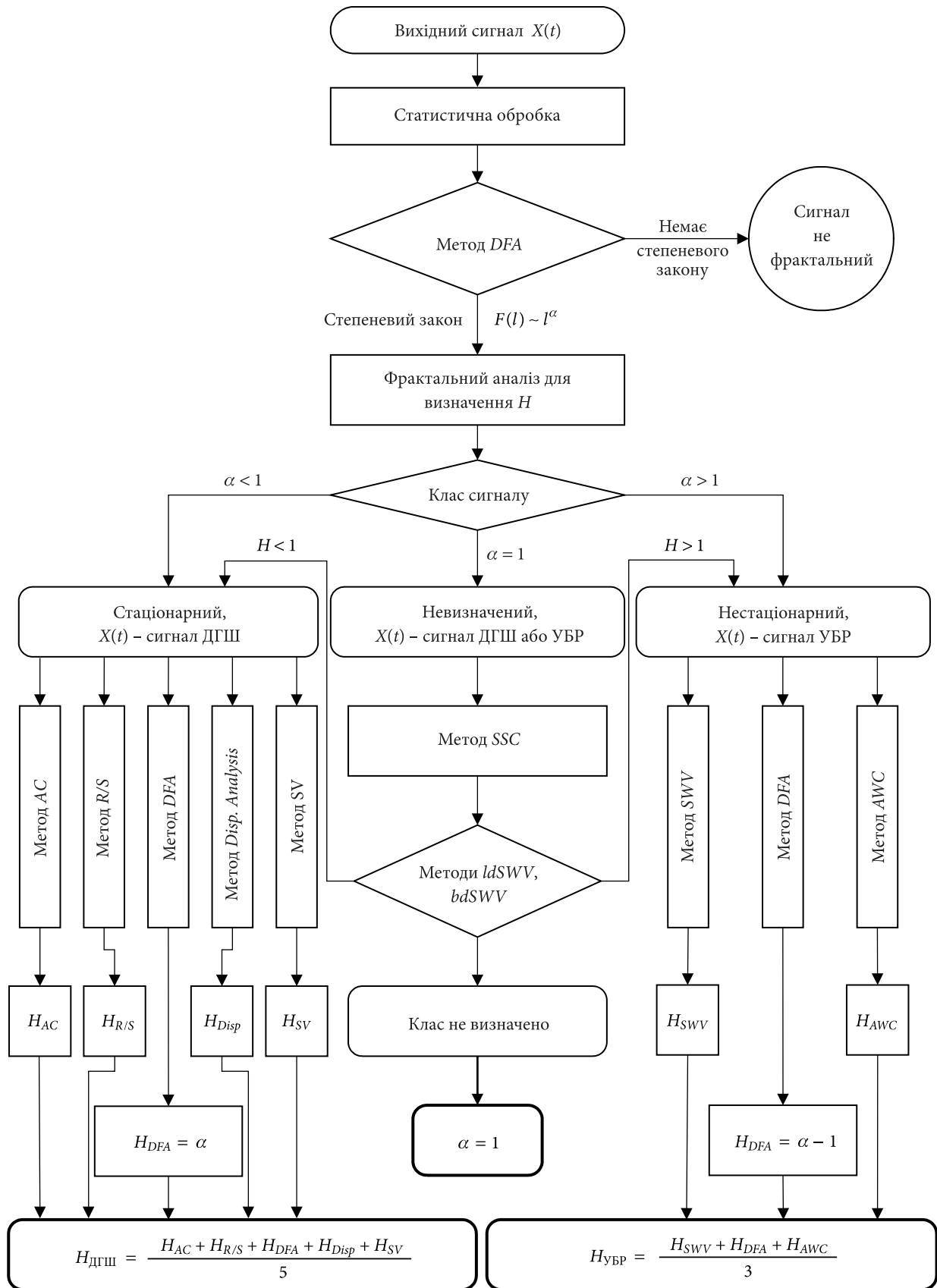


Рис. 7. Модифікований алгоритм на основі методу DFA [62]

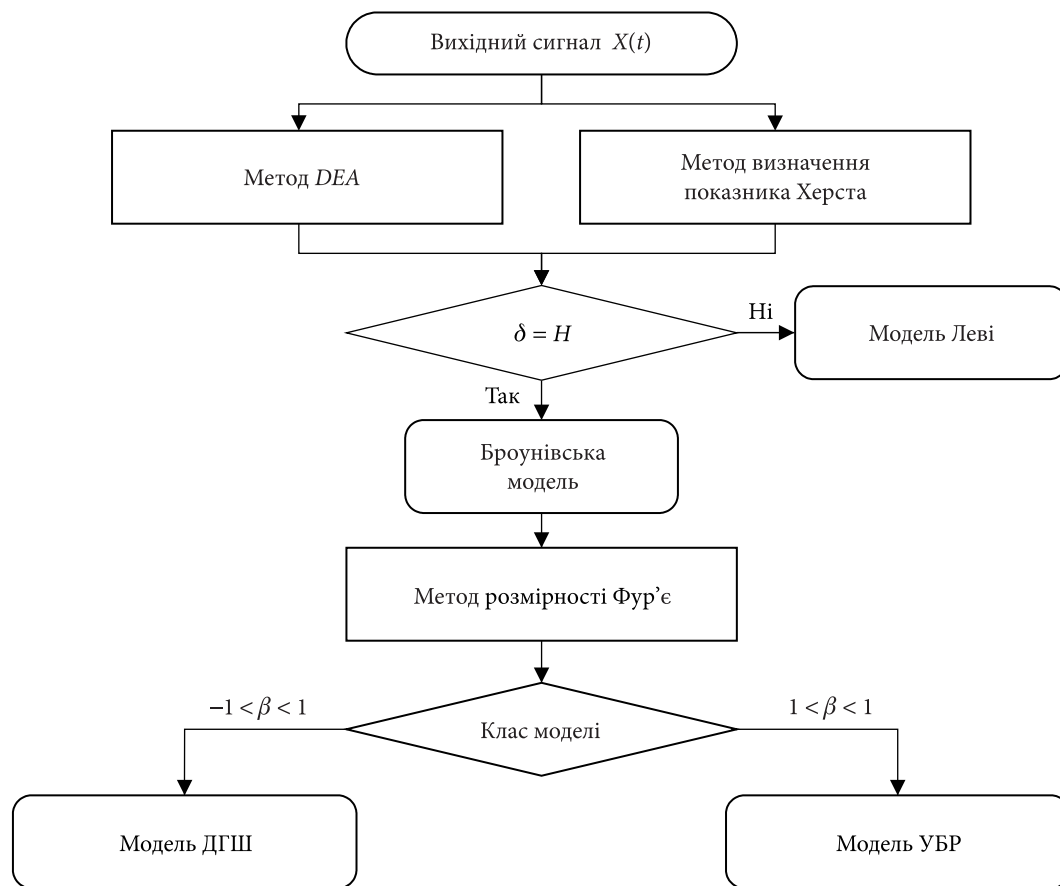


Рис. 8. Алгоритм визначення класу ФС

розглянули вище. Відповідну блок-схему наведено на рис. 7.

Як довідкова інформація в табл. 2 наведено аналітичні залежності між показником Херста для моделей ДГШ і УБР та параметрами деяких методів фрактального аналізу [62].

#### 2.29.4. Алгоритм на основі класифікації ФС

Цей алгоритм, запропонований у 2012 р. у роботі [48], дозволяє отримати фрактальну розмірність досліджуваного сигналу на основі його попередньої класифікації (рис. 8). Алгоритм складається з послідовного застосування трьох методів фрактального аналізу: методу *DEA*, одного з методів визначення показника Херста і методу розмірності Фур'є.

Доцільність такого підходу автори [48] пояснюють тим, що не всі методи фрактального аналізу однаково добре працюють для ФС різних класів. Так, наприклад, Р. Восс ще 1988 р. устано-

вив, що клітинний метод погано працює для самоафінних об'єктів [163].

За замовчанням вважається, що досліджуваний сигнал є точно фрактальним. Метод *DEA* дозволяє знайти скейлінгову експоненту  $\delta$ . Для

Таблиця 2. Зв'язок між показником Херста для моделей УБР ( $H_{\text{УБР}}$ ) і ДГШ ( $H_{\text{ДГШ}}$ ) з параметрами деяких методів фрактального аналізу [62]

Метод фрактального аналізу	Параметр	УБР	ДГШ
Метод розмірності Фур'є	$\beta$	$2H_{\text{УБР}} + 1$	$2H_{\text{ДГШ}} - 1$
Метод <i>DEA</i>	$\alpha$	$H_{\text{УБР}} + 1$	$H_{\text{ДГШ}}$
Метод <i>SWV</i>	$H$	$H_{\text{УБР}}$	—
Метод дисперсійного аналізу	$H$	—	$H_{\text{ДГШ}}$
Метод нормованого розмаху	$H$	—	$H_{\text{ДГШ}}$
Метод автокореляційного аналізу	$\rho$	—	$2H_{\text{ДГШ}} - 1$

знаходження показника Херста  $H$  пропонується використовувати один із методів, який подобається дослідникам. Порівняння отриманих значень  $\delta$  і  $H$  дозволяє віднести аналізований сигнал до одного з двох класів: броунівських моделей або моделей Леві.

Метод розмірності Фур'є, який застосовується до сигналу, попередньо вже класифікованого як такий, що підпорядковується броунівським моделям, дає можливість прийняти рішення про відповідність його одній із двох моделей: моделі ДГШ або моделі УБР.

Проведення класифікації досліджуваного сигналу необхідне для вибору алгоритму оцінювання його фрактальної розмірності  $D$ . Якщо ФС виявляється класифікованим як такий, що підпорядковується моделям Леві, то для отримання правильного значення його фрактальної розмірності  $D = 2 - H$  необхідно використовувати не те значення показника Херста  $H$ , яке було отримане в результаті безпосереднього застосування відповідного методу, а інше — обчислене із співвідношення  $\delta = 1/(3 - 2H)$  на основі скейлінгової експоненти [48].

Автори [48] зауважують, що для визначення спектрального індексу  $\beta$  замість методу розмірності Фур'є можна скористатися методом, який ґрунтується на вейвлет-аналізі, або методом DFA. Більш того, у разі застосування методу, що ґрунтується на вейвлет-аналізі, для ФС, які підкоряються броунівським моделям, рекомендується використовувати значення показника Херста, обчислене на основі спектрального індексу  $\alpha$  (аналога спектрального індексу  $\beta$  для вейв-

лет-аналізу) згідно з табл. 3 [48]. Привертає увагу наявність у цій таблиці моделей типу «диференційований ДГШ» та «інтегрований УБР», які є моделями, отриманими відповідно диференціюванням моделі ДГШ та інтегруванням моделі УБР — подібно до того, як пов'язані між собою самі моделі ДГШ і УБР.

### 2.29.5. Алгоритм Кириченко–Чалої

Ще один оригінальний і досить простий алгоритм аналізу ФС був запропонований у 2014 р. Л.О. Кириченко та Л.Е. Чалою у роботі [164]. Його суть полягає в наступному [54, 164].

Алгоритм базується на методах нормованого розмаху, DFA та вейвлет-аналізу, причому останній метод є бажаним, але не обов'язковим. Алгоритм містить чотири етапи, два з яких, своєю чергою, поділяються на кілька кроків.

*Етап 1. Попереднє дослідження структури сигналу.*

*Крок 1.1.* Визначення кумулятивної структури сигналу. Якщо за своєю природою сигнал є кумулятивним, всі інші кроки робляться для сигналу, складеного з приростів вихідного.

*Крок 1.2.* Визначення інтервалів скейлінгу. У досліджуваного сигналу може бути не один, а декілька різних інтервалів скейлінга. Виявити їх дозволяють метод нормованого розмаху або метод DFA. Як це можна зробити, обговорювалося раніше під час розгляду даних методів.

*Крок 1.3.* Виявлення та видалення короточасної авторегресійної залежності. Перевірка гіпотези про наявність самоподібності. Перше робиться за допомогою методу DFA. Якщо цього не зробити, то оцінка показника Херста виявиться зміщеною. Перевірка гіпотези про наявність самоподібності здійснюється статистичними методами.

*Етап 2. Дослідження стаціонарності сигналу. Оцінка показника Херста стаціонарного сигналу.*

Стаціонарність сигналу визначається статистичними методами. Якщо сигнал дійсно стаціонарний, то показник Херста можна оцінити, наприклад, методом нормованого розмаху, методом агрегованої дисперсії, методом DFA, а також методами, що ґрунтуються на безперервному або дискретному вейвлет-перетвореннях.

Таблиця 3. Зв'язок між показником Херста  $H$  і спектральним індексом  $\alpha$ , отриманим з використанням методу, що ґрунтується на вейвлет-аналізі [68]

Спектральний індекс $\alpha$	Модель ФС	Показник Херста
$\alpha < -3$	Зсув	—
$-3 < \alpha < -1$	Диференційований ДГШ	$H = 1/2(\alpha + 3)$
$-1 < \alpha < 1$	ДГШ	$H = 1/2(\alpha + 1)$
$\alpha = 0$	Броунівський рух	$H = 1/2$
$1 < \alpha < 3$	УБР	$H = 1/2(\alpha - 1)$
$3 < \alpha < 5$	Інтегрований УБР	$H = 1/2(\alpha - 3)$
$\alpha > 5$	Зсув	—



*Етап 3. Оцінка показника Херста нестационарного сигналу.*

*Крок 3.1.* Якщо сигнал виявився нестационарним, необхідно дослідити його структуру шляхом побудови кореляційної функції і вейвлет-спектра, що дозволить виявити трендові та циклічні компоненти сигналу.

*Крок 3.2.* При оцінюванні показника Херста методом *DFA* потрібно спочатку отримати приблизну оцінку, використовуючи локальні поліноми зі зростаючим степенем, і отримати такий найменший степінь полінома, коли оцінка показника Херста перестає змінюватися. Після цього локальний поліноміальний тренд саме цього степеня слід видалити. Тільки тепер можна визначити інтервальну оцінку показника Херста.

*Крок 3.3.* Якщо використовується вейвлет-перетворення, необхідно видалити трендову та циклічну компоненти і лише після цього оцінювати показник Херста.

*Етап 4. Уточнення одержаної оцінки показника Херста.*

Якщо оцінки показника Херста отримані різними методами, то пропонується взяти їх середнє арифметичне значення. Якщо ж застосовувався вейвлет-аналіз, рекомендується використовувати кілька різних вейвлетів і усереднити отриманий результат.

Зазначимо також, що робляться спроби створення комплексного методу, який дозволить проводити автоматизований аналіз сигналів у масштабі реального часу (див., наприклад, [165]).

### 2.29.6. Узагальнений фрактальний аналіз

Узагальнений фрактальний аналіз (англ. *generalized fractal analysis, GFA*) був запропонований Л.Ф. Черногором, О.В. Лазоренком і А.А. Онищенко у 2018 р. [166]. Основна ідея цього комплексного методу монофрактального аналізу сигналів і процесів полягає в тому, щоб отримати достатню кількість інформації про їхню фрактальну структуру та характер її змін у часі шляхом вивчення певного набору числових характеристик та їх порівняння між собою.

Слід зауважити, що узагальнений фрактальний аналіз (УФА) — це метод саме монофрактального аналізу, оскільки передбачається, що досліджуваний сигнал є монофрактальним у певному

діапазоні масштабів і на деякому часовому проміжку, хоча на всій області існування він може виявляти мультифрактальні властивості.

Числові показники, що використовуються в УФА, поділено на три групи.

Перша з них (безпосередньо обчислювані характеристики) містить ємнісну, регуляризаційну, поточкову розмірності, показники Херста і Гельдера, а також розмірність Фур'є. Оскільки ці показники використовуються спільно з віконними функціями в часовій області, результати мають три різних види часової локалізації: глобальну, локальну і точкову. Розмірність  $D$  всього сигналу як цілого називається глобальною. Водночас розмірність, яка обчислена в деякому ковзному вікні кінцевої ширини  $l$  і стала функцією часу  $D(l, t)$ , є локальною, а розмірність  $D(t)$ , що відноситься виключно до заданої точки досліджуваного сигналу, є точковою.

Друга група (спектральні характеристики) поєднує фрактальні характеристики фур'є-спектра сигналу і фрактальні розмірності скелетону безперервного вейвлет-перетворення (БВП), отримані з використанням різних вейвлетів.

Третя група (характеристики фазового простору) пов'язана з фрактальними характеристиками дивного атрактора хаотичної, нелінійної системи, яка могла б породити досліджуваний сигнал або процес.

На нашу думку, такий комплексний підхід дозволяє всебічно описати фрактальні характеристики досліджуваного сигналу або процесу. Більш того, набір числових характеристик, які використовуються в УФА, у майбутньому може бути змінений.

Як приклад у [166] розглядається аналіз фрактальних властивостей отриманої у 2015 р. першої практичної реєстрації гравітаційних хвиль.

### 2.29.7. Динамічний фрактальний аналіз

Динамічний фрактальний аналіз (англ. *dynamical fractal analysis, DynFA*) був запропонований А.А. Онищенко, Л.Ф. Черногором та О.В. Лазоренком у 2019 р. [167]. Розглянемо суть методу динамічного фрактального аналізу (ДинФА).

Обчислення фрактальної розмірності  $D_H = 2 - H$ , що базується на показникові Херста  $H$ , як було показано вище, є одним із найпопуляр-

ніших методів фрактального аналізу. Однак при дослідженні нестационарних сигналів, фрактальні властивості яких змінюються в часі, необхідно використовувати віконну функцію в часовій області. Так робиться у багатьох методах. Водночас добре відомо, що отримуваний результат істотно залежить від ширини  $T$  застосовуваного вікна, але питання вибору величини  $T$  зазвичай не обговорюється.

Автори [167] пропонують ідею вибору оптимального (у певному сенсі) значення  $T$ . Для цього необхідно здійснити декілька кроків. По-перше, слід оцінити фрактальну розмірність  $D_H$  для різних значень положення ( $t$ ) і ширини ( $T$ ) ковзного вікна, унаслідок чого отримуємо функцію  $D_H(t, T)$ . Її зручно зображувати графічно подібно до того, як це робиться для СФ інтегральних перетворень. По-друге, потрібно обчислити модуль  $|\dot{W}f(t, T)|$ , аргумент  $\arg \dot{W}f(t, T)$  і скелетон аргументу комплекснозначної СФ аналітичного вейвлет-перетворення (АВП). Дослідження саме цих характеристик дозволяє оцінити один характерний період сигналу (або його частин, які нас цікавлять)  $T_i$ ,  $i = 1, n$ . По-третє, при фіксованих значеннях  $T_i$  отримуємо набір часових залежностей  $D_{Hi}(t) \equiv D_H(t, T_i)$ . Саме ці залежності у найкращий спосіб характеризують фрактальні властивості досліджуваного сигналу. Зауважимо, що вибір вейвлета для проведення АВП можна здійснювати за допомогою методу, описаного в [4].

Таким чином, метод ДинФА поєднує можливості фрактального аналізу (показник Херста) і часо-частотного аналізу (АВП) при дослідженні нестационарних сигналів та процесів довільної природи. Більш того, не обов'язково використовувати виключно фрактальну розмірність  $D_H$ . На її місці цілком може бути будь-яка інша фрактальна розмірність, зокрема, з тих, що були докладно розглянуті вище.

Як приклад у роботі [167] обговорюються результати фрактального аналізу акустичних сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського метеороїду у 2013 р.

### 2.30. Тонкощі застосування лінійної регресії

У переважній більшості методів фрактального аналізу, які були розглянуті вище, для визначення фрактальних параметрів (показників Херста

і Гельдера, фрактальних розмірностей тощо) застосовують рівняння лінійної регресії. Зрозуміло, що для математичного монофрактала всі точки в подвійних логарифмічних координатах ідеально розташовуються на одній прямій і жодних проблем не виникає. Проте для фізичних фракталів найчастіше спостерігається зовсім інша ситуація. Як правило, тільки якась обмежена частина точок лежить приблизно на одній прямій, а решта може розташовуватися довільним чином. Ось тут і виникає дуже важливе питання: як проводити лінійну регресію? Використовувати всі наявні точки або лише якусь їхню частину? Якщо використовувати лише частину, то як відокремити корисні точки від решти?

На жаль, у літературі майже завжди ці питання залишаються поза полем обговорення. Тим часом їх значення для дослідника не можна недооцінювати. Слід зазначити, що розташування точок уздовж однієї прямої є найважливішою ознакою монофрактальності сигналу, який досліджується. І хоча методом найменших квадратів можна провести пряму через будь-яку множину точок (а отже, отримати деяке значення фрактальної розмірності), але від цього довільний сигнал не стає фрактальним. Більш того, ми пам'ятаємо, що фізичний фрактал може мати фрактальні властивості тільки в обмеженому діапазоні масштабів. Саме такий діапазон масштабів і треба вміти визначати.

У більшості робіт дослідники приймають рішення виключно «на око», чим сильно збільшують суб'єктивність одержуваних результатів. Разом з тим, замість якісного підходу можна використовувати кількісний. Три процедури, що реалізують кількісний підхід, пропонує автор роботи [62]. Розглянемо їх докладніше.

#### 2.30.1. Процедура R2-SSR

Нехай є залежність  $\log M(\delta)$  від  $\log \delta$ , яка містить  $n$  точок. Позначимо ці точки через  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, n$ . Використовуючи ковзне вікно змінної шириною  $l$ , будемо всі можливі лінійні регресії і оцінюємо їх кутові коефіцієнти. Ширина вікна  $l$  при цьому змінюватиметься від 5 до  $n$  точок, крок параметра зсуву ковзного вікна  $k$  дорівнюватиме 1. Мінімальна ширина вікна ( $l_{\min} = 5$ ) визначається вимогами математичної статистики.

Далі для кожної отриманої лінійної регресії  $y = a_{kl}x + b_{kl}$  обчислюємо коефіцієнт достовірності  $R^2$  та суму квадратів відхилень SSR:

$$R^2(k, l) = 1 - \frac{\sum_{i=k+1}^{k+l} (y_i - a_{kl}x_i - b_{kl})^2}{\sum_{i=k+1}^{k+l} (a_{kl}x_i + b_{kl} - \bar{y}(k, l))^2},$$

$$\bar{y}(k, l) = \frac{1}{l} \sum_{i=k+1}^{k+l} y_i;$$

$$SSR(k, l) = \sum_{i=k+1}^{k+l} (y_i - a_{kl}x_i - b_{kl})^2,$$

$$l = \overline{5, n}, \quad k = \overline{0, (n-l)}.$$

Здійснюємо максимізацію  $R^2(k, l)$  з одночасною мінімізацією  $SSR(k, l)$ . У більшості випадків такий підхід дозволяє обрати пару оптимальних значень  $(k_0, l_0)$ , яка і визначатиме як фрактальну розмірність, так і діапазон масштабів даного монофрактального сигналу. Якщо ж, наприклад, сигнал виявляється біфрактальним (на двох різних діапазонах масштабів), то таких пар буде дві.

Якщо ж знайти таку пару оптимальних значень не вдається, це свідчить про те, що досліджуваний сигнал не є фрактальним.

### 2.30.2. Процедура з нульовим нахилом

Розглянемо процедуру з нульовим нахилом (англ. *zero-slope procedure*). Оскільки фрактальна розмірність  $D_F$  (або інший подібний параметр) визначається за умови

$$d \log M(\delta) / d \log \delta = -D_F,$$

то в діапазоні масштабів, де існує фрактальна поведінка та  $D_F$  залишається сталою, має задовольнятися вимога

$$d[d \log M(\delta) / d \log \delta] / d \log \delta = 0. \quad (33)$$

На графіку залежності  $d \log M(\delta) / d \log \delta$  від  $\log \delta$  цьому випадку відповідає наявність горизонтального плато. Пошук плато здійснюється за допомогою алгоритму, заснованого на ковзному вікні змінної ширини, описаного в попередньому підрозділі. Для визначення діапазону масштабів,

де у сигналу спостерігаються фрактальні властивості, використовується співвідношення (33).

Головними недоліками цієї процедури є поява спотворень, пов'язаних з наявністю в аналізованому сигналі лінійного (або псевдолінійного) тренду, і слабка стійкість до впливу шумів на сигнал, що аналізується.

### 2.30.3. Процедура з компенсованим нахилом

Подолати недоліки, характерні для попередньої процедури, покликана так звана процедура з компенсованим нахилом (англ. *compensated-slope procedure*). Передбачається, що досліджувана величина  $M(\delta)$  містить деякий компенсуючий множник:  $M(\delta) \approx \delta^c \times \delta^{-D_F} \approx \delta^{c_e}$ , де  $c$  — компенсуючий показник-експонента ( $1 \leq c \leq 2$ ),  $c_e$  — компенсований показник. Очевидно, що за умови  $c = D_F$  отримуємо  $c_e = 0$ . Тоді, якщо досліджуваний сигнал є фрактальним, то залежність  $M(\delta)$  від  $\delta$  у подвійних логарифмічних координатах описується горизонтальною прямою лінією, що збігається з віссю абсцис, причому діапазон масштабів, на якому це відбувається, можна визначити за допомогою описаної вище процедури R2-SSR. Підібране значення  $c$  і визначатиме фрактальну розмірність сигналу  $D_F = c$ .

На закінчення зазначимо, що автор [168] рекомендує на практиці при оцінюванні діапазону масштабів, в якому досліджуваний сигнал має фрактальні властивості, використовувати принаймні дві з трьох описаних вище процедур.

## 3. Мультифрактальний аналіз сигналів і процесів

### 3.1. Метод максимумів модуля вейвлет-перетворення (метод WTMM)

Метод максимумів модуля вейвлет-перетворення (англ. *wavelet transform modulus maxima, WTMM*) як метод мультифрактального аналізу сигналів і процесів був запропонований у 1988 р. А. Арнеодо (А. Arneodo), Г. Грассо (G. Grasseau) та М. Холлшнайдером (М. Holschneider) у роботі [169] і набув свого розвитку в роботах С. Малла [33] й А. Арнеодо, Е. Бакрі та Дж. Мьюзі [170—172]. Цей метод ґрунтується на використанні безперервного або аналітичного вейвлет-перетворення (БВП або АВП відповідно), спектральна функція (СФ) яких для сигналу  $s(t)$  задається

співвідношенням (див., наприклад, [173–175]):

$$Wf(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (34)$$

$a > 0, b \in \mathbb{R}$ ,

де  $\psi(t)$  – вейвлет-твірна функція, часто звана «материнським» вейвлетом або просто вейвлетом;  $a$  – параметр масштабування;  $b$  – параметр зсуву; символ « $*$ » позначає операцію комплексного спряження. Як відомо, у разі використання дійсної функції  $\psi(t)$  говорять про БВП, якщо вона комплекснозначна, то співвідношення (34) задає СФ АВП.

На нашу думку, найбільш вдало основи методу *WTMM* викладені у роботах [33, 176].

Перший крок застосування методу *WTMM* пов'язаний із обчисленням модуля СФ  $|Wf(a, b)|$  і пошуком її локальних максимумів для фіксованих значень  $a$ . Вважається, що у точці  $b_0$  існує локальний максимум, якщо для будь-якого  $b \in (b_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon)$  при  $\varepsilon > 0$  виконується умова  $|Wf(a, b)| < |Wf(a, b_0)|$ . Позначимо множину отриманих локальних максимумів як  $L(b)$ . Після цього локальні максимуми поєднуються в ланцюжки. Ланцюжки, які не поширюються до  $a \rightarrow 0$ , видаляються з множини  $L(b)$ .

На другому кроці методу з використанням цієї множини обчислюється узагальнена статистична сума  $Z(q, a)$ , детально розглянута нами у першій частині даного огляду [1]:

$$Z(q, a) = \sum_{L(b)} |Wf(a, b)|^q,$$

де показник степеня  $q$  може набувати будь-яких значень в інтервалі  $-\infty < q < \infty$ . Відомо (див., наприклад, [1, 169, 173, 176]), що узагальнена статистична сума  $Z(q, a)$  пов'язана з нелінійною функцією  $\tau(q)$ , яку називають скейлінговою експонентою або показником маси, за допомогою співвідношення

$$\tau(q) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, a)}{\ln a}.$$

Зазначимо, що функція  $\tau(q)$  визначається з використанням лінійної регресії для залежності  $\ln Z(q, a)$  від  $\ln a$ .

На третьому кроці методу *WTMM* за відомою функцією  $\tau(q)$  обчислюється спектр узагальне-

них розмірностей  $D_q$ :

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}.$$

Нагадаємо, що за деяких фіксованих значень  $q$  ми отримуємо ємнісну ( $q=0, D_0 = D_C$ ), інформаційну ( $q=1, (D_1 = D_I)$ ) та кореляційну ( $q=2, D_2 = D_G$ ) розмірності, про що докладно розповідалося в [1].

Четвертий крок алгоритму методу, що розглядається, пов'язаний з отриманням функції мультифрактального спектра  $f(\alpha)$ . Перехід від змінних  $\{q, \tau(q)\}$  до змінних  $\{\alpha, f(\alpha)\}$  можна здійснити за допомогою перетворень Лежандра:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{d\tau}{dq}, \\ f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau. \end{cases}$$

На відміну від алгоритму Грассбергера та Прокаччі, вже розглянутого нами у першій частині огляду [1], метод *WTMM* дозволяє обчислити мультифрактальні характеристики досліджуваного сигналу більш просто й ефективно – з використанням найпотужнішого математичного апарату вейвлет-аналізу, розвиток і становлення якого припали в часі на 1990-ті рр. Численні приклади з практики (див., наприклад, [173, 176, 178]) переконливо свідчать про правильність цього твердження. Ще одне дуже важливе зауваження, яке необхідно зробити, полягає в тому, що для фрактальних сигналів величина  $\alpha$ , звана в мультифрактальному аналізі показником сингулярності, індексом сингулярності, експонентою сингулярності, показником Ліпшиця–Гельдера або експонентою Гельдера, певною мірою є аналогом показника Херста  $H$ . Це пояснюється тим фактом, що з монофрактального сигналу, побудованого за допомогою моделі УБР, функція мультифрактального спектра вироджується у одну-єдину точку, для якої маємо саме  $\alpha = H$  [1]. Більше того, величина  $\alpha^*$ , яка визначає розташування максимуму мультифрактального спектра, називається узагальненим показником Херста (саме до неї колапсує мультифрактальний спектр для монофрактального сигналу).

Також слід зазначити, що іноді як характеристика мультифрактала використовується величина  $dD = D_{-\infty} - D_{\infty}$  (див., наприклад, [179]).



### 3.2. Метод вейвлет-коефіцієнтів

Мультифрактальний формалізм можна побудувати на БВП або на АВП, як це реалізовано у методі *WTMM*. З цією метою можна використати також дискретне вейвлет-перетворення (ДВП). Відповідний формалізм отримав назву *WCMF* (англ. *wavelet coefficients multifractal formalism*), а метод був названий методом вейвлет-коефіцієнтів. Розглянемо їх докладніше [28].

Нехай є вейвлет-твірна функція (материнський вейвлет, часто званий просто вейвлетом)  $\psi_0(t)$ , що породжує систему функцій  $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j}\psi_0(2^{-j}t - k), j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ , яка є ортонормованим базисом простору  $L_2$ . Сигнал  $s(t)$  може бути розкладений за таким базисом у вейвлетний ряд, відомий також як діадне вейвлет-перетворення:

$$s(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} d_x(j, k) 2^{-j} \psi_0(2^{-j}t - k),$$

$$d_x(j, k) = \langle x, \psi_{j,k} \rangle = 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_0(2^{-j}t - k) dt,$$

яке є окремим випадком ДВП, де масштабування та зсуви проводяться не обов'язково за допомогою діадної сітки (на основі степенів двійки).

На основі вейвлет-коефіцієнтів можна побудувати узагальнену статистичну суму

$$S_d(q, j) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_x(j, k)|^q$$

та скейлінгову експоненту

$$s_d(q) = \liminf_{j \rightarrow 0} \left( \frac{\log_2 S_d(q, j)}{j} \right),$$

де  $n_j$  — кількість відліків  $d_x(j, k)$  з заданим значенням  $j$ :  $n_j \approx n_0 2^{-j}$ . За визначенням мультифрактального спектра існує  $(2^j)^{D(h)}$  точок із показником Гельдера  $h$ , для яких  $|d_x(j, k)| \approx (2^j)^h$ . Вони роблять внесок у  $S_d(q, j)$  у вигляді  $\sim 2^j (2^j)^{qh} (2^j)^{-D(h)} = (2^j)^{1+qh-D(h)}$ . Отже, поведінка  $S_d(q, j)$  змінюється відповідно до  $\sim c_q (2^j)^{s_d(q)}$ , звідки випливає, що

$$\zeta_d(q) = \inf_h (1 + qh - D(h)),$$

$$D(h) = \inf_{q \neq 0} (1 + qh - s_d(q)).$$

Як і більшість методів фрактального аналізу, що ґрунтуються на вейвлетах, метод вейвлет-коефіцієнтів на сьогодні є дуже популярним серед фахівців (див., наприклад, [28, 180]).

### 3.3. Метод вейвлет-лідерів

Метод вейвлет-лідерів (англ. *wavelet leaders method*) був запропонований у 2005 р. С. Жаффаром (S. Jaffard), Б. Лашерме (B. Lashermes) і П. Ебрі (P. Abry) у роботах [28, 180].

Установлено, що метод вейвлет-коефіцієнтів виявляється ефективним тільки для сингулярності так званого касп-типу, тоді як у випадку сингулярності чирп-типу він дає незадовільні результати. Більш того, часто виникають проблеми зі стабільністю обчислювального процесу при  $q < -1$  через те, що багато вейвлет-коефіцієнтів  $d_x(j, k)$  мало відрізняються від нуля [28]. Ці труднощі можна подолати, якщо скористатися методом вейвлет-лідерів [28, 180].

На відміну від методу вейвлет-коефіцієнтів, побудуємо трохи інший базис

$$\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi_0(2^{-j}t - k), j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Уведемо альтернативні позначення для діадних інтервалів  $\lambda = \lambda_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j)$  і  $d_\lambda \equiv d_x(j, k)$ . Позначимо як  $3\lambda$  таке об'єднання інтервалів:  $3\lambda_{j,k} = \lambda_{j,k-1} \cup \lambda_{j,k} \cup \lambda_{j,k+1}$ . Установлено, що нерівність

$$|d_\lambda| \leq \int |x(t)| |\psi_{j,k}(t)| dt \leq C \|\psi_0\|_{L^1} \|x\|_{L^\infty}$$

виконується до тих пір, поки  $x \in L^\infty$  і величини

$$L_x(j, k) \equiv L_\lambda = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |d_{\lambda'}|$$

є обмеженими. Величини  $L_\lambda$  називають вейвлет-лідерами.

На основі вейвлет-лідерів будується новий мультифрактальний формалізм, який прийнято називати *WLMF* (від англ. *wavelet leader based multifractal formalism*). У цьому випадку узагальнена статистична сума  $S_L(q, j)$  і скейлінгова експонента  $s_L(q)$  мають вигляд відповідно:

$$S_L(q, j) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |L_x(j, k)|^q,$$

$$s_L(q) = \liminf_{j \rightarrow 0} \left( \frac{\log_2 S_L(q, j)}{j} \right).$$

Тоді функція мультифрактального спектра  $D(h)$  виходить із співвідношення

$$s_L(q) = \inf_h (1 + qh - D(h))$$

і має вигляд

$$D(h) = \inf_{q \neq 0} (1 + qh - s_L(q)).$$

Математиками доведено, що така оцінка мультифрактального спектра є більш точною, ніж отримана методом вейвлет-коефіцієнтів. Більше того, метод вейвлет-лідерів успішно справляється як із сингулярностями обох згаданих вище типів, так і з обчисленням мультифрактального спектра для від'ємних значень  $q$ . Платою за одержувані переваги є ускладнення алгоритму і, як наслідок, збільшення часу обчислень.

Метод вейвлет-лідерів також має багато спільного із методом *WTMM*, який обговорювався вище. Основна відмінність полягає в тому, що в методі *WTMM* використовуються хребти ФСШ НВП (або АВП), які не є впорядкованою структурою, оскільки остання залежить від аналізованого сигналу. Крім того, швидкість обчислень у методі вейвлет-лідерів виявляється суттєво вищою, оскільки використовується швидкий пірамідальний алгоритм Малла.

Оскільки метод вейвлет-лідерів найчастіше виявляється ефективнішим за метод вейвлет-коефіцієнтів, він набув заслуженої популярності у фахівців [28, 180].

### 3.4. Метод мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу (метод *MF DFA*)

Будучи узагальненням розглянутого вище методу *DFA*, метод мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу (англ. *multifractal detrended fluctuation analysis, MF DFA*) був запропонований Я. Кантельхардтом (*J. Kantelhardt*) та ін. у 2002 р. [174].

Нехай є дискретний сигнал  $s_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Алгоритм методу містить п'ять кроків.

*Крок 1.* На основі вихідного сигналу будуємо функцію, яка називається «профілем»:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [s_k - \langle s \rangle], \quad \langle s \rangle = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i s_k, \quad i = \overline{1, N}.$$

*Крок 2.* Поділяємо профіль  $Y(i)$  на  $N_\kappa = \lfloor N / \kappa \rfloor$  сегментів, що не перетинаються, однакової довжини  $\kappa$ . Оскільки у більшості випадків величина  $N$  не ділиться націло на  $\kappa$ , останній сегмент може виявитися коротшим за інші. Щоб не залишати без належної уваги цю частину сигналу, ту саму процедуру повторюємо, починаючи з кінця сигналу. У результаті отримуємо  $2N_\kappa$  сегментів.

*Крок 3.* У межах кожного з  $2N_\kappa$  сегментів обчислюємо локальний тренд, причому використовуємо для цього поліноміальну апроксимацію і метод найменших квадратів. Потім обчислюємо дисперсію:

$$F^2(\nu, \kappa) = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} \{ Y[(\nu-1)\kappa + i] - y_\nu(i) \}^2, \quad \nu = \overline{1, N_\kappa},$$

$$F^2(\nu, \kappa) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{\kappa} \{ Y[N - (\nu - N_s)\kappa + i] - y_\nu(i) \}^2,$$

$$\nu = \overline{N_\kappa + 1, 2N_\kappa}.$$

Тут під  $y_\nu(i)$  маємо на увазі апроксимуючий поліном у сегменті з номером  $\nu$ . Залежно від степеня полінома розрізняють методи *MF DFA1*, *MF DFA2*, *MF DFA3* і т. д.

*Крок 4.* Усереднюючи функцію  $F^2(\nu, \kappa)$  за всіма сегментами, отримуємо флуктуаційну функцію  $q$ -го порядку:

$$F_q(\kappa) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, \kappa)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad (35)$$

де змінна  $q$  може набувати будь-яке дійсне значення. Так, за умови  $q = 2$  отримуємо стандартну процедуру методу *DFA*. Кроки 2–4 слід повторити для різних значень  $\kappa$ . Зазначимо, що при використанні апроксимуючого полінома  $m$ -го порядку має дотримуватися нерівність  $\kappa \geq m + 2$ .

*Крок 5.* Оскільки флуктуаційна функція  $q$ -го порядку  $F_q(\kappa) \sim \kappa^{h(q)}$ , то в координатах  $\log F_q$  і  $\log \kappa$  слід за допомогою лінійної регресії, побудованої методом найменших квадратів, оцінити  $h(q)$  для різних значень  $q$ . Оскільки величина  $h(2)$  ідентична показникові Херста  $H$  вихідного сигналу  $x_k$ , то функцію  $h(q)$  називають узагальненим показником Херста. Слід зауважити, що при оцінюванні  $h(q)$  рекомендується виключати з розгляду як занадто великі ( $\kappa > N/4$ ), так і занадто малі ( $s \leq 10$ ) масштаби.

Оскільки величину  $F_0(\kappa)$  не можна отримати за допомогою формули (35), для її оцінки використовують таке співвідношення:

$$F_0(\kappa) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_\kappa} \sum_{\nu=1}^{2N_\kappa} \ln \left[ F^2(\nu, \kappa) \right] \right\} \sim \kappa^{h(0)}.$$

Звичайна для мультифрактального формалізму скейлінгова експонента  $\tau(q)$  пов'язана з  $h(q)$  співвідношенням  $\tau(q) = qh(q) - 1$ , а показник Ліпшиця-Гельдера  $\alpha$  і функція мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  — співвідношеннями  $\alpha = h(q) + q \frac{dh(q)}{dq}$  та  $f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1$  відповідно.

Ширина функції мультифрактального спектра визначається співвідношенням

$$\Delta\alpha = h(-\infty) - h(\infty), \quad \alpha_{\max} = h(-\infty), \quad \alpha_{\min} = h(\infty).$$

Ще однією цінною ідеєю, яка часто використовується у методі *MF DFA*, є застосування узагальненої біноміальної моделі мультифрактального процесу (див., наприклад, [181]), у межах якої використовується нелінійна апроксимація

$$h(q) = \frac{1}{q} - \frac{\ln[a^q + b^q]}{q \ln 2},$$

де параметри  $a$  і  $b$  обчислюються методом найменших квадратів. У цьому випадку легко отримати, що

$$\Delta\alpha = \frac{\ln b - \ln a}{\ln 2}, \quad \alpha_{\max} = \frac{\ln b}{\ln 2}, \quad \alpha_{\min} = \frac{\ln a}{\ln 2}.$$

Іншим варіантом спрощення роботи з функцією мультифрактального спектра є її апроксимація функцією

$$f(\alpha) = A(\alpha - \alpha_0)^2 + B(\alpha - \alpha_0) + C$$

за методом найменших квадратів (див., наприклад, [74, 182]). Для характеристики досліджуваного мультифрактального сигналу зазвичай використовують параметри  $\alpha_0$ ,  $B$  і  $W = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ , де  $f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0$ . Перший з них є положенням максимуму функції мультифрактального спектра, другий описує її асиметрію, а третій — ширину. Такий підхід був запропонований Ю. Шимизу та ін. у 2002 р. [183].

У роботі [174] продемонстровано, що точність і здатність до ефективного видалення тренду у методів *WTMM* і *MF DFA* є приблизно однако-

вою. Для фахівців, які використовують системи комп'ютерної математики *MatLab* і *SciLAB*, буде корисною докладна оглядова стаття [184].

Сьогодні метод *MF DFA* є дуже популярним серед дослідників (див., наприклад, [70, 168, 177, 178, 184, 185]).

### 3.5. Метод узагальненого показника Херста

Узагальнений показник Херста  $h(q)$ , розглянутий у попередньому пункті, можна обчислювати в інший спосіб. Скоріш за все, концепція узагальненого показника Херста виникла 1991 р. у роботі [186]. Проте нинішню назву методу вдалося знайти лише у роботі Т. Ді Маттео [187], опублікованій у 2003 р.

У рамках описуваного методу [187, 188] узагальнений показник Херста  $h(q)$  сигналу  $s(t)$  відшуковують за допомогою співвідношень

$$K_q(\tau) = \frac{\langle |s(t+\tau) - s(t)|^q \rangle}{\langle |s(t)|^q \rangle}, \quad K_q(\tau) \sim \left( \frac{\tau}{\nu} \right)^{qh(q)},$$

де  $\tau$  — час запізнювання сигналу;  $\nu$  — часова роздільна здатність (час між двома послідовними відліками сигналу).

Оцінка показника Херста проводиться шляхом побудови лінійної регресії методом найменших квадратів на площині  $\ln K_q(\tau)$  і  $q \ln \tau$ :

$$\ln K_q(\tau) = qh(q) \ln \tau + c, \quad \tau = \overline{1, \tau_{\max}}.$$

Для дискретного сигналу  $x_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , розрахункові формули мають вигляд:

$$K_q(\tau) = \frac{\langle |s_N - s_{N-\tau}|^q \rangle}{\langle |s_{N-\tau}|^q \rangle}, \quad \tau = \overline{1, \tau_{\max}},$$

$$\langle |s_N - s_{N-\tau}|^q \rangle = \frac{1}{N-\tau} \sum_{i=0}^{N-\tau-1} |s_{N-i} - s_{N-\tau-i}|^q,$$

$$\langle |s_{N-\tau}|^q \rangle = \frac{1}{N-\tau} \sum_{i=0}^{N-\tau-1} |s_{N-\tau-i}|^q.$$

Величини  $\tau_{\max}$  і  $q$  авторами [187] при  $N = 1000$  обиралися рівними  $\tau_{\max} = 5, 20$ ,  $q = 1, 3$ .

Установлено, що  $h(1) \approx H$ , де  $H$  — звичайний показник Херста досліджуваного сигналу, а ве-

личина  $h(2)$  пов'язана із спектральним показником сигналу  $\beta$  співвідношенням  $\beta = 1 + 2h(2)$ .

Також важливою характеристикою сигналу вважається величина  $q = q^*$ , яка відшукується з умови  $q^*h(q^*) = 1$ . Для монофрактального сигналу виконується умова  $h(1) = h(2) = \dots = h(q) = H$ .

Найчастіше оцінка узагальненого показника Херста  $h(q)$  проводиться з використанням ковзного вікна скінченної ширини у часовій області, що дає можливість отримувати часову залежність  $h(q, t)$ . На практиці зазвичай (див., наприклад, [188]) досліджують залежності  $h(1, t)$  і  $h(2, t)$ .

Метод узагальненого показника Херста успішно використовується спеціалістами-практиками [162, 177, 188].

### 3.6. Метод, що ґрунтується на перетвореннях класу Коена

У роботах [189, 190] П. Флендрін показав, що з використанням білінійного аналізу і нелінійних квадратичних інтегральних перетворень класу Коена можна отримувати оцінки локального показника Гельдера  $H(t)$  для досліджуваного сигналу  $s(t)$ . Нагадаємо, що показник Гельдера також називають показником Ліпшиця-Гельдера, показником сингулярності, експонентою сингулярності або експонентою Гельдера [191]. Слід зауважити, що у науковій літературі слово «експонента» часто вживають як синонім слова «розмірність» (див., наприклад, [13]).

Розглянемо основну ідею цього методу. Тут ми використовуємо так звані афінні перетворення класу Коена [192, 193], які складають підклас у добре відомому класі Коена нелінійних квадратичних інтегральних перетворень [3].

Фрактальна спектральна щільність афінних перетворень класу Коена сигналу  $x(t)$  задається співвідношенням [192, 193]:

$$\Omega_x(t, a; \Pi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\kappa, \xi) \Pi\left(\frac{\kappa - t}{a}, a\xi\right) d\kappa d\xi,$$

де  $W_x(t, \nu)$  — ФСЩ перетворення Вігнера, яка визначається виразом

$$W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau,$$

$\Pi(t, \nu)$  — функція, унікальна для кожного перетворення цього класу.

Важливо зазначити, що спектрограма Фур'є  $P_S f(\omega, \tau) = |Sf(\omega, \tau)|^2$ , де  $Sf(\omega, \tau)$  — СФ динамічного (віконного) перетворення Фур'є, і скейлограма  $P_W f(a, b) = |Wf(a, b)|^2$ , де  $Wf(a, b)$  — СФ БВП або АВП, також належать до розглянутого класу перетворень.

Локальний показник Гельдера визначається співвідношенням

$$H(t) = \frac{\frac{k}{2} \int_0^{\infty} a \Omega_x(t, a; \Pi) e^{-ka} da}{\int_0^{\infty} \Omega_x(t, a; \Pi) e^{-ka} da} - 1,$$

де  $k$  — деяке додатне число, яке обирають таким, щоб виконувалася вимога

$$\Omega_x(t, a; \Pi) \sim |a|^{2H(t)+1}, \quad a \rightarrow +0.$$

У роботі [189] є строго обґрунтований алгоритм вибору величини  $k$ , яка, насамперед, визначається використанням перетворенням. Проте автори роботи [194] стверджують, що на практиці в більшості випадків можна просто покласти  $k = 8$ .

Далі на основі отриманої оцінки локального показника Гельдера  $H(t)$  отримуємо відповідну фрактальну розмірність  $D_{LG}(t) = 2 - H(t)$ .

Нагадаємо, що Б. Мандельброт вважав, що розмірність  $D_{LG}(t)$  еквівалентна поточковій розмірності  $D_p$ , яка була розглянута у пункті 2.4.3 першої частини нашого огляду [1].

Цей метод активно використовується фахівцями (див., наприклад, [194]).

### 3.7. Інші методи

Через обмеженість об'єму до цієї роботи не потрапили такі цікаві методи, як метод виявлення мультифрактального режиму [59], метод зваженого узагальненого показника Херста [195], локальний метод другого моменту [68], метод MFDEA (від англ. *multifractal diffusion entropy analysis*) [196].

Крім докладно розглянутих у цьому огляді, слід також згадати менш відомі методи мультифрактального аналізу сигналів і процесів. До їх числа належить, наприклад, метод мультифрактального спектра з великими відхиленнями (англ. *large deviation multifractal spectrum method*),



який запропонували у 2001 р. М. Бронятовський (М. Broniatowski) та П. Міньо (P. Mignot) у роботі [197]. Судячи з публікацій фахівців-прикладників, цей метод поки що не набув широкої популярності через його надмірну математизацію, хоча окремі спроби його практичного застосування мали місце [56, 198].

Те саме можна сказати і про метод кумулятивної маси (англ. *cumulative mass method*), відомий також як метод «пісочниці» (*The “sandbox” method*), який був запропонований у 1990 р. Т. Віцеком (T. Visek) у роботі [199]. Існує також мультифрактальне узагальнення методу DMA (від англ. *detrended moving average*) [201] — метод MFDMA. Його запропонували у 2010 р. G.-F. Gu і W.-X. Zhou у роботі [200]. Автор [56] стверджує, що у деяких випадках метод MFDMA показує кращі результати, ніж метод MFDEFA.

Слід також зазначити, що вже з'явилися методи, які застосовуються на межі мультифрактального аналізу та інших напрямів обробки сигналів і процесів. До них належать, наприклад, методи DCCA (від англ. *Detrended cross-correlation analysis*) і MF-DXA (від англ. *Multi-fractal detrended cross-correlation analysis*). Скоріш за все, методами мультифрактального аналізу їх назвати вже складно, але вони перебувають на стику крос-кореляційного та мультифрактального аналізів і дозволяють оцінити крос-кореляцію двох сигналів із використанням детрендування та мультифрактальних властивостей (див., наприклад, [202]).

## Висновки

1. Сучасний фрактальний аналіз сигналів і процесів можна розділити на дві частини: монофрактальний і мультифрактальний аналізи.

2. На сьогодні існує велика кількість методів моделювання як детермінованих, так і стохастичних фрактальних сигналів і процесів.

3. У рамках монофрактального аналізу створено багато різних методів, що дозволяють оцінювати як окремі числові характеристики фрактальних сигналів і процесів, так і комплексно підходити до їх дослідження.

4. Існують ефективні сучасні методи мультифрактального аналізу сигналів, а також методи, що застосовуються на стику фрактального аналізу та інших напрямків аналізу сигналів і процесів (наприклад, кореляційного аналізу, часово-частотного аналізу тощо).

На закінчення наведемо думку авторів роботи [89]. Вони вважають, що у галузі монофрактального і мультифрактального аналізу існує серйозна проблема. Вона пов'язана з принциповою необхідністю дискретизації (дискретної апроксимації) реальних досліджуваних об'єктів. Ця дискретизація «вбиває» всі фрактальні властивості, які розкриваються лише у граничному випадку. Розв'язання цієї проблеми, на їхню думку, полягає у створенні специфічної теорії числового фрактального аналізу, заснованого на методах фрактальної інтерполяції та апроксимації (див., наприклад, [20, 203]).

Тим часом, після публікації роботи [89] минуло вже більше десяти років, а така теорія, наскільки нам відомо, досі не з'явилася (або принаймні не набула поширення поза колом «чистих» математиків). Отже, для практиків, на нашу думку, має сенс продовжувати вивчати і розвивати викладені вище методи монофрактального та мультифрактального аналізу сигналів і процесів. Сподіваємося, що наша оглядова стаття надасть у цьому необхідну допомогу.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Фрактальная радиофизика. 1. Теоретические основы. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2020. Т. 25, № 1. С. 3–77. DOI: 10.15407/rpra25.01.003.
2. Madisetti V.K., ed. *The Digital Signal Processing Handbook. Wireless, Networking, Radar, Sensor Array Processing, and Nonlinear Signal Processing*. Boca Raton: CRC Press, 2014. 876 p.
3. Cohen L. *Time-Frequency Analysis*. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1994. 300 p.
4. Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. *Сверхширокополосные сигналы и процессы*. Монографія. Харьков: Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 2009. 576 с.
5. Gil'mutdinov A.K., Ushakov P.A., and El-Kharazi R. *Fractal Elements and their Applications*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ., 2017. 252 p.
6. Kantz H., and Schreiber T. *Nonlinear Time Series Analysis*. New York: Cambridge University Press, 2003. 369 p.

7. Astanin L.Y., Kostylev A.A. *Ultrawideband Radar Measurements: Analysis and Processing*. London: The Institute of Electrical Engineers, 1997. 244 p.
8. Wornell G. *Signal Processing with Fractals: A Wavelet-Based Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall PTR, 1996. 177 p.
9. Cattani C. Wavelet Based Approach to Fractals and Fractal Signal Denoising. *Lecture Notes in Computer Science*. 2009. P. 143–162. DOI: 10.1007/978-3-642-10649-1\_9.
10. Gelfand I.M., Shilov G.E., Vilenkin N.Y., and Graev M.I. *Generalized Functions*. Vol. 1. Properties and Operators. New York: Academic Press, 1964. 423 p.
11. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman and Company, 1983. 468 p.
12. Du Bois-Reymond P. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. *J. für die Reine und Angew. Math. (Crelle)*. 1895. Vol. 79. P. 21–37.
13. Bandt C., Barnsley M., Devaney R., Falconer K.J., Kannan V., and Vinod Kumar P.B., eds. *Fractals, Wavelets, and their Applications: Contributions from the International Conference and Workshop on Fractals and Wavelets (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)*. Switzerland: Springer Int. Publ., 2014. 508 p.
14. Bailland B., Bourget H. *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. Paris: Gauthier-Villars, 1905.
15. Peintgen H.-O., and Saupe D., eds. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag, 1988. 312 p.
16. Crownover R.M. *Introduction to Fractals and Chaos*. Boston: Jones and Bartlett Publ., 1995. 299 p.
17. Schroeder M. *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite*. New York: W.H. Freeman and Company, 1991. 429 p.
18. Perrin J. La discontinuité de la matiere. *Revue du mois*. 1906. Vol. 1. P. 323–344.
19. Massopust P.R. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. Amsterdam, Boston et al.: Academic Press, 2016. 405 p.
20. Falconer K. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. Second ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2003. 337 p.
21. Bandt C., Falconer K., Zaehle M. *Fractal Geometry and Stochastics V*. Basel: Birkhauser Verlag, 2015. 339 p.
22. Holschneider M. *Wavelets: An Analysis Tool*. Oxford: Calderon Press, 1995. 423 p.
23. Hardy G.H. Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. AMS*. 1916. Vol. 17. P. 301–325.
24. Feder J. *Fractals*. New York and London: Springer Science, 1988. 305 p.
25. Berry M.V., Lewis Z.V. On the Weierstrass-Mandelbrot Fractal Function. *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci*. 1980. Vol. 370(1743). P. 459–484. DOI: 10.1098/rspa.1980.0044.
26. West B.J., Bologna M., Grigolini P. *Physics of Fractal Operators*. New York: Springer-Verlag, 2003. 349 p.
27. Gerver J. The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of  $\pi$ . *Am. J. Math.* 1970. Vol. 92, Iss. 1. P. 33–55. DOI: 10.2307/2373496.
28. Lashermes B., Jaffard S., Abry P. Wavelet Leader based Multifractal Analysis. *2005 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '05)*. Philadelphia, Pennsylvania, USA, 18–23 March 2005. IEEE, 2005. P. 201–246. DOI: 10.1109/icassp.2005.1415970.
29. Cellerrier M.Ch. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. *Darboux Bull.* 1890. Vol. 14. P. 142–160.
30. Thim J. *Continuous nowhere differentiable functions: Master thesis*. Lulea: Lulea University of Technology, 2003. 94 p.
31. Raghavendra B.S., Narayana Dutt D. Computing fractal dimension of signals using multiresolution box-counting method. *Int. J. Inf. Math. Sci.* 2010. Vol. 6, Iss. 1. P. 50–65.
32. Liaw S.-S., Chiu F.-Y. Fractal dimensions of time sequences. *Phys. A: Stat. Mech.* 2009. Vol. 388, Iss. 15–16. P. 3100–3106. DOI: 10.1016/j.physa.2009.04.011.
33. Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. San Diego, CA: Academic Press, 1998.
34. Meyer Y. *Wavelets: Algorithms and Applications*. Philadelphia: SIAM, 1993. 250 p.
35. Shelevytsky I., Novikova O. Fractal Spline Signals: Synthesis and Estimation. *2013 IEEE XXXIII Int. Scientific Conf. Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*. Kyiv, Ukraine. 16–19 April 2013. DOI: 10.1109/ELNANO.2013.6552006.
36. Chernogor L.F., Lazorenko O.V. Fractal Ultra-Wideband Signals. *Proc. Second International Workshop "Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals"*. Sevastopol, Ukraine, 19–22 Sept. 2004. Sevastopol, 2004. P. 118–120.
37. Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Фрактальные сверхширокополосные сигналы. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2005. Т. 10, № 1. С. 62–84.
38. Chernogor L.F., Lazorenko O.V., Onishchenko A.A. New Models of the Fractal Ultra-Wideband Signals. *Proc. 8th Int. Conf. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*. Odessa, Ukraine. 5–11 Sept. 2016. Odessa, 2016. P. 89–92. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2016.7724158.
39. Chernogor L.F., Lazorenko O.V., Lazorenko S.V. Wavelet Analysis and Ultra-wideband signals. *Radio Physics & Radio Astronomy*. 2002. Vol. 7, Iss. 4. P. 471–474.
40. Лазоренко О.В., Лазоренко С.В., Черногор Л.Ф. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения сверхширокополосных сигналов на фоне помех. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2002. Т. 7, № 1. С. 46–63.
41. Goncalves P., Flandrin P. Bilinear time-scale analysis applied to local scaling exponents estimation. Y. Meyer, S. Roques, eds. *Progress in Wavelet Analysis and Applications*. Editions Frontieres, 1992. P. 271–276.
42. Goncalves P., Flandrin P. Scaling exponents estimation from timescale energy distributions. *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-92)*. San Francisco, CA, 23–26 March 1992. Vol. 5. P. 157–160.
43. Samorodnitsky G., Taquq M.S. *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Modeling*. NY: Chapman & Hall, 1994.
44. Mandelbrot B. Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi. Application à la loi climatologique de H.E. Hurst. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*. 1965. Vol. 240. P. 3274–3277.

45. *Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов*. Коллективная монография. Под. ред. Р.Э. Пашенко. Харьков: ХООО НЭО ЭкоПерспектива, 2006. 348 с.
46. Radivilova T., Kirichenko L., Ageiev D., Bulakh V. The methods to improve quality of service by accounting secure parameters. Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. eds. *Advances in computer science for engineering and education II. ICCSEEA 2019. Advances in intelligent systems and computing*. 2020. Vol. 938. Springer, Cham. P. 346–355.
47. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.* 1968. Vol. 10. P. 422–437.
48. Dauphiné A. *Fractal Geography*. London, Hoboken: John Wiley & Sons, 2012. 241 p.
49. Kolmogorov A.N. Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen raum. *Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS (N.S.)*. 1940. Vol. 26. P. 115–118.
50. Davies R.B., Harte D.S. Tests for Hurst effect. *Biometrika*. 1987. Vol. 74, Iss. 1. P. 95–101. DOI: 10.1093/biomet/74.1.95.
51. Eke A., Herman P., Kocsis L., and Kozak L.R. Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals. *Physiol. Meas.* 2002. Vol. 23. P. R1–R38.
52. Sithi V.M., Lim S.C. On the spectra of Riemann-Liouville fractional Brownian motion. *J. Phys. A Math. Gen.* 1995. Vol. 28, Iss. 11. P. 2995–3003. DOI:10.1088/0305-4470/28/11/005.
53. Пашенко Р.Э. *Основы теории формирования фрактальных сигналов*. Харьков: ХООО НЭО Экоперспектива, 2005. 296 с.
54. Кіріченко Л.О., Радівілова Т.А. *Фрактальний аналіз самоподібних і мультифрактальних часових рядів*. Монографія. Харків: ХНУРЕ, 2019. 106 с.
55. Muniandy S.V., Lim S.C., Murugan R. Inhomogeneous scaling behaviors in Malaysian foreign currency exchange rates. *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* 2001. Vol. 301, Iss. 1–4. P. 407–428. DOI: 10.1016/s0378-4371(01)00387-9.
56. *The Fractal Geometry of the Brain*. Di Ieva A., ed. New York: Springer-Verlag, 2016. 585 p.
57. Karperien A.L., and Jelinek H.F. Fractal, multifractal, and lacunarity analysis of microglia in tissue engineering. *Front. Bioeng. Biotechnol.* 2015. Vol. 3. Article 51.
58. Klinkenberg B. A review of methods used to determine the fractal dimension of linear features. *Math. Geol.* 1994. Vol. 26, Iss. 1. P. 23–46.
59. Preißl H., Lutzenberger W., Pulvermüller F., Birbaumer N. Fractal dimensions of short EEG time series in humans. *Neurosci. Lett.* 1997. Vol. 225, Iss. 2. P. 77–80. DOI:10.1016/s0304-3940(97)00192-4.
60. Lopes R., Betrouni N. Fractal and multifractal analysis: A review. *Med. Image Anal.* 2009. Vol. 13. P. 634–649.
61. Esteller R., Vachtsevanos G., Echaz J., and Litt B. A comparison of waveform fractal dimension algorithms. *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl.* 2001. Vol. 48. P. 177–183.
62. Seuront L. *Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2010. 344 p.
63. Jura J., Kubena A.A., Novak M. Development of Methods of the Fractal Dimension Estimation for the Ecological Data Analysis. Matoušek, R. ed. 2017. *Recent Advances in Soft Computing. Advances in Intelligent Systems and Computing*. P. 252–263. DOI: 10.1007/978-3-319-58088-3.
64. Berry M. Diffractals. *J. Phys. A. Math. Gen.* 1979. Vol. 12. P. 781–797.
65. Pentland A. Fractal-based description of natural scenes. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1984. Vol. 6, Iss. 6. P. 661–674.
66. Hastings H.M., Sugihara G. *Fractals: A User's Guide for the Natural Science*. Oxford: Oxford University Press, 1993.
67. Crilly A.J., Earnshaw R., and Jones H., eds. *Applications of Fractals and Chaos: The Shape of Things*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. 277 p.
68. Super B.J., Bovik A.C. Localized measurement of image fractal dimension using gabor filters. *J. Vis. Commun. Image Represent.* 1991. Vol. 2, Iss. 2. P. 114–128. DOI:10.1016/1047-3203(91)90002-w.
69. Eke A., Hermán P., Bassingthwaite J., Raymond G., Percival D., Cannon M., Balla I., & Ikrényi C. Physiological time series: distinguishing fractal noises from motions. *Pflügers Arch. – Eur. J. Physiol.* 2000. Vol. 439, Iss. 4. P. 403–415. DOI: 10.1007/s004249900135.
70. *Fractal Behavior of the Earth System*. Dimri V.P. ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 208 p.
71. Lomb N.R. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophys. Space Sci.* 1976. Vol. 39. P. 447–462.
72. Telesca L., Colangelo G., Lapenna V., Macchiato M. Monofractal and multifractal characterization of geoelectrical signals measured in southern Italy. *Chaos Solit. Fractals*. 2003. Vol. 18. P. 385–399.
73. Yamamoto Y., Hughson R.L. Coarse-graining spectral analysis: new method for studying heart rate variability. *J. Appl. Physiol.* 1991. Vol. 71, Iss. 3. P. 1143–1150. DOI: 10.1152/jappl.1991.71.3.1143.
74. Yamamoto Y., Hughson R.L. Extracting fractal components from time series. *Physica D*. 1993. Vol. 68, Iss. 2. P. 250–264. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90083-d.
75. Yamamoto Y. Detection of Chaos and Fractals from Experimental Time Series. Windhorst U., Johansson H., eds. *Modern Techniques in Neuroscience Research*. Springer, Berlin, Heidelberg. 1999. P. 669–687. DOI: 10.1007/978-3-642-58552-4\_24.
76. Russell D.A., Hanson J.D., Ott E. Dimension of Strange Attractors. *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45, Iss. 14. P. 1175–1178.
77. Pontrjagin L., Schnirelman L. Sur une propriété métrique de la dimension. *Ann. Math.* 1932. Vol. 33. P. 156–162.
78. Normant F., Tricot C. Method for evaluating the fractal dimension of curves using convex hulls. *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43, Iss. 12. P. 6518–6525. DOI: 10.1103/physrev.43.6518.
79. Appleby S. Multifractal characterization of the distribution pattern of the human population. *Geogr. Anal.* 1996. Vol. 28, Iss. 2. P. 147–160.



80. Pruess S.A. Some Remarks on the Numerical Estimation of Fractal Dimension. Barton C.C., La Pointe P.R., eds. *Fractals in the Earth Sciences*. Boston, MA: Springer, 1995.
81. Sanderson B., Goulding A., Okubo A. The fractal dimension of relative Lagrangian motion. *Tellus*. 1990. Vol. 42A. P. 550–556.
82. Adler C., Carter P., Cawley R. A comparison of the fractal dimension of cloud radiance graphs for two infrared color bands. Kim Y.S., and Zachary W.W. eds. *The Physics of Phase Space*. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
83. Carter P., Cawley R., Mauldin R. D. Mathematics of dimension measurements for graphs of functions. Weitz D., Sander L., Mandelbrot B. eds. *Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems*. Materials Research Society Proceedings. 1988.
84. Sarkar N., Chaudhuri B.B. An efficient approach to estimate fractal dimension of textural images. *Pattern Recognit.* 1992. Vol. 25, Iss. 9. P. 1035–1041. DOI: 10.1016/0031-3203(92)90066-r.
85. Sarkar N., Chaudhuri B. B. An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* 1994. Vol. 24, Iss. 1. P. 115–120. DOI: 10.1109/21.259692.
86. Chen W.-S., Yuan S.-Y. Some Fractal Dimension Estimate Algorithms and Their Applications To One-Dimensional Biomedical Signals. *Biomed. Eng. Appl. Basis Commun.* 2002. Vol. 14. P. 100–108.
87. Khoa T.Q.D., Ha V.Q., Toi V.V. Higuchi Fractal Properties of Onset Epilepsy Electroencephalogram. *Comput. Math. Methods Med.* 2012. ID 461426. P. 1–6. DOI: 10.1155/2012/461426.
88. Sandau K., Kurz H. Measuring fractal dimension and complexity—an alternative approach with an application. *J. Microsc.* 1997. Vol. 186, Iss. 2. P. 164–176.
89. Prigarin S., Hahn K., Winkler G. Comparative analysis of two numerical methods to measure Hausdorff dimension of the fractional Brownian motion. *Numer. Anal. Appl.* 2008. Vol. 1, Iss. 2. P. 163–178.
90. Hall P., Wood A., On the performance of box-counting estimators of fractal dimension. *Biometrika*. 1993. Vol. 80. P. 246–252.
91. Gneiting T., Schlather M. Stochastic Models That Separate Fractal Dimension and the Hurst Effect. *SIAM Rev.* 2004. Vol. 46, No. 2. P. 269–282.
92. Gneiting T., Sevcikova H. and Percival D.B. Estimators of fractal dimension: assessing the roughness of time series and spatial data. *Statist. Sci.* 2012. Vol. 27. P. 247–277.
93. Tricot C., Quiniou J. F., Wehbi D., Roques-Carmes C., Dubuc B. Evaluation de la dimension fractale d'un graphe. *Revue Phys. Appl.* 1988. Vol. 23. P. 111–124.
94. Bouligand G. Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble ferme. *Bull. Sci. Math.* 1929. Vol. 52. P. 185–192.
95. Pilgrim I., Taylor R. Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges. *Fractal Analysis*. 2019. DOI: 10.5772/intechopen.81958.
96. Dubuc B., Quiniou J.F., Roques-Carmes C., Tricot C., Zucker S.W. Evaluating the fractal dimension of profiles. *Phys. Rev. A*. 1989. Vol. 39. P. 1500–1512.
97. Dubovikov M.M., Starchenko N.V., Dubovikov M.S. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series. *Physica A*. 2004. Vol. 339. P. 591–608.
98. Mantegna R.N., and Stanley H.E. Scaling Behavior in the Dynamics of Economic Index. *Nature*. 1995. Vol. 376. P. 46–49.
99. Burlaga L.F., Klein L.W. Fractal structure of the interplanetary magnetic field. *J. Geophys. Res.* 1986. Vol. 91, Iss. A1. P. 347–350. DOI: 10.1029/ja091ia01p00347.
100. Mandelbrot B. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Paris: Flammarion, 2010. 216 p.
101. Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A. The dimension of chaotic attractors. *Physica D*. 1983. Vol. 7, Iss. 1–3. P. 153–180.
102. Higuchi T. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D*. 1988. Vol. 31. P. 277–283.
103. Liebovitch L.S. *Fractals and Chaos: Simplified for the Life Sciences*. Oxford: Oxford University Press, 1998. 249 p.
104. Affinito M., Carrozzi M., Accardo A., Bouquet F. Use of the fractal dimension for the analysis of electroencephalographic time series. *Biol. Cybern.* 1997. Vol. 77, Iss. 5. P. 339–350. DOI: 10.1007/s004220050394.
105. Schmittbuhl J., Vilotte J.-P., Roux S. Reliability of self-affine measurements. *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, Iss. 1. P. 131–147. DOI: 10.1103/physreve.51.131.
106. Klonowski W. Chaotic dynamics applied to signal complexity in phase space and in time domain. *Chaos Solit. Fractals*. 2002. Vol. 14. P. 1379–1387.
107. Higuchi T. Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: A numerical investigation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1990. Vol. 46, Iss. 2. P. 254–264. DOI: 10.1016/0167-2789(90)90039-r.
108. Katz M. J. Fractals and the analysis of waveforms. *Comput. Biol. Med.* 1988. Vol. 18, Iss. 3. P. 145–156. DOI: 10.1016/0010-4825(88)90041-8.
109. Castiglioni P. What is wrong in Katz's method? Comments on: "A note on fractal dimensions of biomedical waveforms." *Comput. Biol. Med.* 2010. Vol. 40, Iss. 11–12. P. 950–952. DOI: 10.1016/j.compbiomed.2010.10.001.
110. Pradhan N., Narayana Dutt D. Use of running fractal dimension for the analysis of changing patterns in electroencephalograms. *Comput. Biol. Med.* 1993. Vol. 23, Iss. 5. P. 381–388. DOI: 10.1016/0010-4825(93)90135-n.
111. Acharya R.U., Faust O., Kannathala N., Chua T., Laxminarayan S. Non-linear analysis of EEG signals at various sleep stages. *Comput. Methods Programs Biomed.* 2005. Vol. 80. P. 37–45.
112. Petrosian A. Kolmogorov complexity of finite sequences and recognition of different preictal EEG patterns. *Proc. Eighth IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems*. Lubbock, Texas, USA. 9–10 June 1995. IEEE, 1995. P. 212–217. DOI: 10.1109/cbms.1995.465426.
113. Ezeiza A., López de Ipiña K., Hernández C., Barroso N. Enhancing the Feature Extraction Process for Automatic Speech Recognition with Fractal Dimensions. *Cogn. Comput.* 2012. Vol. 5, Iss. 4. P. 545–550. DOI:10.1007/s12559-012-9165-0.



114. Sevcik C. On fractal dimension of waveforms. *Chaos Solit. Fractals*. 2006. Vol. 28. P. 579–580.
115. Gnitecki J., Moussavi Z. The fractality of lung sounds: A comparison of three waveform fractal dimension algorithms. *Chaos Solit. Fractals*. 2005. Vol. 26. P. 1065–1072.
116. Kalauzi A., Spasic S., Culic M., Grbic G., Martac L. J. Consecutive Differences as a Method of Signal Fractal Analysis. *Fractals*. 2005. Vol. 13, Iss. 04. P. 283–292. DOI: 10.1142/s0218348x05002933.
117. Kalauzi A., Bojić T., Rakić L. Extracting complexity waveforms from one-dimensional signals. *Nonlinear Biomed. Phys.* 2009. Vol. 3, Iss. 1. Article 8. DOI: 10.1186/1753-4631-3-8.
118. Nakagawa M. A Critical Exponent Method to Evaluate Fractal Dimensions of Self-Affine Data. *J. Phys. Soc. Japan*. 1993. Vol. 62, Iss. 12, P. 4233–4239. DOI: 10.1143/jpsj.62.4233.
119. Sabanal S., Nakagawa, M. The fractal properties of vocal sounds and their application in the speech recognition model. *Chaos Solit. Fractals*. 1996. Vol. 7, Iss. 11. P. 1825–1843. DOI: 10.1016/s0960-0779(96)00043-4.
120. De Oliveira L.P.L., Roque W.L., Custidio R.F. Lund Sound Analysis with Time-Dependent Fractal Dimensions. *Chaos Solit. Fractals*. 1999. Vol. 10, Iss. 9. P. 1419–1423.
121. Phinyomark A., Phothisonothai M., Suklaead P., Phukpattaranont P., Limsakul C. Fractal Analysis of Surface Electromyography (EMG) Signal for Identify Hand Movements Using Critical Exponent Analysis. *Commun. Comput. Inf. Sci.* 2011. P. 703–713. DOI: 10.1007/978-3-642-22191-0\_62.
122. Bigerelle M., Iost A. Calcul de la dimension fractale d'un profil par la methode des autocorrelations moyenees normees (AMN). *C.R. Acad. Sci. Paris*. 1996. Vol. 323, Serie II b. P. 669–674.
123. Maragos P., Fan-Kon Sun. Measuring the Fractal Dimension of Signals: Morphological Covers and Iterative Optimization. *IEEE Trans. Signal Process.* 1993. Vol. 41, Iss. 1. P. 108–121. DOI: 10.1109/tsp.1993.193131.
124. Serra J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. London-New York: Academic Press, 1982. 610 p.
125. Maragos P., Potamianos A. Fractal dimensions of speech sounds: Computation and application to automatic speech recognition. *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. Vol. 105, Iss. 3. P. 1925–1932.
126. Kith K., Sourina O., Kulish V., Khoa N.M. An algorithm for fractal dimension calculation based on Renyi entropy for short time signal analysis. *2009 7th Int. Conf. on Information, Communications and Signal Processing (ICICIS)*. Macau Fisherman's Wharf, Macao. 8–10 Dec. 2009. P. 1–5. DOI: 10.1109/icicis.2009.5397510.
127. Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S., Simons M., Stanley H.E., Goldberger A.L. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 1685–1689.
128. Mandelbrot B. Self-Affine Fractals and Fractal Dimension. *Phys. Scr.* 1985. Vol. 32, Iss. 4. P. 257–260. DOI: 10.1088/0031-8949/32/4/001
129. Peng C.-K., Havlin S., Stanley H. E., Goldberger A. L. Quantification of scaling Exponents and Crossover Phenomena in Nonstationary Heartbeat Time Series. *Chaos Solit. Fractals*. 1995. Vol. 5, Iss. 1. P. 82–87.
130. Telesca L., Macchiato M. Time-scaling properties of the Umbria-Marche 1997–1998 seismic crisis, investigated by the detrended fluctuation analysis of interevent time series. *Chaos Solit. Fractals*. 2004. Vol. 19. P. 377–385.
131. Kantelhardt J.W., Koscielny-Bunde E., Rego H.H.A., Havlin S., Bunde A. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A*. 2001. Vol. 295. P. 441–454.
132. Buldyrev S.V., Goldberger A.L., Havlin S., Mantegna R.N., Matsu M.E., Peng C.-K., Simons M., Stanley H.E. Long-range correlation properties of coding and noncoding DNA sequences: GenBank analysis. *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, Iss. 5. P. 5084–5091. DOI: 10.1103/physreve.51.5084.
133. Bunde A., Havlin S., Kantelhardt J.W., Penzel T., Peter J.-H., Voigt K. Correlated and Uncorrelated Regions in Heart-Rate Fluctuations during Sleep. *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, Iss. 17. P. 3736–3739. DOI: 10.1103/physrevlett.85.3736.
134. Habib A., Sorensen J.P.R., Bloomfield J.P., Muchan K., Newell A.J., Butler A.P. Temporal scaling phenomena in groundwater-floodplain systems using robust detrended fluctuation analysis. *J. Hydrol.* 2017. Vol. 549. P. 715–730.
135. Tan C.O., Cohen M.A., Eckberg D.L., and Taylor J.A. Fractal properties of human heart period variability: physiological and methodological implications. *J. Physiol.* 2009. Vol. 587, Iss. 15. P. 3929–3941.
136. Arzac L.M., and Deschodt-Arsac V. Detrended fluctuation analysis in a simple spreadsheet as a tool for teaching fractal physiology. *Adv. Physiol. Educ.* 2018. Vol. 42. P. 493–499.
137. Mandelbrot B., and Wallis J.R. Computer experiments with fractional Gaussian noises. *Water Resour. Res.* 1969. Vol. 5, Iss. 1. P. 228–241.
138. Riley M.A., Bonnette S., Kuznetsov N., Wallot S., Gao J. A tutorial introduction to adaptive fractal analysis. *Front. Physiol.* 2012. Vol. 3. DOI: 10.3389/fphys.2012.00371.
139. Gao J.B., Sultan H., Hu J., and Tung W.W. Denoising nonlinear time series by adaptive filtering and wavelet shrinkage: a comparison. *IEEE Signal Process. Lett.* 2010. Vol. 17. P. 237–240.
140. Vandewalle N., Ausloos M. Crossing of two mobile averages: A method for measuring the roughness exponent. *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58, Iss. 5. P. 6832–6834. DOI: 10.1103/physreve.58.6832.
141. Peltier R.F., and Lévy-Véhel J. A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion. *INRIA Research Report*. No. 2396. 1994.
142. Hardy H.H., Beier R.A. *Fractals in Reservoir Engineering*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1994. 359 p.
143. Taqqu M.S., Teverovsky V., Willinger W. Estimators For Long-Range Dependence: An Empirical Study. *Fractals*. 1995. Vol. 03, Iss. 04. P. 785–798. DOI: 10.1142/s0218348x95000692.

144. Geweke J., and Porter-Hudak S. The estimation and application of long memory time series models. *J. Time Ser. Anal.* 1983. Vol. 4. P. 221—238.
145. Huang N.E., Shen Z., Long S.R., Wu M.C., Shih H.H., Zheng Q., Yen N.-Ch., Tung Ch.Ch., and Liu H.H. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.* 1998. Vol. 454, Iss. 1971. P. 903—995. DOI:10.1098/rspa.1998.0193.
146. Bassingthwaite J.B. Physiological heterogeneity: fractals link determinism and randomness in structures and function. *News Physiol. Sci.* 1988. Vol. 3. P. 5—10.
147. Cannon M.J., Percival D.B., Caccia D.C., Raymond G.M., Bassingthwaite J.B. Evaluating scaled windowed variance methods for estimating the Hurst coefficient of time series. *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* 1997. Vol. 241, Iss. 3—4. P. 606—626. DOI:10.1016/s0378-4371(97)00252-5.
148. Roueff F, Levy-Vehel J. A Regularization Approach to Fractional Dimension Estimation. M.M. Novak. *Fractals* 98. Oct. 1998, Valleta, Malta. World Scientific, 1998. <inria-00593254>.
149. Theiler J. Estimating Fractal Dimension. *J. Opt. Soc. Am. A.* 1990. Vol. 7, Iss. 6. P. 1055—1073.
150. Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A. The dimension of chaotic attractors. *Physica D.* 1983. Vol. 7, Iss. 1—3. P. 153—180. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90125-2.
151. Stelter P, Pfingsten T. Calculation of the Fractal Dimension via the Correlation Integral. *Chaos Solitons Fractals.* 1991. Vol. 1, Iss. 3. P. 273—280.
152. Theiler J. Estimating the Fractal Dimension of Chaotic Time Series. *Linc. Lab. J.* 1990. Vol. 3, No. 1. P. 63—86.
153. Grassberger P, and Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D.* 1983. Vol. 9, Iss. 1—2. P. 189—208. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90298-1
154. Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors. *Phys. Lett. A.* 1983. Vol. 97, Iss. 6. P. 227—230. DOI: 10.1016/0375-9601(83)90753-3
155. Hunt F, Sullivan F. Efficient Algorithms for Computing Fractal Dimensions. G. Mayer-Kress (ed.) *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems.* 1986. P. 74—81. DOI: 10.1007/978-3-642-71001-8\_10.
156. Giorgilli A., Casati D., Sironi L., Galgani L. An efficient procedure to compute fractal dimensions by box counting. *Phys. Lett. A.* 1986. Vol. 115, Iss. 5. P. 202—206. DOI: 10.1016/0375-9601(86)90465-2.
157. Theiler J. Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points. *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36, Iss. 9. P. 4456—4462. DOI: 10.1103/physreva.36.4456.
158. Liebovitch L.S., Toth T. A fast algorithm to determine fractal dimensions by box counting. *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 141, Iss. 8—9. P. 386—390. DOI: 10.1016/0375-9601(89)90854-2.
159. Pitsikalis V., Maragos P. Analysis and classification of speech signals by generalized fractal dimension features. *Speech Commun.* 2009. Vol. 51, Iss. 12. P. 1206—1223. DOI: 10.1016/j.specom.2009.06.005.
160. Lo A.W. Long-Term Memory in Stock Market Prices. *Econometrica.* 1991. Vol. 59, Iss. 5. P. 1279—1313. DOI: 10.2307/2938368.
161. Jiang Z.-Q., Yang Y.-H., Wang G.-J., Zhou W.-X. Joint multifractal analysis based on wavelet leaders. *Front. Phys.* 2017. Vol. 12, Iss. 6. DOI: 10.1007/s11467-017-0674-x.
162. Krakovska H., Krakovska A. Fractal Dimension of Self-Affine Signals: Four Methods of Estimation. *XXXVI Dynamics Days Europe.* Corfu, Greece, 6—10 June 2016. URL: <http://arxiv.org/abs/1611.06190v1>.
163. Voss R. Fractals in nature: from characterization to simulation. Peitgen H., Saupe D., eds. *The Science of Fractal Images.* New York: Springer-Verlag, 1988. P. 21—70.
164. Кириченко Л.О., Чалая Л.Э. Комплексный подход к исследованию фрактальных временных рядов. *Int. J. Inf. Technol. Knowl.* 2014. Vol. 8, Iss. 1. P. 22—28.
165. Кириченко Л.О., Кобицкая Ю.А., Дёмина Н.А. Анализ и распознавание реализаций сигналов, обладающих фрактальными свойствами. *Бионика интеллекта.* 2015. Т. 84, № 1. С. 49—55.
166. Chernogor L.F., Lazorenko O.V., and Onishchenko A.A. Fractal Analysis of the Gravitational Waves as a Unique Ultra-Wideband Process. *Proc. 9th Int. Conf. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals.* Odessa, Ukraine, 4—7 Sept., 2018. Odessa, 2018. P. 34—39. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2018.8519979.
167. Onishchenko A., Chernogor L., Lazorenko O. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid. *Eskişehir Technical Univ. J. of Sci. and Tech. A – Appl. Sci. and Eng.* 2019. Vol. 20. P. 188—192. DOI: 10.18038/estubtda.655702.
168. Maity A.K., Pratihari R., Mitra A., Dey S., Agrawal V., Sanyal S., Banerjee A., Sengupta R., Ghosh D. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of alpha and theta EEG rhythms with musical stimuli. *Chaos Solitons Fractals.* 2015. Vol. 81. P. 52—67. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.08.016.
169. Arneodo A., Grasseau G., and Holschneider M. Wavelet transform of multifractals. *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61, Iss. 20. P. 2281—2284.
170. Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 67, Iss. 25. P. 3515—3518. DOI: 10.1103/physrevlett.67.3515.
171. Arneodo A., Bacry E., and Muzy J.F. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A.* 1995. Vol. 213. P. 232—275.
172. Muzy J.-F., Bacry E., Arnéodo A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47, Iss. 2. P. 875—884. DOI: 10.1103/PhysRevE.47.875.
173. Quadfeul S.-A., ed. *Fractal Analysis and Chaos in Geosciences.* Rijeka, Croatia: InTech Press, 2012. 174 p.

174. Kantelhardt J.W., Zschiegner S.A., Koscielny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., Stanley H.E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*. 2002. Vol. 316, Iss. 1–4. P. 87–114. DOI: 10.1016/s0378-4371(02)01383-3.
175. Jaffard S. Multifractal Formalism for Functions. Part I: Results Valid for All Functions. *SIAM J. Math. Anal.* 1997. Vol. 28, Iss. 4. P. 944–970.
176. Arneodo A., Audit B., Kestener P., and Roux S. Multifractal Formalism based on the Continuous Wavelet Transform. *Scholarpedia*. 2007. Vol. 3. P. 1–20.
177. Jizba P., Korbel J. Applications of Multifractal Diffusion Entropy Analysis to Daily and Intraday Financial Time Series. San-ayei A., Rössler, O.E., Zelinka I. eds. ISCS 2014: Interdisciplinary Symposium on Complex Systems. *Emergence, Complexity and Computation*. Vol. 14. P. 333–342. Springer, Cham. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-10759-2\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-319-10759-2_34).
178. Galaska R., Makowiec D., Dudkowska A., Koprowski A., Chlebus K., Wdowczyk-Szulc J., and Rynkiewicz A. Comparison of Wavelet Transform Modulus Maxima and Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Heart Rate in Patients with Systolic Dysfunction of Left Ventricle. *Ann. Noninvasive Electrocardiol.* 2008. Vol. 13, Iss. 2. P. 155–164.
179. Weiss B., Clemens Z., Bódizs R., Vágó Z., Halász P. Spatio-temporal analysis of monofractal and multifractal properties of the human sleep EEG. *J. Neurosci. Methods*. 2009. Vol. 185. P. 116–124.
180. Jaffard S., Lashermes B., Abry P. Wavelet Leaders in Multifractal Analysis. Qian, T., Vai, M.I., Xu, Y. eds. *Wavelet Analysis and Applications. Applied and Numerical Harmonic Analysis*. 2006. P. 201–246. DOI: 10.1007/978-3-7643-7778-6\_17.
181. Kantelhardt J.W., Rybski D., Zschiegner S.A., Braun P., Koscielny-Bunde E., Livina V., Havlin S., Bunde A. Multifractality of river runoff and precipitation: comparison of fluctuation analysis and wavelet methods. *Physica A*. 2003. Vol. 330, Iss. 1–2. P. 240–245. DOI: 10.1016/j.physa.2003.08.019.
182. Telesca L., Lapenna V., Macchiato M. Mono- and multi-fractal investigation of scaling properties in temporal patterns of seismic sequences. *Chaos Solit. Fractals*. 2004. Vol. 19. P. 1–15.
183. Shimizu Y., Thurner S., Ehrenberger K. Multifractal Spectra as a Measure of Complexity in Human Posture. *Fractals*. 2002. Vol. 10, Iss. 01. P. 103–116. DOI: 10.1142/s0218348x02001130.
184. Ihlen E.A.F. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab. *Front. Physiol.* 2012. Vol. 3. Article 141. DOI: 10.3389/fphys.2012.00141.
185. Dimri V.P. *Fractal Solutions for Understanding Complex Systems in Earth Sciences*. Springer Int. Publ., 2016. 152 p.
186. Barabási A.-L., Vicsek T. Multifractality of self-affine fractals. *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44, Iss. 4. P. 2730–2733. DOI: 10.1103/physreva.44.2730.
187. Di Matteo T., Aste T., and Dacorogna M. Scaling behaviors in differently developed markets. *Physica A*. 2003. Vol. 324, Iss. 1. P. 183–188.
188. Di Matteo T. Multi-scaling in finance. *Quant. Finance*. 2007. Vol. 7, Iss. 1. P. 21–36.
189. Flandrin P., ed. *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*. San Diego: Academic Press, 1999. 386 p.
190. Benedetto J.J., Byrnes J.S., Byrnes J.L., Hargreaves K.A., Berry K. *Wavelets and Their Applications*. Springer Science+Business Media, B.V., 1994. 415 p.
191. Mandelbrot B.B. *Multifractals and 1/f Noise. wild self-Affinity in Physics (1963–1976)*. New York: Springer-Verlag, 1999. 431 p.
192. Bertrand J., and Bertrand P. Time-frequency representations of broadband signals. 1988 *Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-88)*. New York, NY, 11–14 April 1988. P. 2196–2199.
193. Rioul O., and Flandrin P. Time-scale energy distributions-A general class extending wavelet transforms. *IEEE Trans. Signal Process.* 1992. Vol. 40, Iss. 7. P. 1746–1757.
194. Muniandy S.V., Lim, S.C. Modeling of locally self-similar processes using multifractional Brownian motion of Riemann-Liouville type. *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63, Iss. 4. P. 46–104. DOI:10.1103/physre.63.046104.
195. Morales R., Di Matteo T., Gramatica R., Aste T. Dynamical generalized Hurst exponent as a tool to monitor unstable periods in financial time series. *Physica A*. 2012. Vol. 391, Iss. 11. P. 3180–3189.
196. Huang J., Shang P., Zha, X. Multifractal diffusion entropy analysis on stock volatility in financial markets. *Physica A*. 2012. Vol. 391, Iss. 22. P. 5739–5745. DOI: 10.1016/j.physa.2012.06.039.
197. Broniatowski M., Mignot P. A self-adaptive technique for the estimation of the multifractal spectrum. *Stat. Probab. Lett.* 2001. Vol. 54, Iss. 2. P. 125–135. DOI: 10.1016/s0167-7152(00)00210-8.
198. Turcotte D.L. The relationship of fractals in geophysics to “the new science.” *Chaos Solit. Fractals*. 2004. Vol. 19, Iss. 2. P. 255–258. DOI: 10.1016/s0960-0779(03)00039-0.
199. Vicsek T. Mass multifractals. *Physica A*. 1990. Vol. 168, Iss. 1. P. 490–497. DOI: 10.1016/0378-4371(90)90401-d.
200. Gu G.-F., Zhou W.-X. Detrending moving average algorithm for multifractals. *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 82, Iss. 1. DOI: 10.1103/physre.82.011136.
201. Vandewalle N., Ausloos M. Crossing of two mobile averages: A method for measuring the roughness exponent. *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58, Iss. 5. P. 6832–6834. DOI: 10.1103/physre.58.6832.
202. Ghosh D., Dutta S., Chakraborty S. Multifractal detrended cross-correlation analysis for epileptic patient in seizure and seizure free status. *Chaos Solit. Fractals*. 2014. Vol. 67. P. 1–10. DOI: 10.1016/j.chaos.2014.06.010.
203. Barnsley M.F. *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press, 1988. 394 p.

Стаття надійшла 15.05.2022

REFERENCES

1. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2020. Fractal Radio Physics. 1. Theoretical Bases. *Radiophysics and Radioastronomy*. **25**(1), pp. 3–77 (in Russian). DOI: 10.15407/rpra25.01.003.
2. Madisetti, V.K., ed., 2014. *The Digital Signal Processing Handbook. Wireless, Networking, Radar, Sensor Array Processing, and Nonlinear Signal Processing*. Boca Raton: CRC Press.
3. Cohen, L., 1994. *Time-Frequency Analysis*. New Jersey: Prentice Hall PTR.
4. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2009. *Ultra-Wideband Signals and Processes. Monograph*. Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University (in Russian).
5. Gil'mutdinov, A.K., Ushakov, P.A., and El-Kharazi, R., 2017. *Fractal Elements and their Applications*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ.
6. Kantz, H., and Schreiber, T., 2003. *Nonlinear Time Series Analysis*. New York: Cambridge University Press.
7. Astanin, L.Y., Kostylev, A.A., 1997. *Ultrawideband Radar Measurements: Analysis and Processing*. London: The Institute of Electrical Engineers.
8. Wornell, G., 1996. *Signal Processing with Fractals: A Wavelet-Based Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall PTR.
9. Cattani, C., 2009. Wavelet Based Approach to Fractals and Fractal Signal Denoising. *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 143–162. DOI: 10.1007/978-3-642-10649-1\_9.
10. Gelfand, I.M., Shilov, G.E., Vilenkin, N.Y., and Graev, M.I., 1964. *Generalized Functions*. Vol. 1. Properties and Operators. New York: Academic Press.
11. Mandelbrot, B.B., 1983. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman and Company.
12. Du Bois-Reymond, P., 1895. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. *J. für die Reine und Angew. Math. (Crelle)*, **79**, pp. 21–37.
13. Bandt, C., Barnsley, M., Devaney, R., Falcone, K.J., Kannan, V., and Vinod Kumar, P.B., eds., 2014. *Fractals, Wavelets, and their Applications: Contributions from the International Conference and Workshop on Fractals and Wavelets (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)*. Switzerland: Springer Int. Publ.
14. Bailland, B., and Bourget, H., 1905. *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. Paris: Gauthier-Villars.
15. Peintgen, H.-O., and Saupe, D., eds., 1988. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag.
16. Crowover, R.M., 1995. *Introduction to Fractals and Chaos*. Boston: Jones and Bartlett Publ.
17. Schroeder, M., 1991. *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite*. New York: W.H. Freeman and Company.
18. Perrin, J., 1906. La discontinuité de la matiere. *Revue du mois*, **1**, pp. 323–344.
19. Massopust, P.R., 2016. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. Amsterdam, Boston et al.: Academic Press.
20. Falconer, K., 2003. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. 2nd Ed. Chichester: John Wiley & Sons.
21. Bandt, C., Falconer, K., and Zaehle, M., 2015. *Fractal Geometry and Stochastics V*. Basel: Birkhauser Verlag.
22. Holschneider, M., 1995. *Wavelets: An Analysis Tool*. Oxford: Calderon Press.
23. Hardy, G.H., 1916. Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. AMS*, **17**, pp. 301–325.
24. Feder, J., 1988. *Fractals*. New York and London: Springer Science.
25. Berry, M.V., and Lewis, Z.V., 1980. On the Weierstrass-Mandelbrot Fractal Function. *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.*, **370**(1743), pp. 459–484. DOI:10.1098/rspa.1980.0044.
26. West, B.J., Bologna, M., and Grigolini, P., 2003. *Physics of Fractal Operators*. New York: Springer-Verlag.
27. Gerver, J., 1970. The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of  $\pi$ . *Am. J. Math.*, **92**(1), pp. 33–55. DOI: 10.2307/2373496.
28. Lashermes, B., Jaffard, S., and Abry, P., 2005. Wavelet Leader based Multifractal Analysis. In: *2005 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '05)*. Philadelphia, Pennsylvania, USA, 18–23 March 2005. IEEE, 2005. DOI: 10.1109/icassp.2005.1415970.
29. Cellerier, M.Ch., 1890. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. *Darboux Bull.*, **14**, pp. 142–160.
30. Thim, J., 2003. *Continuous nowhere differentiable functions: Master thesis*. Lulea: Lulea University of Technology.
31. Raghavendra, B.S., and Narayana Dutt, D., 2010. Computing fractal dimension of signals using multiresolution box-counting method. *Int. J. Inf. Math. Sci.*, **6**(1), pp. 50–65.
32. Liaw, S.-S., and Chiu, F.-Y., 2009. Fractal dimensions of time sequences. *Physica A*, **388**(15–16), pp. 3100–3106. DOI: 10.1016/j.physa.2009.04.011.
33. Mallat, S., 1998. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. San Diego, CA: Academic Press.
34. Meyer Y., 1993. *Wavelets: Algorithms and Applications*. Philadelphia: SIAM.
35. Shelevytsky, I., and Novikova, O., 2013. Fractal Spline Signals: Synthesis and Estimation. In: *2013 IEEE XXXIII Int. Scientific Conf. Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*. Kyiv, Ukraine. 16–19 April 2013. DOI: 10.1109/ELNANO.2013.6552006.
36. Chernogor, L.F., and Lazorenko, O.V., 2004. Fractal Ultra-Wideband Signals. In: *Proc. Second International Workshop "Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals"*. Sevastopol, Ukraine, 19–22 Sept. 2004. Sevastopol, 2004, pp. 118–120.
37. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2005. Fractal Ultra-Wideband Signals. *Radiophysics and Radioastronomy*, **10**(1), pp. 62–84 (in Russian).
38. Chernogor, L.F., Lazorenko, O.V., and Onishchenko, A.A., 2016. New Models of the Fractal Ultra-Wideband Signals. In: *Proc. 8th Int. Conf. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*. Odessa, Ukraine. 5–11 Sept. 2016. Odessa, 2016. P. 89–92. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2016.7724158.



39. Chernogor, L.F., Lazorenko, O.V., and Lazorenko, S.V., 2002. Wavelet Analysis and Ultra-Wideband Signals. *Radio Physics & Radio Astronomy*, 7(4), pp. 471–474.
40. Lazorenko, O.V., Lazorenko, S.V., and Chernogor, L.F., 2002. Application of the Wavelet Analysis to the Problem of Ultra-Wideband Signal Detection on a Noise Background. *Radio Physics & Radio Astronomy*, 7(1), pp. 46–63 (in Russian).
41. Goncalves, P., and Flandrin, P., 1992. Bilinear time-scale analysis applied to local scaling exponents estimation. In: Y. Meyer and S. Roques, eds. *Progress in Wavelet Analysis and Applications*. Editions Frontieres, pp. 271–276.
42. Goncalves, P., and Flandrin, P., 1992. Scaling exponents estimation from timescale energy distributions. In: *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-92)*. San Francisco, CA, 23–26 March 1992. Vol. 5, pp. 157–60.
43. Samorodnitsky, G., and Taqqu, M.S., 1994. *Stable Non-Gaussian Random Processes, Stochastic Modeling*. New York, NY, USA: Chapman & Hall.
44. Mandelbrot, B., 1965. Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi. Application à la loi climatologique de H.E. Hurst. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, 240, pp. 3274–3277.
45. Pashchenko, R.E. ed., 2006. *Fractal Analysis of Processes, Structures and Signals*. Collective Monograph. Kharkiv, Ukraine: NEO EkoPerspektiva Publ. (in Russian).
46. Radivilova, T., Kirichenko, L., Ageiev, D., and Bulakh, V., 2020. The methods to improve quality of service by accounting secure parameters. In: Hu, Z., Petoukhov, S., Dychka, I., He, M. eds. *Advances in computer science for engineering and education II. ICCSEE 2019. Advances in intelligent systems and computing*. Vol. 938, pp. 346–355. Springer, Cham.
47. Mandelbrot, B.B., and Van Ness, J.W., 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10, pp. 422–437.
48. Dauphiné, A., 2012. *Fractal Geography*. London, Hoboken: John Wiley & Sons.
49. Kolmogorov, A.N., 1940. Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen raum. *Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS (N.S.)*, 26, pp. 115–118.
50. Davies, R.B., and Harte, D.S., 1987. Tests for Hurst effect. *Biometrika*, 74(1), pp. 95–101. DOI: 10.1093/biomet/74.1.95.
51. Eke, A., Herman, P., Kocsis, L., and Kozak, L.R., 2002. Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals. *Physiol. Meas.*, 23, pp. R1–R38.
52. Sithi, V.M., and Lim, S.C., 1995. On the spectra of Riemann-Liouville fractional Brownian motion. *J. Phys. A Math. Gen.*, 28(11), pp. 2995–3003. DOI: 10.1088/0305-4470/28/11/005.
53. Pashchenko, R.E., 2005. *Fundamentals of the Theory of Fractal Signal Formation*. Kharkiv, Ukraine: NEO EkoPerspektiva Publ. (in Russian).
54. Kirichenko, L.O., and Radivilova, T.A., 2019. *Fractal Analysis of Self-Similar and Multifractal Time Series*. Kharkiv: KhNURE.
55. Muniandy, S.V., Lim, S.C., and Murugan, R., 2001. Inhomogeneous scaling behaviors in Malaysian foreign currency exchange rates. *Physica A*, 301(1–4), pp. 407–428. DOI: 10.1016/s0378-4371(01)00387-9.
56. Di Ieva, A. ed., 2016. *The Fractal Geometry of the Brain*. New York: Springer-Verlag.
57. Karperien, A.L., and Jelinek, H.F., 2015. Fractal, multifractal, and lacunarity analysis of microglia in tissue engineering. *Front. Bioeng. Biotechnol.*, 3, article 51.
58. Klinkenberg, B., 1994. A review of methods used to determine the fractal dimension of linear features. *Math. Geol.*, 26(1), pp. 23–46.
59. Preißl, H., Lutzenberger, W., Pulvermüller, F., and Birbaumer, N., 1997. Fractal dimensions of short EEG time series in humans. *Neurosci. Lett.*, 225(2), pp. 77–80. DOI: 10.1016/s0304-3940(97)00192-4.
60. Lopes, R., and Betrouni, N., 2009. Fractal and multifractal analysis: A review. *Med. Image Anal.*, 13, pp. 634–649.
61. Esteller, R., Vachtsevanos, G., Echauz, J., and Litt, B., 2001. A comparison of waveform fractal dimension algorithms. *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl.*, 48, pp. 177–183.
62. Seuront, L., 2010. *Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science*. Boca Raton, London, New York: CRC Press.
63. Jura, J., Kubena, A.A., and Novak, M., 2017. Development of Methods of the Fractal Dimension Estimation for the Ecological Data Analysis. In: Matoušek, R. ed., 2017. *Recent Advances in Soft Computing. Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 252–263. DOI: 10.1007/978-3-319-58088-3.
64. Berry, M., 1979. Diffractals. *J. Phys. A. Math. Gen.*, 12, pp. 781–97.
65. Pentland, A., 1984. Fractal-based description of natural scenes. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 6(6), pp. 661–674.
66. Hastings, H.M., and Sugihara, G., 1993. *Fractals: A User's Guide for the Natural Science*. Oxford: Oxford University Press.
67. Crilly, A.J., Earnshaw, R.A., and Jones, H., eds., 1993. *Applications of Fractals and Chaos: The Shape of Things*. Heidelberg: Springer-Verlag.
68. Super, B.J., and Bovik, A.C., 1991. Localized measurement of image fractal dimension using gabor filters. *J. Vis. Commun. Image Represent.*, 2(2), pp. 114–128. DOI: 10.1016/1047-3203(91)90002-w.
69. Eke, A., Hermán, P., Bassingthwaight, J., Raymond, G., Percival, D., Cannon, M., Balla, I., & Ikrényi, C., 2000. Physiological time series: distinguishing fractal noises from motions. *Pflügers Arch. - Eur. J. Physiol.*, 439(4), pp. 403–415.
70. Dimri, V.P. ed., 2005. *Fractal Behavior of the Earth System*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
71. Lomb, N.R., 1976. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophys. Space Sci.*, 39, pp. 447–462.
72. Telesca, L., Colangelo, G., Lapenna, V., and Macchiato M., 2003. Monofractal and multifractal characterization of geoelectrical signals measured in southern Italy. *Chaos Solit. Fractals*, 18, pp. 385–399.
73. Yamamoto, Y., and Hughson, R.L., 1991. Coarse-graining spectral analysis: new method for studying heart rate variability. *J. Appl. Physiol.*, 71(3), pp. 1143–1150. DOI: 10.1152/jappl.1991.71.3.1143.

74. Yamamoto, Y., and Hughson, R.L., 1993. Extracting fractal components from time series. *Physica D*, **68**(2), pp. 250–264. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90083-d.
75. Yamamoto, Y., 1999. Detection of Chaos and Fractals from Experimental Time Series. In: Windhorst U., Johansson H. eds. *Modern Techniques in Neuroscience Research*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999. P. 669–687. DOI: 10.1007/978-3-642-58552-4\_24.
76. Russell, D.A., Hanson, J.D., and Ott, E., 1980. Dimension of Strange Attractors. *Phys. Rev. Lett.*, **45**(14), pp. 1175–1178.
77. Pontrjagin, L. & Schnirelman, L., 1932. Sur une propriété métrique de la dimension. *Ann. Math*, **33**, pp. 156–162.
78. Normant, F., and Tricot, C., 1991. Method for evaluating the fractal dimension of curves using convex hulls. *Phys. Rev. A*, **43**(12), pp. 6518–6525. DOI: 10.1103/physreva.43.6518.
79. Appleby, S., 1996. Multifractal characterization of the distribution pattern of the human population. *Geogr. Anal.*, **28**(2), pp. 147–160.
80. Pruess, S.A., 1995. Some Remarks on the Numerical Estimation of Fractal Dimension. In: Barton, C.C., La Pointe, P.R. eds., 1995. *Fractals in the Earth Sciences*. Boston, MA: Springer.
81. Sanderson, B., Goulding, A., and Okubo, A. 1990. The fractal dimension of relative Lagrangian motion. *Tellus*, **42A**, pp. 550–556.
82. Adler, C., Carter, P., and Cawley, R., 1987. A comparison of the fractal dimension of cloud radiance graphs for two infrared color bands. In: Kim, Y.S., and Zachary, W.W. eds., 1987. *The Physics of Phase Space*. Berlin: Springer-Verlag.
83. Carter, P., Cawley, R., and Mauldin, R.D., 1988. Mathematics of dimension measurements for graphs of functions. In: Weitz, D., Sander, L., and Mandelbrot, B. eds., 1988. *Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems*. Materials Research Society Proceedings.
84. Sarkar, N., and Chaudhuri, B.B., 1992. An efficient approach to estimate fractal dimension of textural images. *Pattern Recognit.*, **25**(9), pp. 1035–1041. DOI: 10.1016/0031-3203(92)90066-r.
85. Sarkar, N., and Chaudhuri, B.B., 1994. An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, **24**(1), pp. 115–120. DOI: 10.1109/21.259692.
86. Chen, W.-S., and Yuan, S.-Y., 2002. Some Fractal Dimension Estimate Algorithms and their Applications to One-Dimensional Biomedical Signals. *Biomed. Eng. Appl. Basis Commun.*, **14**, pp. 100–108.
87. Khoa, T.Q.D., Ha, V.Q., and Toi, V.V., 2012. Higuchi Fractal Properties of Onset Epilepsy Electroencephalogram. *Comput. Math. Methods Med.*, ID 461426, pp. 1–6. DOI: 10.1155/2012/461426.
88. Sandau, K., and Kurz, H., 1997. Measuring fractal dimension and complexity—an alternative approach with an application. *J. Microsc.*, **186**(2), pp. 164–176.
89. Prigarin, S., Hahn, K., and Winkler, G., 2008. Comparative analysis of two numerical methods to measure Hausdorff dimension of the fractional Brownian motion. *Numer. Anal. Appl.*, **1**(2), pp. 163–178.
90. Hall, P., and Wood, A., 1993. On the performance of box-counting estimators of fractal dimension. *Biometrika*, **80**, pp. 246–252.
91. Gneiting, T., and Schlather, M., 2004. Stochastic Models That Separate Fractal Dimension and the Hurst Effect. *SIAM Rev.*, **46**(2), pp. 269–282.
92. Gneiting, T., Sevcikova, H., and Percival, D.B., 2012. Estimators of fractal dimension: assessing the roughness of time series and spatial data. *Statist. Sci.*, **27**, pp. 247–277.
93. Tricot, C., Quiniou, J.F., Wehbi, D., Roques-Carmes, C., and Dubuc, B., 1988. Evaluation de la dimension fractale d'un graphe. *Revue Phys. Appl.*, **23**, pp. 111–124.
94. Bouligand, G., 1929. Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble ferme. *Bull. Sci. Math.*, **52**, pp. 185–192.
95. Pilgrim, I., and Taylor, P.R., 2019. Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges. *Fractal Analysis*. DOI: 10.5772/intechopen.819581.
96. Dubuc, B., Quiniou, J.F., Roques-Carmes, C., Tricot, C., and Zucker, S.W., 1989. Evaluating the fractal dimension of profiles. *Phys. Rev. A*, **39**, pp. 1500–1512.
97. Dubovikov, M.M., Starchenko, N.V., and Dubovikov, M.S., 2004. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series. *Physica A*, **339**, pp. 591–608.
98. Mantegna, R.N., and Stanley, H.E., 1995. Scaling Behavior in the Dynamics of Economic Index. *Nature*, **376**, pp. 46–49.
99. Burlaga, L.F., and Klein, L.W., 1986. Fractal structure of the interplanetary magnetic field. *J. Geophys. Res.*, **91**(A1), pp. 347–350. DOI: 10.1029/ja091ia01p00347.
100. Mandelbrot, B., 2010. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Paris: Flammarion.
101. Farmer, J.D., Ott, E., and Yorke, J.A., 1983. The dimension of chaotic attractors. *Physica D*, **7**(1–3), pp. 153–180.
102. Higuchi, T., 1988. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D*, **31**, pp. 277–283.
103. Liebovitch, L.S., 1998. *Fractals and Chaos. Simplified for the Life Sciences*. Oxford: Oxford University Press.
104. Affinito, M., Carrozzi, M., Accardo, A., and Bouquet, F., 1997. Use of the fractal dimension for the analysis of electroencephalographic time series. *Biol. Cybern.*, **77**(5), pp. 339–350. DOI: 10.1007/s004220050394.
105. Schmittbuhl, J., Vilotte, J.-P., and Roux, S., 1995. Reliability of self-affine measurements. *Phys. Rev. E*, **51**(1), pp. 131–147. DOI: 10.1103/physreve.51.131.
106. Klonowski, W., 2002. Chaotic dynamics applied to signal complexity in phase space and in time domain. *Chaos Solit. Fractals*, **14**, pp. 1379–1387.
107. Higuchi, T., 1990. Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: A numerical investigation. *Physica D*, **46**(2), pp. 254–264. DOI: 10.1016/0167-2789(90)90039-r.

108. Katz, M.J., 1988. Fractals and the analysis of waveforms. *Comput. Biol. Med.*, **18**(3), pp. 145–156. DOI: 10.1016/0010-4825(88)90041-8.
109. Castiglioni, P., 2010. What is wrong in Katz's method? Comments on: "A note on fractal dimensions of biomedical waveforms." *Comput. Biol. Med.*, **40**(11–12), pp. 950–952. DOI: 10.1016/j.compbimed.2010.10.001.
110. Pradhan, N., and Narayana Dutt, D., 1993. Use of running fractal dimension for the analysis of changing patterns in electroencephalograms. *Comput. Biol. Med.*, **23**(5), pp. 381–388. DOI: 10.1016/0010-4825(93)90135-n.
111. Acharya, R.U., Faust, O., Kannathala, N., Chua, T., and Laxminarayan, S., 2005. Non-linear analysis of EEG signals at various sleep stages. *Comput. Methods Programs Biomed.*, **80**, pp. 37–45.
112. Petrosian, A., 1995. Kolmogorov complexity of finite sequences and recognition of different preictal EEG patterns. In: *Proc. Eighth IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems*. Lubbock, Texas, USA. 9–10 June 1995. IEEE, 1995. P. 212–217. DOI: 10.1109/cbms.1995.465426.
113. Ezeiza, A., López de Ipiña, K., Hernández, C., and Barroso, N., 2012. Enhancing the Feature Extraction Process for Automatic Speech Recognition with Fractal Dimensions. *Cogn. Comput.*, **5**(4), pp. 545–550. DOI: 10.1007/s12559-012-9165-0.
114. Sevcik, C., 2006. On fractal dimension of waveforms. *Chaos Solit. Fractals*, **28**, pp. 579–580.
115. Gnitecki, J., and Moussavi, Z., 2005. The fractality of lung sounds: A comparison of three waveform fractal dimension algorithms. *Chaos Solit. Fractals*, **26**, pp. 1065–1072.
116. Kalauzi, A., Spasic, S., Culic, M., Grbic, G., and Martac, L. J., 2005. Consecutive Differences as a Method of Signal Fractal Analysis. *Fractals*, **13**(04), pp. 283–292. DOI: 10.1142/s0218348x05002933.
117. Kalauzi, A., Bojić, T., and Rakić, L., 2009. Extracting complexity waveforms from one-dimensional signals. *Nonlinear Biomed. Phys.*, **3**(1), article 8. DOI: 10.1186/1753-4631-3-8.
118. Nakagawa, M., 1993. A Critical Exponent Method to Evaluate Fractal Dimensions of Self-Affine Data. *J. Phys. Soc. Japan.*, **62**(12), pp. 4233–4239. DOI: 10.1143/jpsj.62.4233.
119. Sabanal, S., and Nakagawa, M., 1996. The fractal properties of vocal sounds and their application in the speech recognition model. *Chaos Solit. Fractals*, **7**(11), pp. 1825–1843. DOI: 10.1016/s0960-0779(96)00043-4.
120. De Oliveira, L.P.L., Roque, W.L., and Custidio, R.F., 1999. Lund Sound Analysis with Time-Dependent Fractal Dimensions. *Chaos Solit. Fractals*, **10**(9), pp. 1419–1423.
121. Phinyomark, A., Phothisonothai, M., Suklaead, P., Phukpattaranont, P., and Limsakul, C., 2011. Fractal Analysis of Surface Electromyography (EMG) Signal for Identify Hand Movements Using Critical Exponent Analysis. *Commun. Comput. Inf. Sci.*, pp. 703–713. DOI: 10.1007/978-3-642-22191-0\_62.
122. Bigerelle, M., and Iost, A., 1996. Calcul de la dimension fractale d'un profil par la methode des autocorrelations moyennes normees (AMN). *C.R. Acad. Sci. Paris*, **323**, Serie II b, pp. 669–674.
123. Maragos, P., and Sun, E.-K., 1993. Measuring the Fractal Dimension of Signals: Morphological Covers and Iterative Optimization. *IEEE Trans. Signal Process.*, **41**(1), pp. 108–121. DOI: 10.1109/tsp.1993.193131.
124. Serra, J., 1982. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. London-New York: Academic Press.
125. Maragos, P., and Potamianos, A., 1999. Fractal dimensions of speech sounds: Computation and application to automatic speech recognition. *J. Acoust. Soc. Am.*, **105**(3), pp. 1925–1932.
126. Kith, K., Sourina, O., Kulish, V., and Khoa, N.M., 2009. An algorithm for fractal dimension calculation based on Renyi entropy for short time signal analysis. In: *2009 7th Int. Conf. on Information, Communications and Signal Processing (ICICIS)*. Macau Fisherman's Wharf, Macao. 8–10 Dec. 2009. P. 1–5. DOI: 10.1109/icicis.2009.5397510.
127. Peng, C.-K., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H.E., Goldberger, A.L., 1994. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Phys Rev E*, **49**, pp. 1685–1689.
128. Mandelbrot, B., 1985. Self-Affine Fractals and Fractal Dimension. *Phys. Scr.*, **32**(4), pp. 257–260.
129. Peng, C.-K., Havlin, S., Stanley, H.E., and Goldberger, A.L., 1995. Quantification of scaling Exponents and Crossover Phenomena in Nonstationary Heartbeat Time Series. *Chaos Solit. Fractals*, **5**(1), pp. 82–87.
130. Telesca, L., and Macchiato, M., 2004. Time-scaling properties of the Umbria-Marche 1997–1998 seismic crisis, investigated by the detrended fluctuation analysis of interevent time series. *Chaos Solit. Fractals*, **19**, pp. 377–385.
131. Kantelhardt, J.W., Koscielny-Bunde, E., Rego, H.H.A., Havlin, S., and Bunde, A., 2001. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A*, **295**, pp. 441–454.
132. Buldyrev, S.V., Goldberger, A.L., Havlin, S., Mantegna, R.N., Matsa, M.E., Peng, C.-K., Simons, M., Stanley, H.E., 1995. Long-range correlation properties of coding and noncoding DNA sequences: GenBank analysis. *Phys. Rev. E*, **51**(5), pp. 5084–5091. DOI:10.1103/physreve.51.5084.
133. Bunde, A., Havlin, S., Kantelhardt, J. W., Penzel, T., Peter, J.-H. and Voigt, K., 2000. Correlated and Uncorrelated Regions in Heart-Rate Fluctuations during Sleep. *Phys. Rev. Lett.*, **85**(17), pp. 3736–3739. DOI: 10.1103/physrevlett.85.3736.
134. Habib, A., Sorensen, J.P.R., Bloomfield, J.P., Muchan, K., Newell, A.J., and Butler, A.P., 2017. Temporal scaling phenomena in groundwater-floodplain systems using robust detrended fluctuation analysis. *J. Hydrol.*, **549**, pp. 715–730.
135. Tan, C.O., Cohen, M.A., Eckberg, D.L., and Taylor, J.A., 2009. Fractal properties of human heart period variability: physiological and methodological implications. *J. Physiol.*, **587**(15), pp. 3929–3941.
136. Arzac, L.M., and Deschodt-Arsac, V., 2018. Detrended fluctuation analysis in a simple spreadsheet as a tool for teaching fractal physiology. *Adv. Physiol. Educ.*, **42**, pp. 493–499.
137. Mandelbrot, B., and Wallis, J.R., 1969. Computer experiments with fractional Gaussian noises. *Water Resour. Res.*, **5**(1), pp. 228–241.



138. Riley, M.A., Bonnette, S., Kuznetsov, N., Wallot, S., Gao, J., 2012. A tutorial introduction to adaptive fractal analysis. *Front. Physiol.*, **3**. DOI: 10.3389/fphys.2012.00371.
139. Gao, J.B., Sultan, H., Hu, J., and Tung, W.W., 2010. Denoising nonlinear time series by adaptive filtering and wavelet shrinkage: a comparison. *IEEE Signal Process. Lett.*, **17**, pp. 237–240.
140. Vandewalle, N., and Ausloos, M., 1998. Crossing of two mobile averages: A method for measuring the roughness exponent. *Phys. Rev. E*, **58**(5), pp. 6832–6834. DOI: 10.1103/physreve.58.6832.
141. Peltier, R.F., and Lévy-Véhel, J., 1994. A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion. *INRIA Research Report*, No. 2396.
142. Hardy, H.H., and Beier, R.A., 1994. *Fractals in Reservoir Engineering*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific.
143. Taqqu, M.S., Teverovsky, V., and Willinger, W., 1995. Estimators for Long-Range Dependence: An Empirical Study. *Fractals*, **03**(04), pp. 785–798. DOI: 10.1142/s0218348x95000692.
144. Geweke, J., and Porter-Hudak, S., 1983. The estimation and application of long memory time series models. *J. Time Ser. Anal.*, **4**, pp. 221–238.
145. Huang, N.E., Shen, Z., Long, S.R., Wu, M.C., Shih, H.H., Zheng, Q., Yen, N.-Ch., Tung, Ch.Ch., and Liu, H.H., 1998. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.*, **454**(1971), pp. 903–995. DOI:10.1098/rspa.1998.0193
146. Bassingthwaighte, J.B., 1988. Physiological heterogeneity: fractals link determinism and randomness in structures and function. *News Physiol. Sci.*, **3**, pp. 5–10.
147. Cannon, M.J., Percival, D.B., Caccia, D.C., Raymond, G.M., and Bassingthwaighte, J.B., 1997. Evaluating scaled windowed variance methods for estimating the Hurst coefficient of time series. *Physica A*, **241**(3–4), pp. 606–626. DOI: 10.1016/s0378-4371(97)00252-5.
148. Roueff, F., and Levy-Vehel, J., 1998. A Regularization Approach to Fractional Dimension Estimation. In: Novak, M.M., 1998. *Fractals 98*, Oct 1998, Valleta, Malta. World Scientific. <inria-00593254>
149. Theiler, J., 1990. Estimating Fractal Dimension. *J. Opt. Soc. Am. A.*, **7**(6), pp. 1055–1073.
150. Farmer, J.D., Ott, E., and Yorke, J.A., 1983. The dimension of chaotic attractors. *Physica D*, **7**(1–3), pp. 153–180. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90125-2.
151. Stelter, P., and Pfingsten, T., 1991. Calculation of the Fractal Dimension via the Correlation Integral. *Chaos Solit. Fractals*, **1**(3), pp. 273–280.
152. Theiler, J., 1990. Estimating the Fractal Dimension of Chaotic Time Series. *Linc. Lab. J.*, **3**(1), pp. 63–86.
153. Grassberger, P., and Procaccia, I., 1983. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, **9**(1–2), pp. 189–208. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90298-1.
154. Grassberger, P., 1983. Generalized dimensions of strange attractors. *Phys. Lett. A.*, **97**(6), pp. 227–230. DOI: 10.1016/0375-9601(83)90753-3
155. Hunt, F., and Sullivan, F., 1986. Efficient Algorithms for Computing Fractal Dimensions. In: G. Mayer-Kress, ed., 1986. *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*. P. 74–81. DOI: 10.1007/978-3-642-71001-8\_10.
156. Giorgilli, A., Casati, D., Sironi, L., and Galgani, L., 1986. An efficient procedure to compute fractal dimensions by box counting. *Phys. Lett. A*, **115**(5), pp. 202–206. DOI: 10.1016/0375-9601(86)90465-2.
157. Theiler, J., 1987. Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points. *Phys. Rev. A*, **36**(9), pp. 4456–4462. DOI: 10.1103/physreva.36.4456.
158. Liebovitch, L.S., and Toth, T., 1989. A fast algorithm to determine fractal dimensions by box counting. *Phys. Lett. A*, **141**(8–9), pp. 386–390. DOI: 10.1016/0375-9601(89)90854-2.
159. Pitsikalis, V., and Maragos, P., 2009. Analysis and classification of speech signals by generalized fractal dimension features. *Speech Commun.*, **51**(12), pp. 1206–1223. DOI: 10.1016/j.specom.2009.06.005.
160. Lo, A.W., 1991. Long-Term Memory in Stock Market Prices. *Econometrica*, **59**(5), pp. 1279–1313. DOI: 10.2307/2938368.
161. Jiang, Z.-Q., Yang, Y.-H., Wang, G.-J., and Zhou, W.-X., 2017. Joint multifractal analysis based on wavelet leaders. *Front. Phys.*, **12**(6). DOI: 10.1007/s11467-017-0674-x.
162. Krakovska, H., and Krakovska, A., 2016. Fractal Dimension of Self-Affine Signals: Four Methods of Estimation. In: XXXVI *Dynamics Days Europe*. Corfu, Greece, 6–10 June 2016. Available at: <http://arxiv.org/abs/1611.06190v1>.
163. Voss, R., 1988. Fractals in nature: from characterization to simulation. In: Peitgen, H., Saupe, D. eds., 1988. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag.
164. Kirichenko, L.O., and Chalaya, L.E., 2014. Complex Approach to Investigation of Fractal Time Series. *Int. J. Inf. Technol. Knowl.*, **8**(1), pp. 22–28 (in Russian).
165. Kirichenko, L.O., Kobitskaya, Yu.A., and Dyomina, N.A., 2015. Analysis and Recognition of the Signal Realizations Having Fractal Properties. *Bionika Intellekta*, **84**(1), pp. 49–55 (in Russian).
166. Chernogor, L.F., Lazorenko, O.V., and Onishchenko, A.A., 2018. Fractal Analysis of the Gravitational Waves as a Unique Ultra-Wideband Process. In: *Proc. 9th Int. Conf. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*. Odessa, Ukraine, 4–7 Sept., 2018. Odessa, 2018. P. 34–39. DOI: 10.1109/UWBUSIS.2018.8519979.
167. Onishchenko, A., Chernogor, L., and Lazorenko, O., 2019. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid. *Eskişehir Technical Univ. J. of Sci. and Tech. A – Appl. Sci. and Eng.*, **20**, pp. 188–192. DOI: 10.18038/estubtda.655702.



168. Maity, A.K., Pratihar, R., Mitra, A., Dey, S., Agrawal, V., Sanyal, S., Banerjee, A., Sengupta, R., Ghosh, D., 2015. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of alpha and theta EEG rhythms with musical stimuli. *Chaos Solit. Fractals*, **81**, pp. 52–67. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.08.016.
169. Arneodo, A., Grasseau, G., and Holschneider, M., 1988. Wavelet transform of multifractals. *Phys. Rev. Lett.*, **61**, pp. 2281–2284.
170. Muzy, J.F., Bacry, E., and Arneodo, A., 1991. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.*, **67**(25), pp. 3515–3518. DOI: 10.1103/physrevlett.67.3515.
171. Arneodo, A., Bacry, E., and Muzy, J.F., 1995. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A*, **213**, pp. 232–275.
172. Muzy, J. F., Bacry, E., and Arneodo, A., 1993. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Phys. Rev. E*, **47**(2), pp. 875–884. DOI: 10.1103/PhysRevE.47.875.
173. Quadfeul, S.-A. ed., 2012. *Fractal Analysis and Chaos in Geosciences*. Rijeka, Croatia: InTech Press.
174. Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., and Stanley, H.E., 2002. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, **316**(1–4), pp. 87–114. DOI: 10.1016/s0378-4371(02)01383-3.
175. Jaffard, S., 1997. Multifractal Formalism for Functions. Part I: Results Valid for All Functions. *SIAM J. Math. Anal.*, **28**(4), pp. 944–970.
176. Arneodo, A., Audit, B., Kestener, P., and Roux, S., 2007. Multifractal Formalism Based on the Continuous Wavelet Transform. *Scholarpedia*, **3**, pp. 1–20.
177. Jizba, P., Korbek, J., 2015. Applications of Multifractal Diffusion Entropy Analysis to Daily and Intraday Financial Time Series. In: Sanayei, A., Rössler, O.E., Zelinka, I. eds. *ISCS 2014: Interdisciplinary Symposium on Complex Systems. Emergence, Complexity and Computation*. Vol. 14. P. 333–342. Springer, Cham. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-10759-2\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-319-10759-2_34).
178. Galaska, R., Makowiec, D., Dudkowska, A., Koprowski, A., Chlebus, K., Wdowczyk-Szulc, J., and Rynkiewicz, A., 2008. Comparison of Wavelet Transform Modulus Maxima and Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Heart Rate in Patients with Systolic Dysfunction of Left Ventricle. *Ann. Noninvasive Electrocardiol.*, **13**(2), pp. 155–164.
179. Weiss, B., Clemens, Z., Bódizs, R., Vágó, Z., and Halász, P., 2009. Spatio-temporal analysis of monofractal and multifractal properties of the human sleep EEG. *J. Neurosci. Methods*, **185**, pp. 116–124.
180. Jaffard, S., Lashermes, B., Abry, P., 2006. Wavelet Leaders in Multifractal Analysis. In: Qian, T., Vai, M.I., Xu, Y. eds., 2006. *Wavelet Analysis and Applications. Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhäuser Basel. P. 201–246. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7778-6\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7778-6_17).
181. Kantelhardt, J.W., Rybski, D., Zschiegner, S.A., Braun, P., Koscielny-Bunde, E., Livina, V., Havlin, S., Bunde, A., 2003. Multifractality of river runoff and precipitation: comparison of fluctuation analysis and wavelet methods. *Physica A*, **330**(1–2), pp. 240–245. DOI: 10.1016/j.physa.2003.08.019.
182. Telesca, L., Lapenna, V., Macchiato, M., 2004. Mono- and multi-fractal investigation of scaling properties in temporal patterns of seismic sequences. *Chaos Solit. Fractals*, **19**, pp. 1–15.
183. Shimizu, Y., Thurner, S., and Ehrenberger, K., 2002. Multifractal Spectra as a Measure of Complexity in Human Posture. *Fractals*, **10**(01), pp. 103–116. DOI: 10.1142/s0218348x02001130.
184. Ihlen, E.A.F., 2012. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab. *Front. Physiol.*, **3**, article 141.
185. Dimri, V.P., 2016. *Fractal Solutions for Understanding Complex Systems in Earth Sciences*. Springer Int. Publ.
186. Barabási, A.-L., and Vicsek, T., 1991. Multifractality of self-affine fractals. *Phys. Rev. A*, **44**(4), pp. 2730–2733. DOI: 10.1103/physreva.44.2730.
187. Di Matteo, T., Aste, T., and Dacorogna, M., 2003. Scaling behaviors in differently developed markets. *Physica A*, **324**(1), pp. 183–188.
188. Di Matteo, T., 2007. Multi-scaling in finance. *Quant. Finance*, **7**(1), pp. 21–36.
189. Flandrin, P. ed., 1999. *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*. San Diego: Academic Press.
190. Benedetto, J.J., Byrnes, J.S., Byrnes, J.L., Hargreaves, K.A., and Berry, K., 1994. *Wavelets and Their Applications*. Springer Science+Business Media, B.V.
191. Mandelbrot, B.B., 1999. *Multifractals and 1/f Noise. wild self-Affinity in Physics (1963–1976)*. New York: Springer-Verlag.
192. Bertrand, J., and Bertrand, P., 1988. Time-frequency representations of broadband signals. In: *1988 Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-88)*. New York, NY, 11–14 April 1988, pp. 2196-2199.
193. Rioul, O., and Flandrin, P., 1992. Time-scale energy distributions-A general class extending wavelet transforms. *IEEE Trans. Signal Process.*, **40**(7), pp. 1746–1757.
194. Muniandy, S.V., and Lim, S.C., 2001. Modeling of locally self-similar processes using multifractional Brownian motion of Riemann-Liouville type. *Phys. Rev. E*, **63**(4), pp. 46–104. DOI: 10.1103/physreve.63.046104.
195. Morales, R., Di Matteo, T., Gramatica, R., and Aste, T., 2012. Dynamical generalized Hurst exponent as a tool to monitor unstable periods in financial time series. *Physica A*, **391**(11), pp. 3180–3189.
196. Huang, J., Shang, P., and Zhao, X., 2012. Multifractal diffusion entropy analysis on stock volatility in financial markets. *Physica A*, **391**(22), pp. 5739–5745. DOI: 10.1016/j.physa.2012.06.039.
197. Broniatowski, M., and Mignot, P., 2001. A self-adaptive technique for the estimation of the multifractal spectrum. *Stat. Probab. Lett.*, **54**(2), pp. 125–135. DOI: 10.1016/s0167-7152(00)00210-8.
198. Turcotte, D.L., 2004. The relationship of fractals in geophysics to “the new science.” *Chaos Solit. Fractals*, **19**(2), pp. 255–258. DOI: 10.1016/s0960-0779(03)00039-0.
199. Vicsek, T., 1990. Mass multifractals. *Physica A*, **168**(1), pp. 490–497. DOI: 10.1016/0378-4371(90)90401-d.

200. Gu, G.-F., and Zhou, W.-X., 2010. Detrending moving average algorithm for multifractals. *Phys. Rev. E*, **82**(1). DOI: 10.1103/physreve.82.011136.
201. Vandewalle, N., Ausloos, M., 1998. Crossing of two mobile averages: A method for measuring the roughness exponent. *Phys. Rev. E.*, **58**(5), pp. 6832–6834. DOI: 10.1103/physreve.58.6832.
202. Ghosh, D., Dutta, S., and Chakraborty, S., 2014. Multifractal detrended cross-correlation analysis for epileptic patient in seizure and seizure free status. *Chaos Solit. Fractals*, **67**, pp. 1–10. DOI: 10.1016/j.chaos.2014.06.010.
203. Barnsley, M.F., 1988. *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press Publ.

Received 15.05.2022

O.V. Lazorenko, L.F. Chernogor

V.N. Karazin Kharkiv National University  
4, Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

FRACTAL RADIOPHYSICS.

Part 2. FRACTAL AND MULTIFRACTAL ANALYSIS METHODS  
OF SIGNALS AND PROCESSES

**Subject and Purpose.** The subject of this paper is to review the principal methods of fractal and multifractal analysis of signals and processes, in combination with a detailed consideration of the algorithms that can provide for a successful practical implementation of the methods described.

**Methods and Methodology.** The results presented concern modeling of both deterministic and stochastic fractal and multifractal signals and processes. The corresponding practical methods of analysis are considered, with discussion of their essential features, advantages and disadvantages, as well as of the problems of application that may exist.

**Results.** Several approaches have been discussed as to categorizing the signals and processes within the notion of fractality. A few tens of models of deterministic and stochastic fractal or multifractal signals and processes have been analyzed in detail. Over twenty methods of monofractal analysis have been analyzed, with identification of their features, advantages or disadvantages, and limits of applicability. The expediency of resorting to complex methods of monofractal analysis has also been discussed. Those methods are not based upon application of fractal analysis techniques alone but rather combine them with linear and nonlinear integral time-frequency transforms. The effectiveness of the ten most popular multifractal analysis techniques has been confirmed, with consideration of their special features, advantages and drawbacks.

**Conclusion.** The mathematical foundations have been presented which underlie modern methods of analysis and modeling of fractal and multifractal signals and processes. The methods discussed may allow revealing a great amount of unique hidden information on the world around us.

**Keywords:** fractal, fractal dimension, fractal signal, fractal analysis, multifractal analysis.