DOI: https://doi.org/10.15407/rpra29.01.046
УДК 621.372(075.8)
PACS: 41.20.Jb, 05.45.Df, 94.20.Bb

О.В. Лазоренко, Л.Ф. Чорногор

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, м. Харків, 61077, Україна
E-mail: Oleg.V.Lazorenko@karazin.ua; Leonid.F.Chernogor@gmail.com

ФРАКТАЛЬНА РАДІОФІЗИКА.
Частина 3. ДРОБОВЕ ЧИСЛЕННЯ В ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ

***Предмет і мета роботи**. На початку XXI століття сформувався принципово новий науковий напрямок — фрактальна радіофізика. Ця робота являє собою огляд основних теоретичних і втілених на практиці ідей «фракталізації» у радіофізиці. Метою роботи є систематизований виклад основних практичних результатів застосування дробового, або фрактального, числення у сучасній теоретичній радіофізиці.*

***Методи та методологія**. У структурованому вигляді викладено основні теоретичні засади сучасного дробового числення. Систематизовано результати застосування методів дробового числення у фрактальній електродинаміці. Демонструються основні особливості, переваги та недоліки такого підходу. Обговорюються існуючі проблеми.*

***Результати.** Як один з основних напрямів «фракталізації» в теоретичній радіофізиці розглянуто основи дробового, або фрактального, числення. Представлено принципи побудови дробових інтегралів Рімана–Ліувілля, Ліувілля, Рісса та дробових похідних Рімана–Ліувілля, Капуто, Ліувілля, Рісса. Із використанням узагальненої формули Ньютона–Лейбніца, фундаментальних теорем дробового числення, дробових векторно-диференціальних і векторно-інтегральних операторів, дробової формули Гріна, дробової формули Стокса, дробової формули Гаусса продемонстровано узагальнення векторного числення. З його використанням викладено основи фрактальної електродинаміки. Наведено та проаналізовано декілька видів фрактальних рівнянь Максвелла. Обговорено основні особливості розв'язання задачі про поширення радіохвиль у фрактальних середовищах.*

***Висновки**. Як приклад практичного застосування теорії фракталів у сучасній теоретичній радіофізиці розглянуто результати використання апарату дробового числення у електродинаміці, яке привело до утворення принципово нового напрямку у фрактальній радіофізиці — фрактальної електродинаміки.*

***Ключові слова:** фрактал, дробове числення, дробові похідні, дробові інтеграли, фрактальна електродинаміка, фрактальні рівняння Максвелла.*

Вступ

Ця стаття є третьою з чотирьох частин огляду з фрактальної радіофізики. Попередні дві частини давали відповідь на запитання «Чому можна та потрібно використовувати фрактали в радіофізиці?» [1] та «Як саме можна застосовувати фрактали в радіофізиці?» [2]. Тут же йтиметься про те, як саме сьогодні у радіофізиці використовуються

Ц и т у в а н н я: Лазоренко О.В., Чорногор Л.Ф. Фрактальна радіофізика. Ч. 3. Дробове числення в електродинаміці. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2024. Т. 29, № 1. С. 46—67. https://doi.org/10.15407/rpra29.01.046
C i t a t i o n: Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2024. Fractal radiophysics. Part 3. Fractional calculus in electrodynamics. *Radio Phys. Radio Astron.*, **29**(1), pp. 46—67. https://doi.org/10.15407/rpra24.00.046

можливості найсучаснішого математичного апарату — дробового, або фрактального, числення.

Метою цієї роботи є викладення основних практичних результатів застосування дробового числення у сучасній теоретичній радіофізиці. Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

• стисло розглянути теоретичні основи дробового числення, виявити його особливості, переваги та недоліки, а також зрозуміти, які нові можливості дає воно порівняно із класичним диференціально-інтегральним численням;

• на прикладі фрактальної електродинаміки з'ясувати, які принципово нові практичні результати вже отримано з використанням дробового числення.

Структура роботи відповідає сформульованим задачам.

1. Дробове, або фрактальне, числення

1.1. Коротка історія створення

Одним із найреволюційніших підходів в електродинаміці, пов'язаних з фракталами, є так зване дробове числення (*англ.* fractional calculus), яке логічно випливає з фрактальної геометрії [3—5]. Останнім часом його все частіше називають фрактальним численням (*англ.* fractal calculus) [6, 7]. Тим не менш, у межах даної роботи ми будемо використовувати перший термін як більш звичний для спеціалістів.

Звернемо увагу читача на те, що при підготовці першої частини огляду [1] автори з початку не збиралися розглядати дану тематику, про що тоді прямо й написали. Однак за майже три роки, що минули відтоді, з'ясувалося, що популярність фрактальної електродинаміки [4] серед спеціалістів зростає величезними темпами (див., наприклад, [8—11]), а тому без згадки про дробове числення запропонований нами огляд буде неповним.

Теорія інтегрування та диференціювання нецілого порядку бере свій початок 30 вересня 1695 р., коли видатний німецький математик Г. Лейбніц у листі до Г. Лопіталя запропонував обчислити похідну порядку $\alpha = 1/2$ [12]. Подальшого розвитку ця ідея набула у роботах Л. Ейлера (1738 р.) [13], П. Лапласа (1812 р.) [14], Ж. Фур'є (1822 р.) [15], Н. Абеля (1823 р.) [16], Ж. Ліувілля (1832 р.) [17], Б. Рімана (1847 р.) [18], Х. Холмгрена (1866 р.) [19], А. Грюнвальда (1867 р.) [20], О.В. Лєтнікова (1868 р.) [21], М.Я. Соніна (1870 р.) [22], Ж. Адамара (1892 р.) [23], Г. Харді та М. Рісса (1915 р.) [24], Г. Вейля (1917 р.) [25] і багатьох інших відомих математиків [3—5]. Зауважимо, що робота [18] була видана тільки у 1876 р., хоча відповідні дослідження були проведені Б. Ріманом ще в студентські роки (1847 р.). Найдокладніша хронологія становлення та розвитку дробового числення є в монографії [7].

На сьогодні вже видано безліч фундаментальних праць (наприклад, [3—6, 8]) і публікацій у наукових часописах (наприклад, [9—11]) про дробове інтегро-диференціювання, диференціальні, інтегральні й інтегро-диференціальні рівняння дробових порядків і різні їх застосування, зокрема, й у радіофізиці. Фрактальна парадигма, яка базується у тому числі й на фрактальній динаміці, де використовують дробове числення, стала новою парадигмою сучасної науки.

Важливо також зазначити, що дробове числення є зручним інструментом не лише для математиків. Існують реальні фізичні системи, здатні на практиці проводити операції інтегро-диференціювання. Такими системами, наприклад, є напівнескінченні довгі лінії, електричні кола, що враховують шорсткість контактної поверхні елементів тощо [7]. Перша така система, що ґрунтується на технології електрохімічних конверторів, була розроблена ще на початку 1960-х рр. Після цього подібні фізичні системи, названі фрактальними елементами, стали створюватися спочатку на базі напівпровідників, а потім — нанодротів і наночастинок [7]. У рамках даного підходу було розроблено теорію фрактальних імпедансів і фрактальних елементів (фрактальних конденсаторів, фрактальних RC-кіл з розподіленими та мішаними параметрами), які описуються в термінах дробових інтегро-диференціальних операторів. На сьогодні ці результати активно використовуються на практиці в радіотехніці та радіоелектроніці [7]. Зауважимо, що у роботах, присвячених теорії систем ітерованих функцій (див., наприклад, [26]), також використовують термін «фрактальний елемент» (або «фрактел», *англ.* fractel). Це чистий омонім, оскільки математики так називають цілком абстрактний математичний об’єкт, який не має жодного стосунку до згаданих вище фрактальних елементів.

Нижче ми розглянемо основні поняття сучасного дробового числення. У першу чергу, до них належать дробові інтеграли та дробові похідні (див., наприклад, [3—5]). Як і у двох попередніх частинах огляду, викладення матеріалу відбувається не на математичному, а на фізичному рівні строгості. Автори свідомо поступаються математичною строгістю викладення, оскільки ставлять перед собою задачу донести основні ідеї фрактального підходу в радіофізиці до якомога ширшого кола читачів.

1.2. Дробові інтеграли

Існують три найбільш відомих класи дробових інтегралів, а саме дробові інтеграли Рімана–Ліувілля, Ліувілля і Рісса [3–5].

1.2.1. Дробові інтеграли Рімана–Ліувілля

Розглянемо визначення дробового інтеграла Рімана–Ліувілля на обмеженому інтервалі дійсної осі. Якщо функція $f(x)$ є безперервною функцією на дійсній осі, то можна визначити наступний інтеграл:

$$\left(I^1 f\right)(x) = \int\limits_a^x f(x_1)\,dx_1.$$

Повторюючи цю операцію *n* разів поспіль, використовуючи *формулу Коші* для повторного інтегрування та гамма-функцію $\Gamma(n) = (n-1)!$ для усунення дискретної природи факторіала, отримуємо

$$\left(I^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-z)^{\alpha-1} f(z)\,dz, \quad \alpha > 0. \qquad (1)$$

Саме співвідношення (1) і може бути розглянуто як визначення дробового інтеграла.

Нехай є обмежений інтервал $[a,b]$ на дійсній осі $\mathbb{R}$. Позначимо через $L_p(a,b)$, де $p \ge 1$, множину функцій $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ таких, що для них виконується умова

$$\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Тоді якщо $f(x)$ є функцією вигляду $f(x) \in L_p(a,b)$, то для неї визначено лівобічний і правобічний дробові інтеграли Рімана–Ліувілля:

$$\left({}_aI_x^\alpha f\right)(x) = {}_aI_x^\alpha[z]f(z) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-z)^{\alpha-1} f(z)\,dz; \qquad (2)$$

$$\left({}_xI_b^\alpha f\right)(x) = {}_xI_b^\alpha[z]f(z) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b (z-x)^{\alpha-1} f(z)\,dz. \qquad (3)$$

Установлено, що дробові інтегральні оператори ${}_aI_x^\alpha$ і ${}_xI_b^\alpha$ $(\alpha > 0)$ є обмеженими при $p \ge 1$.

Виявляється, що ці оператори ${}_aI_x^\alpha$ і ${}_xI_b^\alpha$ пов’язані між собою за допомоги оператора Q:

$$(Qf)(x) = f(a+b-x),\ \ Q\,{}_aI_x^\alpha = {}_xI_b^\alpha Q,$$
$$Q\,{}_xI_b^\alpha = {}_aI_x^\alpha Q.$$

Важливо, що при $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ співвідношення

$$\begin{aligned}&\left({}_aI_x^\alpha\,{}_aI_x^\beta f\right)(x) = \left({}_aI_x^{\alpha+\beta} f\right)(x),\\ &\left({}_xI_b^\alpha\,{}_xI_b^\beta f\right)(x) = \left({}_xI_b^{\alpha+\beta} f\right)(x)\end{aligned} \qquad (4)$$

задовольняються майже у кожній точці $x \in [a,b]$ для $f(x) \in L_p(a,b)$ при $p \ge 1$. Якщо ж $\alpha + \beta > 1$, то співвідношення (4) виконуються у кожній точці $x \in [a,b]$. Також ці співвідношення є вірними для $x \in [a,b]$ при $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, якщо $f(x) \in C(a,b)$, тобто $f(x)$ є безперервною функцією для $x \in [a,b]$.

Для невеликої кількості функцій дробовий інтеграл можна виразити через елементарні функції

$$\begin{aligned}&{}_aI_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta},\\ &{}_xI_b^\alpha (b-x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(b-x)^{\alpha+\beta}\end{aligned} \qquad (5)$$

для $\beta > -1$ і $\alpha \ge 0$. Зокрема, для константи C ми маємо:

$${}_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha,\ \ {}_xI_b^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(b-x)^\alpha.$$

Для $\alpha = 1$ і $\beta = n$ з (5) випливає відомий класичний результат, оскільки $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

1.2.2. Дробові інтеграли Ліувілля

Тепер розглянемо дробові інтеграли не на відрізку, а на всій дійсній осі $\mathbb{R}$.

Лівобічний і правобічний інтеграли Ліувілля задаються відповідно співвідношеннями:

$$\left(I_{+}^{\alpha}f\right)(x) = {}_{-\infty}I_{x}^{\alpha}[z]f(z) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{x}(x-z)^{\alpha-1}f(z)dz; \qquad (6)$$

$$\left(I_{-}^{\alpha}f\right)(x) = {}_{x}I_{\infty}^{\alpha}[z]f(z) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{\infty}(z-x)^{\alpha-1}f(z)dz. \qquad (7)$$

Дробовий інтегральний оператор Ліувілля $I_{\pm}^{\alpha}$ визначено для функцій $f(x)\in L_p(\mathbb{R})$, $0<\alpha<1$, $1\le p<1/\alpha$. За його допомоги співвідношення (6) і (7) можна записати у загальному вигляді:

$$\left(I_{\pm}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}f(x\mp z)z^{\alpha-1}dz.$$

Перетворення Фур'є дробових інтегралів Ліувілля задають таким чином. Якщо $f(x)\in L_1(\mathbb{R})$ і $0<\alpha<1$, то

$$I_{\pm}^{\alpha}f = \hat{F}^{-1}\{(\mp iz)^{-\alpha}\hat{F}\{f\}\}, \qquad (8)$$

де

$$(\mp iz)^{-\alpha} = |z|^{-\alpha}\exp\left(\pm\operatorname{sgn}(z)\frac{i\pi\alpha}{2}\right),$$

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} +1, & z\ge 0; \\ -1, & z<0, \end{cases}$$

а пряме й обернене перетворення Фур'є задаються відповідно співвідношеннями:

$$\hat{F}\{f\} = \int\limits_{\mathbb{R}_n}f(x)\exp(-izx)dx; \qquad (9)$$

$$\hat{F}^{-1}\{\tilde{f}\} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\tilde{f}(z)\exp(ixz)dz, \qquad (10)$$

де $f(x)$ — функція-оригінал; $\tilde{f}(z)$ — функція-зображення.

Дробові інтеграли Ліувілля мають важливу властивість: $QI_{\pm}^{\alpha}f = I_{\mp}^{\alpha}Qf$, $Qf(x) = f(-x)$.

Для оператора трансляції T_h і оператора масштабування Π_λ, які визначаються відповідно співвідношеннями $\mathrm{T}_hf(x) = f(x+h)$, $\Pi_\lambda f(x) = f(\lambda x)$, $\lambda>0$, оператори $I_{\pm}^{\alpha}$ задовольняють умовам комутації: $\mathrm{T}_hI_{\pm}^{\alpha}f = I_{\pm}^{\alpha}\mathrm{T}_hf$, $\Pi_\lambda I_{\pm}^{\alpha}f = \lambda^{\alpha}I_{\pm}^{\alpha}\Pi_\lambda f$. Також для них справедливий вираз $I_{\pm}^{\alpha}I_{\pm}^{\beta}f = I_{\pm}^{\alpha+\beta}f$, якщо $f(x)\in L_p(\mathbb{R})$, де $\alpha>0$, $\beta>0$, $p\ge 1$, $\alpha+\beta<1/p$.

Розглянемо декілька прикладів дробових інтегралів Ліувілля від елементарних функцій. Так, наприклад, можна показати, що

$$I_{\pm}^{\alpha}e^{\pm ax} = a^{-\alpha}e^{\pm ax}, \ a>0;$$

$$I_{\pm}^{\alpha}\sin(bx) = b^{-\alpha}\sin\left(bx\mp\frac{\alpha\pi}{2}\right), \ \alpha>0;$$

$$I_{+}^{\alpha}(b-ax)^{\beta} = \frac{\Gamma(-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}(b-ax)^{\alpha+\beta},$$

$$a\ge 0, \ b-ax>0, \ \alpha+\beta<1;$$

$$I_{-}^{\alpha}\left(x^{\beta}\right) = \frac{\Gamma(-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}x^{\alpha+\beta}, \ \alpha+\beta<1, \ \alpha>0.$$

Ще одне невеличке зауваження щодо термінології. Інколи інтегралами Ліувілля називають тільки інтеграли (6), натомість інтеграли (7) іменують інтегралами Вейля (див., наприклад, [5]).

1.2.3. Дробові інтеграли Рісса

Дробовий інтеграл Рісса на дійсній осі $\mathbb{R}$ визначають таким співвідношенням:

$$(\mathbf{I}_{x}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(z)dz}{|z-x|^{1-\alpha}}, \qquad (11)$$

де $\alpha>0$, $\alpha\ne 1,3,5,\ldots$. Цей інтеграл визначено для функцій $f(x)\in L_p(\mathbb{R})$, $0<\alpha<n$, $1\le p<n/\alpha$.

Він також може бути представлений через дробові інтеграли Ліувілля:

$$\mathbf{I}_{x}^{\alpha} = \frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\left(I_{+}^{\alpha}+I_{-}^{\alpha}\right).$$

Дробовий інтеграл Рісса може бути визначений і на фінітному інтервалі $x\in[a,b]$:

$$\left(\mathbf{A}_{x}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int\limits_{a}^{b}\frac{f(z)dz}{|x-z|^{1-\alpha}}, \ \alpha>0.$$

Зрозуміло, що при $a \to -\infty$ і $b \to +\infty$ ми отримуємо співвідношення (11).

Для випадку багатьох змінних дробовий інтеграл Рісса визначають співвідношенням

$$(\mathbf{I}_x^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(z)dz}{|z-x|^{n-\alpha}},$$

де $\alpha > 0$, $\alpha \ne n, n+2, n+4, \ldots$,

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma(n-\alpha/2), \\ \alpha \ne n+2k,\ n \ne -2k; \\ 1,\ n = -2k; \\ (-1)^{\frac{n-\alpha}{2}} 2^{\alpha-1} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{[\alpha - n]}{2}\right), \\ \alpha = n+2k. \end{cases} \qquad (12)$$

Дробовий інтеграл Рісса також може бути визначений із використанням перетворення Фур'є:

$$\left(\mathbf{I}_x^\alpha f\right)(x) = \hat{F}^{-1}\left\{|z|^{-\alpha} \hat{F}\{f\}(z)\right\}.$$

Для всіх $\alpha > 0$ дробовий інтеграл Рісса можна записати з використанням ядра Рісса $K_\alpha(x)$:

$$(\mathbf{I}_x^\alpha f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x-z) f(z) dz,$$

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n},\ \alpha - n \ne 0, 2, 4, \ldots; \\ |x|^{\alpha-n} \ln\frac{1}{|x|},\ \alpha - n = 0, 2, 4, \ldots, \end{cases}$$

де величина $\gamma_n(\alpha)$ задається співвідношенням (12).

1.3. Дробові похідні

Із використанням розглянутих вище дробових інтегралів можна ввести дробові похідні Рімана–Ліувілля, Капуто, Ліувілля та Рісса.

1.3.1. Дробові похідні Рімана–Ліувілля

Нехай є обмежений інтервал $[a,b]$ на дійсній осі $\mathbb{R}$. Дробові похідні Рімана–Ліувілля ${}_aD_x^\alpha$ і ${}_xD_b^\alpha$ порядку $\alpha > 0$ визначають таким чином:

$${}_aD_x^\alpha f(x) = D_x^n\, {}_aI_x^{n-\alpha}[z] f[z] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D_x^n \int\limits_a^x \frac{f(z)dz}{(x-z)^{\alpha-n+1}},\ x > a; \qquad (13)$$

$${}_xD_b^\alpha f(x) = D_x^n\, {}_xI_b^{n-\alpha}[z] f[z] =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} D_x^n \int\limits_x^b \frac{f(z)dz}{(z-x)^{\alpha-n+1}},\ x < b, \qquad (14)$$

де $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ — ціла частина від числа α, $D_x^n = d^n / dx^n$ — звичайна похідна порядку n по x. Зокрема, якщо $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то

$${}_aD_x^0 f(x) = {}_xD_b^\alpha f(x) = f(x),\ \ {}_aD_x^n f(x) = D_x^n f(x),$$

$${}_xD_b^n f(x) = (-1)^n D_x^n f(x).$$

Звернемо увагу, що у визначенні дробових похідних Рімана–Ліувілля використовують дробові інтеграли Рімана–Ліувілля ${}_aI_x^\alpha$ і ${}_xI_b^\alpha$, які задають співвідношеннями (2) і (3) відповідно.

У ряді випадків для дробових похідних Рімана–Ліувілля від елементарних функцій вдається отримати досить прості вирази. Так, наприклад, можна легко переконатися, що дробові похідні Рімана–Ліувілля від степеневих функцій $(x-a)^\beta$ і $(b-x)^\beta$ теж є степеневими функціями:

$${}_aD_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\beta-\alpha},$$

$${}_xD_b^\alpha (b-x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (b-x)^{\beta-\alpha},$$

де $\beta > -1$ і $\alpha > 0$. Зокрема, якщо $\beta = 0$ і $\alpha > 0$, дробові похідні Рімана–Ліувілля від константи C зовсім не дорівнюють нулю:

$${}_aD_x^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^{-\alpha},$$

$${}_xD_b^\alpha (b-x)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (b-x)^{-\alpha}.$$

З іншого боку, для $k = 1, 2, \ldots, [\alpha] + 1$ маємо ${}_aD_x^\alpha (x-a)^{\alpha-k} = 0$, ${}_xD_b^\alpha (b-x)^{\alpha-k} = 0$.

Важливо зазначити, що рівняння виду $\left({}_aD_x^\alpha f\right)(x) = 0$ має сенс тоді і лише тоді, коли

$$f(x) = \sum_{k=1}^n C_k (x-a)^{\alpha-k},$$

де $n = [\alpha] + 1$, C_k — звичайні дійсні константи, $k = 1, \ldots, n$. Рівняння ж виду $\left({}_xD_b^\alpha f\right)(x) = 0$ має сенс тоді й лише тоді, коли його розв'язки мають вигляд

$$f(x) = \sum_{k=1}^n C_k (b-x)^{\alpha-k},$$

де $n=[\alpha]+1$, C_k — звичайні дійсні константи, $k=1,...,n$.

Покладемо $\alpha>0$ і $n=[\alpha]+1$. Якщо $f(x)\in C^n(a,b)$, то дробові похідні Рімана–Ліувілля існують майже скрізь на $x\in[a,b]$ і можуть бути представлені у вигляді

$$\left({}_aD_x^\alpha f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(D_x^k f)(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x dz\frac{(D_z^n f)(z)}{(x-z)^{\alpha-n+1}},$$

$$\left({}_xD_b^\alpha f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n\frac{(D_x^k f)(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b dz\frac{(D_z^n f)(z)}{(z-x)^{\alpha-n+1}}.$$

1.3.2. Дробові похідні Капуто

Дробові похідні Капуто ${}_a^CD_x^\alpha$ і ${}_x^CD_b^\alpha$ можуть бути визначені для всіх функцій із простору $f(x)\in C^n(a,b)$.

Нехай $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$ для $\alpha\notin\mathbb{N}$ і $n=\alpha$ для $\alpha\in\mathbb{N}$. Якщо $f(x)\in C^n(a,b)$, то дробові похідні Капуто існують майже скрізь для $x\in[a,b]$. Вони задаються так.

Якщо $\alpha\notin\mathbb{N}$, $n=[\alpha]+1$, то

$$\left({}_a^CD_x^\alpha f\right)(x)=\left({}_aI_x^{n-\alpha}D_x^n f\right)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x dz\frac{D_z^n f(z)}{(x-z)^{\alpha-n+1}};\qquad(15)$$

$$\left({}_x^CD_b^\alpha f\right)(x)=(-1)^n\left({}_xI_b^{n-\alpha}D_x^n f\right)(x)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b dz\frac{D_z^n f(z)}{(z-x)^{\alpha-n+1}}.\qquad(16)$$

Якщо ж $\alpha=n\in\mathbb{N}$, то

$$\left({}_a^CD_x^\alpha f\right)(x)=D_x^n f(x);\qquad(17)$$

$$\left({}_x^CD_b^\alpha f\right)(x)=(-1)^nD_x^n f(x).\qquad(18)$$

Звернімо увагу на той факт, що на відміну від дробових похідних Рімана–Ліувілля (13) та (14), де до функції $f(x)$ спочатку застосовують оператор дробового інтегрування Рімана–Ліувілля, а потім від результату обчислюють звичайну похідну, тут у (15) і (16) все робиться з точністю до навпаки: спочатку обчислюють звичайну похідну n-го порядку, а потім до результату застосовують оператор дробового інтегрування Рімана–Ліувілля. Також важливим є те, що для цілого порядку $\alpha=n$ дробові похідні Капуто перетворюються на звичайні похідні (17) або майже на звичайні похідні (18).

Слід зазначити, що коли $\alpha\notin\mathbb{N}$ і $n=[\alpha]+1$, то дробові похідні Капуто пов'язані з дробовими похідними Рімана–Ліувілля в таких випадках:

$$\left({}_a^CD_x^\alpha f\right)(x)=\left({}_aD_x^\alpha f\right)(x),$$

якщо $f(a)=(D_x^1 f)(a)=...=(D_x^{n-1}f)(a)=0$;

$$\left({}_x^CD_b^\alpha f\right)(x)=\left({}_xD_b^\alpha f\right)(x),$$

якщо $f(b)=(D_x^1 f)(b)=...=(D_x^{n-1}f)(b)=0$.

Можна переконатися, що

$${}_a^CD_x^\alpha(x-a)^\beta=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\beta-\alpha},$$

$${}_x^CD_b^\alpha(b-x)^\beta=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(b-x)^{\beta-\alpha},$$

де $\beta>-1$ і $\alpha>0$. Зокрема, якщо покласти $\beta=0$ і $\alpha>0$, то з'ясовується, що дробові похідні Капуто від константи C дорівнюють нулю, ${}_a^CD_x^\alpha C=0$, ${}_x^CD_b^\alpha C=0$, як і для звичайної похідної. Натомість для $k=0,1,2,...,n-1$ маємо ${}_a^CD_x^\alpha(x-a)^k=0$, ${}_x^CD_b^\alpha(b-x)^k=0$, що виглядає дещо дивним.

Також цікаво відзначити, що спеціальна функція Міттаг-Леффлера $E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha]$ виявляється інваріантною відносно дробової похідної Капуто ${}_a^CD_x^\alpha$:

$${}_a^CD_x^\alpha E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha]=\lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha].$$

Відносно ж дробової похідної Капуто ${}_x^CD_b^\alpha$ ця функція такої інваріантності не має.

Функція Міттаг-Леффлера — це функція комплексної змінної; була введена Г. Міттаг-Леффлером у 1905 р. як узагальнення показникової функції:

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{z^k}{\Gamma(1+k/\alpha)},\ 1\le\alpha<\infty.$$

1.3.3. Дробові похідні Ліувілля

Визначимо дробові похідні Ліувілля на всій дійсній осі $\mathbb{R}$.

Лівобічна (D_+^α) та правобічна (D_-^α) дробові похідні Ліувілля порядку $\alpha > 0$ задаються відповідно співвідношеннями:

$$(D_+^\alpha f)(x) = D_x^n (I_+^{n-\alpha} f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\alpha-n+1}}; \qquad (19)$$

$$(D_-^\alpha f)(x) = (-1)^n D_x^n (I_-^{n-\alpha} f)(x) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{x}^{+\infty} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{\alpha-n+1}}. \qquad (20)$$

Тут ми використовували такі позначення: $D_x^n = d^n / dx^n$ для звичайної похідної порядку n, $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ — ціла частина від числа α; $I_\pm^\alpha$ — дробові інтеграли Ліувілля. Якщо ж $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то $(D_+^\alpha f)(x) = D_x^n f(x)$, $(D_-^\alpha f)(x) = (-1)^n D_x^n f(x)$.

Із точки зору побудови, дробові похідні Ліувілля аналогічні дробовим похідним Рімана–Ліувілля. Якщо $\alpha = 0$, то $(D_+^0 f)(x) = (D_-^0 f)(x) = f(x)$. Якщо $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ і $\beta > \alpha > 1$, то $D_\pm^\alpha \left(I_\pm^\alpha f \right)(x) = f(x)$, $D_\pm^\alpha \left(I_\pm^\beta f \right)(x) = \left(I_\pm^{\beta-\alpha} f \right)(x)$. Якщо дробові похідні $\left(D_\pm^\alpha f \right)(x)$ і $\left(D_\pm^{\alpha+k} f \right)(x)$ існують, то $\left(D_x^k D_\pm^\alpha f \right)(x) = (\pm 1)^k \left(D_\pm^{\alpha+k} f \right)(x)$.

Перетворення Фур'є дробових похідних Ліувілля порядку $\alpha > 0$ визначають співвідношенням

$$\left(\hat{F} D_\pm^\alpha f \right)(k) = (\mp ik)^\alpha \left(\hat{F} f \right)(k),$$

де $(\mp ik)^\alpha = |k|^\alpha \exp\left\{ \mp \operatorname{sgn}(x) \frac{\alpha \pi i}{2} \right\}$.

Зауважимо також, що за аналогією з інтегралами Ліувілля іноді похідними Ліувілля називають лише похідні $(D_+^\alpha f)(x)$, а похідні $(D_-^\alpha f)(x)$ іменують похідними Вейля (див., наприклад, [5]).

1.3.4. Дробові похідні Рісса

Нехай є n-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$. Тоді в ньому для $\alpha > 0$ і «достатньо доброї» функції $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, визначено дробову похідну Рісса: $\left(\mathbf{D}_x^\alpha f \right)(x) = \hat{F}^{-1} \left(|k|^\alpha (\hat{F} f)(k) \right)$. Зауважимо, що дробову похідну Рісса визначають через оператори прямого й оберненого перетворень Фур'є, які, як відомо, задаються співвідношеннями (9) і (10) відповідно.

Поняття «достатньо доброї» функції застосовують у теорії узагальнених функцій. Так називають функцію, яка у просторі $\mathbb{R}^n$ має безперервні похідні всіх порядків і є фінітною (тобто перетворюється на нуль поза деякою обмеженою областю цього простору).

За умови $\alpha > 0$ дробова похідна Рісса може бути визначена у вигляді такого гіперсингулярного інтеграла:

$$\left(\mathbf{D}_x^\alpha f \right)(x) = \frac{1}{d_n(m,\alpha)} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|z|^{\alpha+n}} \left(\Delta_z^m f \right)(z)\,dz, \; m > \alpha,$$

$$\left(\Delta_z^m f \right)(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!} f(x - kz),$$

$$d_n(m,\alpha) = \frac{\pi^{1+\frac{n}{2}} A_m(\alpha)}{2^\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\frac{\pi\alpha}{2}},$$

$$A_m(\alpha) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j-1} \frac{m!}{j!(m-j)!} j^\alpha.$$

Слід зазначити, що гіперсингулярний інтеграл не залежить від вибору $m > \alpha$.

Перетворення Фур'є дробової похідної Рісса «достатньо доброї» функції $f(x)$ має вигляд

$$\left(\hat{F} \mathbf{D}_x^\alpha f \right)(k) = \left| k^\alpha \right| \left(\hat{F} f \right)(k).$$

Оператор дробової похідної Рісса $\mathbf{D}_x^\alpha$ є оберненим до оператора дробового інтеграла Рісса $\mathbf{I}_x^\alpha$. За умов $\alpha > 0$ і $1 \le p < n / a$ для $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можна записати, що $\mathbf{D}_x^\alpha \mathbf{I}_x^\alpha f(x) = f(x)$.

Дробову похідну Рісса можна виразити через дробові похідні Ліувілля

$$\left(\mathbf{D}_x^\alpha f \right)(x) = \frac{1}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \left[(D_+^\alpha f)(x) + (D_-^\alpha f)(x) \right],$$

які задаються співвідношеннями (19) та (20) відповідно.

Зауважимо, що на відміну від звичайної похідної, яка має локальний (точковий) характер, усі розглянуті дробові похідні є нелокальними, оскільки залежать від цілого інтервалу, на якому обчислюються відповідні інтеграли.

Отже, ми познайомилися з основними видами дробових інтегралів і дробових похідних. Крім них, існують багато інших (менш відомих) їх видів: дробові інтеграли Адамара, Чженя, узагальнений дробовий інтеграл Джрбашяна, дробові похідні Маршо, Грюнвальда–Лєтнікова, Адамара, дробова феллерівська похідна, локальна дробова похідна Колванкара, локальна дробова похідна Хаусдорфа та ін. [3—11, 27].

Зазначимо, що у дробовому численні вже спостерігаються спроби відокремлення самостійних напрямків. Так, наприклад, на основі введеної В. Ченом (W. Chen) у 2006 р. локальної дробової похідної Хаусдорфа [28] створено так зване хаусдорфове числення, яке протиставляється іншим напрямкам дробового числення [27]. Більше того, воно вже успішно реалізоване на практиці, зокрема у найсучасніших системах магнітної томографії [27].

1.4. Узагальнення векторного числення

1.4.1. Що треба узагальнювати?

Векторне числення — це розділ математики, який вивчає диференціювання та інтегрування векторних полів. Як відомо з курсу математичного аналізу, градієнт скалярного поля $f(\vec{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$, дивергенція та ротор векторного поля $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i F_i(\vec{r})$, $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i x_i$, у декартових координатах у просторі $\mathbb{R}^3$ задаються таким чином [4]:

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \nabla f = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \left(\nabla, \vec{F}\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \left[\nabla, \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1(\vec{r}) & F_2(\vec{r}) & F_3(\vec{r}) \end{vmatrix},$$

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Така форма запису є звичною, але надто громіздкою. Застосуємо іншу, більш зручну форму [4]:

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{e}_s D_s^1 f(x); \tag{21}$$

$$\operatorname{div} \vec{F}(x) = D_s^1 F_s(x); \tag{22}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x) = \vec{e}_i \varepsilon_{imn} D_m^1 F_n. \tag{23}$$

Тут, як і заведено в теоретичній фізиці, коли за парою індексів, що повторюються, йде підсумовування, то знак суми опускають. Змінна x перестає вважатися скалярною і за замовчанням замінює собою радіус-вектор $\vec{r}$ (проте позначення вектора над нею не ставлять), а тому має координати x_s, $s = 1,2,3$. Символ D_s^1 є оператором першої частинної похідної за координатою x_s: $D_s^1 \equiv \partial / \partial x_s$. Те ж саме стосується й D_m^1, $m = 1,2,3$. Векторні величини $\vec{e}_s$, $s = 1,2,3$, є ортами ортонормованого базису $\{\vec{e}_s\}_{s=1}^{3}$. Величина ε_{imn} є символом Леві–Чивіти, який дорівнює 1, якщо (i,m,n) є парною перестановкою $(1,2,3)$, -1, якщо перестановка непарна, та 0, якщо те саме число повторюється хоча б двічі. Така незвичайна форма запису дає можливість зробити звичні нам співвідношення максимально схожими на їх узагальнені варіанти.

Щоб можна було узагальнити відомі фізичні співвідношення на фрактальний випадок, фрактальне векторне числення повинне містити узагальнення операторів диференціювання (градієнта, дивергенції, ротора), інтегральних операцій (потоку, циркуляції) та теорем Гаусса, Стокса та Гріна.

1.4.2. Узагальнена формула Ньютона–Лейбніца

Звернімося до добре відомої формули Ньютона–Лейбніца [4]

$$\int_a^b dx\, D_x^1 f(x) = f(b) - f(a), \tag{24}$$

яка справедлива для функції $f(x)$, безперервної на $x \in [a,b]$. Слід звернути увагу, що узагальнення співвідношення (24) для різних дробових похідних і дробових інтегралів будуть мати різний вигляд, а тому завжди треба перевіряти, для яких саме операторів воно було записане.

Оберемо лівобічний дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля ${}_aI_x^\alpha$ (2) і лівобічну похідну Рімана–Ліувілля ${}_aD_x^\alpha$ (13). Установлено (див., наприклад, [4]), що для вимірюваної за Лебегом на відрізку $x \in [a,b]$ функції $f(x)$, для якої

$$\int_a^b f(x)dx < \infty$$

і ${}_aI_b^{n-\alpha} f(x)$ має абсолютно безперервні похідні аж до порядку $(n-1)$ на $x \in [a,b]$, майже скрізь на цьому відрізку справедливе співвідношення

$$ {}_aI_b^\alpha\, {}_aD_x^\alpha f(x) = $$

$$ = f(b) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(b-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(D_x^{n-j}\, {}_aI_x^{n-\alpha} f \right)(a), \qquad (25)$$

де $D_x^{n-j} = d^{n-j} / dx^{n-j}$, $(n-1) < \alpha < n$.

Для $n = 1$ співвідношення (25) дещо спрощується:

$$ {}_aI_b^\alpha\, {}_aD_x^\alpha f(x) = f(b) - \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, {}_aI_x^{1-\alpha} f(x). $$

Математики не задовольнилися співвідношенням (25) і не визнали його узагальненням формули Ньютона–Лейбніца (24) [4]. Пізніше з’явилася більш вдала ідея — замінити лівобічну дробову похідну Рімана–Ліувілля ${}_aD_x^\alpha$ на лівобічну дробову похідну Капуто ${}_a^CD_x^\alpha$ (15), що й привело до успіху:

$$ {}_aI_b^\alpha\, {}_a^CD_x^\alpha f(x) = f(b) - f(a). \qquad (26)$$

Саме співвідношення (26) вважають фрактальним аналогом формули Ньютона–Лейбніца.

1.4.3. Фундаментальні теореми дробового числення

У звичайному цілочисловому численні існують дві фундаментальні теореми (див., наприклад, [4]).

Перша фундаментальна теорема стверджує, що диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими операціями: якщо безперервну функцію спочатку проінтегрувати, а потім продиференціювати, то вийде вихідна функція:

$$ D_x^1\, {}_aI_x^1 f(x) = f(x). \qquad (27)$$

Друга фундаментальна теорема стверджує, що

$$ {}_aI_b^1 D_x^1 f(x) = f(b) - f(a). \qquad (28)$$

Важливо, що інтегральні теореми векторного числення (Стокса, Гріна, Гаусса) можна розглядати як узагальнення цих фундаментальних теорем числення. Як було показано вище, при використанні лівобічних дробових інтеграла та похідної Рімана–Ліувілля отримати узагальнення другої фундаментальної теореми не вдається. Успіх приносить використання лівобічної дробової похідної Капуто.

Фундаментальні теореми дробового числення мають вигляд:

$$ {}_a^CD_x^\alpha\, {}_aI_x^\alpha f(x) = f(x), \ \ \alpha > 0; \qquad (29)$$

$$ {}_aI_x^\alpha\, {}_a^CD_x^\alpha f(x) = f(x) - f(a), \ \ 0 < \alpha \le 1. \qquad (30)$$

Отже, саме співвідношення (29) і (30) є аналогами фундаментальних теорем (27) та (28) для дробового числення. Фундаментальні теореми дробового числення можуть бути також записані через правобічний дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля та правобічну дробову похідну Капуто:

$$ {}_x^CD_b^\alpha\, {}_xI_b^\alpha f(x) = f(x), \ \ \alpha > 0; \qquad (31)$$

$$ {}_xI_b^\alpha\, {}_x^CD_b^\alpha f(x) = f(x) - f(a), \ \ 0 < \alpha \le 1. \qquad (32)$$

Яку саме пару співвідношень, (29) і (30) або (31) і (32), слід використовувати — залежить від умов конкретної задачі (див., наприклад, [4]).

1.4.4. Дробові векторно-диференціальні оператори

Розглянемо узагальнення векторно-диференціальних операторів [4].

Дробовий оператор Гамільтона. Узагальнення оператора Гамільтона на випадок дробового числення є таким:

$$ \nabla_W^\alpha = {}^C\vec{D}_W^\alpha = \vec{e}_1\, {}^CD_W^\alpha[x] + \vec{e}_2\, {}^CD_W^\alpha[y] + $$
$$ + \vec{e}_3\, {}^CD_W^\alpha[z], \quad n-1 < \alpha < n, $$

де ${}^CD_W^\alpha[x_m]$ — похідні дробові Капуто відносно координат x_m $(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z)$; W — деяка частина простору $\mathbb{R}^3$, де діє дробовий оператор ∇. Якщо W є паралелепіпедом, $W := \left\{ a \le x \le b, c \le y \le d, g \le z \le h \right\}$, то ${}^CD_W^\alpha[x] = {}_a^CD_b^\alpha[x]$, ${}^CD_W^\alpha[y] = {}_c^CD_d^\alpha[y]$, ${}^CD_W^\alpha[z] = {}_g^CD_h^\alpha[z]$.

Звернімо увагу на той факт, що оскільки оператор Гамільтона в принципі записується в будь-якій ортогональній системі координат, то і узагальнений він може бути теж у будь-якій ортогональній системі координат. Однак найпростіший вигляд він, як відомо, має саме у декартових координатах.

Дробовий градієнт. Якщо $f(x,y,z)$ є $(n-1)$ разів безперервно диференційовним скалярним полем, таким, що похідні $D^{n-1}_{x_i} f$ є абсолютно безперервними, то дробовий градієнт скалярного поля задають співвідношенням

$$\operatorname{grad}^{\alpha}_{W} f = {}^{C}\vec{D}^{\alpha}_{W} f = \vec{e}_i\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_i] f =$$
$$= \vec{e}_1\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x] f(x,y,z) + \vec{e}_2\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[y] f(x,y,z) +$$
$$+ \vec{e}_3\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[z] f(x,y,z).$$

Дробова дивергенція. Якщо $\vec{F}(x,y,z)$ є $(n-1)$ разів безперервно диференційовним векторним полем, таким, що похідні $D^{n-1}_{x_i} F_i$ є абсолютно безперервними, тоді дробову дивергенцію векторного поля задають співвідношенням

$$\operatorname{div}^{\alpha}_{W} \vec{F} = \left({}^{C}\vec{D}^{\alpha}_{W}, \vec{F} \right) =$$
$$= {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_i] F_i = {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x] F_x(x,y,z) +$$
$$+ {}^{C}D^{\alpha}_{W}[y] F_y(x,y,z) + {}^{C}D^{\alpha}_{W}[z] F_z(x,y,z).$$

Дробовий ротор. Якщо $\vec{F}(x,y,z)$ є $(n-1)$ разів безперервно диференційовним векторним полем, таким, що похідні $D^{n-1}_{x_i} F_i$ є абсолютно безперервними, тоді дробовий ротор векторного поля задають співвідношенням

$$\operatorname{rot}^{\alpha}_{W} \vec{F} = \left[{}^{C}\vec{D}^{\alpha}_{W}, \vec{F} \right] = \vec{e}_i \varepsilon_{imk}\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_m] F_k =$$
$$= \vec{e}_1 \left({}^{C}D^{\alpha}_{W}[y] F_z - {}^{C}D^{\alpha}_{W}[z] F_y \right) +$$
$$+ \vec{e}_2 \left({}^{C}D^{\alpha}_{W}[z] F_x - {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x] F_z \right) +$$
$$+ \vec{e}_3 \left({}^{C}D^{\alpha}_{W}[x] F_y - {}^{C}D^{\alpha}_{W}[y] F_x \right),$$

де $F_k = F_k(x,y,z) \in C^n[W]$, $k = 1,2,3.$

Важливо, що на відміну від звичайних векторно-диференціальних операторів, дробові векторно-диференціальні оператори мають нелокальний характер, тобто залежать одразу від усієї області W.

Для дробових векторно-диференціальних операторів існують такі основні співвідношення.

Для скалярного поля $f(x,y,z)$ маємо

$$\operatorname{div}^{\alpha}_{W} \operatorname{grad}^{\alpha}_{W} f = {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_i]\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_i] f =$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \left({}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_i] \right)^2 f = \left({}^{C}\vec{D}^{\alpha}_{W}, {}^{C}\vec{D}^{\alpha}_{W} \right) f =$$
$$= \left({}^{C}\vec{D}^{\alpha}_{W} \right)^2 f.$$

Важливо, що у загальному випадку $\left({}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_i] \right)^2 \neq$ $\neq {}^{C}D^{2\alpha}_{W}[x_i]$, оскільки

$$\left({}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x} \right)^2 = \left({}_{a}I^{n-\alpha}_{x} D^{n}_{x} \right)^2 = {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} D^{n}_{x}\, {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} D^{n}_{x} =$$
$$= {}_{a}I^{n-\alpha}_{x}\, {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} D^{n}_{x} D^{n}_{x} + {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} \left[D^{n}_{x}, {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} \right] D^{n}_{x} =$$
$$= {}_{a}D^{2\alpha}_{x} + {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} \left[D^{n}_{x}, {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} \right] D^{n}_{x},$$
$$\left[D^{n}_{x}, {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} \right] = D^{n}_{x}\, {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} - {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} D^{n}_{x} \neq 0.$$

Друге важливе співвідношення для скалярного поля $f(x,y,z)$ має вигляд

$$\operatorname{rot}^{\alpha}_{W} \operatorname{grad}^{\alpha}_{W} f = \vec{e}_i \varepsilon_{imn}\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_m]\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_n] f = 0.$$

Для векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ існує таке співвідношення:

$$\operatorname{div}^{\alpha}_{W} \operatorname{rot}^{\alpha}_{W} \vec{F} = {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_k] \varepsilon_{klm}\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_m] F_m(x,y,z) =$$
$$= \varepsilon_{klm}\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_k]\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_l] F_m(x,y,z) = 0.$$

Четверте співвідношення також записується для векторного поля $F_m(x,y,z)$:

$$\operatorname{rot}^{\alpha}_{W} \operatorname{rot}^{\alpha}_{W} \vec{F} = \vec{e}_l \varepsilon_{lmn}\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_m] \varepsilon_{npq}\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_q] F_q =$$
$$= \vec{e}_l \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{npq}\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_m]\, {}^{C}D^{\alpha}_{W}[x_p] F_q.$$

Оскільки $\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{npq} = \delta_{mp}\delta_{nq} - \delta_{mq}\delta_{np}$, де δ_{mn} — символ Кронекера, отримуємо

$$\operatorname{rot}^{\alpha}_{W} \operatorname{rot}^{\alpha}_{W} \vec{F} = \operatorname{grad}^{\alpha}_{W} \operatorname{div}^{\alpha}_{W} \vec{F} - \left({}^{C}\vec{D}^{\alpha}_{W} \right)^2 \vec{F}.$$

Важливо, що

$${}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}[x'] \left(f(x') g(x') \right) \neq$$
$$\neq \left({}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}[x'] f(x') \right) g(x') + \left({}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}[x'] g(x') \right) f(x').$$

Останнє пояснюється тим, що

$${}_{a}D^{\alpha}_{x}[x'] \left(f(x') g(x') \right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} a(\alpha, j) \left({}_{a}D^{\alpha-j}_{x}[x'] f(x') \right) \left({}_{a}D^{j}_{x}[x'] g(x') \right),$$

$$a(\alpha, j) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)},$$

$$\mathrm{grad}_W^\alpha(fg) \neq \left(\mathrm{grad}_W^\alpha f\right) g + \left(\mathrm{grad}_W^\alpha g\right) f,$$

$$\mathrm{div}_W^\alpha(f\vec{F}) \neq \left(\mathrm{grad}_W^\alpha f, \vec{F}\right) + f\,\mathrm{div}_W^\alpha \vec{F}.$$

Два останніх співвідношення показують, що, на жаль, не можна використовувати правило Лейбніца для дробового узагальнення векторного числення.

1.4.5. Дробові векторно-інтегральні оператори

Розглянемо дробові узагальнення циркуляції, потоку й об'ємного інтеграла [4].

Нехай є векторне поле

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i F_i(\vec{r}) = \vec{e}_1 F_x + \vec{e}_2 F_y + \vec{e}_3 F_z,$$

де $F_x = F_x(x,y,z)$, $F_y = F_y(x,y,z)$, $F_z = F_z(x,y,z)$ — абсолютно інтегровні дійсні функції у просторі $\mathbb{R}^3$. Із використанням дробових векторно-інтегральних операторів

$$\vec{I}_L^\alpha = \vec{e}_1 I_L^\alpha[x] + \vec{e}_2 I_L^\alpha[y] + \vec{e}_3 I_L^\alpha[z],$$

$$\vec{I}_S^\alpha = \vec{e}_1 I_S^\alpha[y,z] + \vec{e}_2 I_S^\alpha[z,x] + \vec{e}_3 I_S^\alpha[x,y]$$

можна визначити дробові узагальнення векторно-інтегральних операцій.

Дробова циркуляція векторного поля $\vec{F}$ — це дробовий контурний інтеграл векторного поля $\vec{F}$ уздовж ліній *L*, що задається співвідношенням

$$E_L^\alpha(\vec{F}) = \left(\vec{I}_L^\alpha, \vec{F}\right) = I_L^\alpha[x]F_x + I_L^\alpha[y]F_y + I_L^\alpha[z]F_z,$$

де $F_x, F_y, F_z \in L_1(\mathbb{R}^3)$.

Для $\alpha = 1$ отримуємо звичайний контурний інтеграл другого роду:

$$E_L^1(\vec{F}) = \left(\vec{I}_L^1, \vec{F}\right) = \int_L \left(d\vec{L}, \vec{F}\right) =$$
$$= \int_L \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right),$$

де $d\vec{L} = \vec{e}_1 dx + \vec{e}_2 dy + \vec{e}_3 dz$.

Дробовий потік векторного поля $\vec{F}$ через поверхню *S* — це дробовий поверхневий інтеграл векторного поля $\vec{F}$ по поверхні *S*, що задається співвідношенням

$$\Phi_S^\alpha(\vec{F}) = \left(\vec{I}_S^\alpha, \vec{F}\right) =$$
$$= I_S^\alpha[y,z]F_x + I_S^\alpha[z,x]F_y + I_S^\alpha[x,y]F_z,$$

де $F_x, F_y, F_z \in L_1(\mathbb{R}^3)$.

Для $\alpha = 1$ отримуємо звичайний поверхневий інтеграл:

$$\Phi_S^1(\vec{F}) = \left(\vec{I}_S^1, \vec{F}\right) = \iint_S \left(d\vec{S}, \vec{F}\right) =$$
$$= \iint_S \left(F_x dydz + F_y dxdz + F_z dxdy\right),$$

де $d\vec{S} = \vec{e}_1 dydz + \vec{e}_2 dxdz + \vec{e}_3 dxdy$.

Дробовий об'ємний інтеграл — це триразовий дробовий інтеграл в області *W* у просторі $\mathbb{R}^3$ від скалярного поля $f(x,y,z) \in L_1(\mathbb{R}^3)$, що задається співвідношенням

$$V_W^\alpha(f) = I_W^\alpha[x,y,z] f(x,y,z) =$$
$$= I_W^\alpha[x] I_W^\alpha[y] I_W^\alpha[z] f(x,y,z).$$

Для $\alpha = 1$ отримуємо звичайний об'ємний інтеграл:

$$V_W^1(f) = I_W^1[x,y,z] f(x,y,z) =$$
$$= I_W^1[x] I_W^1[y] I_W^1[z] f(x,y,z) =$$
$$= \iiint_W dV\, f(x,y,z) = \iiint_W dxdydz\, f(x,y,z).$$

1.4.6. Дробова формула Гріна

Далі розглянемо дробове узагальнення формули Гріна [4].

Відомо, що теорема Гріна дає співвідношення між контурним інтегралом уздовж замкнутої кривої ∂W та подвійним інтегралом над областю *W* на площині, обмеженій кривою ∂W.

Теорема Гріна. Нехай ∂W — гладка, проста, замкнута крива на площині, напрям обходу якої є додатним; *W* — область на площині, обмежена кривою ∂W. Якщо F_x і F_y мають безперервні часткові похідні у відкритій області, що містить *W*, то

$$\int_{\partial W} \left(F_x dx + F_y dy\right) = \iint_W \left(D_y^1 F_x - D_x^1 F_y\right) dxdy.$$

Із використанням дробових операторів при $\alpha = 1$ це співвідношення можна переписати у вигляді

$$I^1_{\partial W}[x]F_x(x,y) + I^1_{\partial W}[y]F_y(x,y) =$$
$$= I^1_W[x,y]\left(D^1_{\partial W}[y]F_x(x,y) - D^1_{\partial W}[x]F_y(x,y)\right).$$

Дробова теорема Гріна для прямокутної області формулюється таким чином.

Нехай $F_x(x,y)$ і $F_y(x,y)$ — безперервно диференційовні дійсні функції в плоскій області, що включає прямокутник $W := \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$; крива ∂W є межею області *W*. Тоді

$$I^\alpha_{\partial W}[x]F_x(x,y) + I^\alpha_{\partial W}[y]F_y(x,y) = I^\alpha_W[x,y] \times$$
$$\times\left({}^C D^\alpha_{\partial W}[y']F_x(x,y') - {}^C D^\alpha_{\partial W}[x']F_y(x',y)\right),$$
$$0 < \alpha \le 1.$$

Зауважимо, що існує узагальнення дробової теореми Гріна на непрямокутні області.

1.4.7. Дробова формула Стокса

Розглянемо дробове узагальнення формули Стокса для простої області поверхні *W*, яка обмежена кривою ∂W (див., наприклад, [4]). Нехай $\vec{F}(x,y,z)$ є гладким векторним полем, визначеним над *W*. Тоді формула Стокса має вигляд

$$\int\limits_{\partial W}\left(\vec{F}, d\vec{L}\right) = \int\limits_{W}\left(\operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S}\right).$$

У правій частині цього співвідношення стоїть поверхневий інтеграл по поверхні *W*, у лівій — контурний інтеграл уздовж просторової кривої ∂W. Запишемо теорему Стокса з використанням дробових операторів при $\alpha = 1$ і порівняємо її з дробовою теоремою Стокса.

Теорема Стокса. Нехай *W* — двічі безперервно диференційовна проста поверхня, обхід межі ∂W якої відбувається у додатному напрямку. Якщо $\vec{F}$ — безперервно диференційовне векторне поле над областю *W*, то

$$\left(\vec{I}^1_{\partial W}, \vec{F}\right) = \left(\vec{I}^1_W, \operatorname{rot}^1_{\partial W}\vec{F}\right).$$

Дробова теорема Стокса. Нехай $\vec{F}(x,y,z)$ — векторне поле, таке що

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{e}_1 F_x(x,y,z) +$$
$$+ \vec{e}_2 F_y(x,y,z) + \vec{e}_3 F_y(x,y,z),$$

де F_x, F_y, F_z — безперервно диференційовні дійсні функції у просторі $\mathbb{R}^3$. Тоді дробове узагальнення формули Стокса записується як

$$\left(\vec{I}^\alpha_{\partial W}, \vec{F}\right) = \left(\vec{I}^\alpha_W, \operatorname{rot}^\alpha_{\partial W}\vec{F}\right).$$

Зрозуміло, що для $\alpha = 1$ отримуємо звичайну формулу Стокса.

1.4.8. Дробова формула Гаусса

Як відомо [4], теорема Гаусса, відома також як теорема Остроградського–Гаусса, стверджує наступне.

Теорема Гаусса. Нехай *W* — деяка область у просторі $\mathbb{R}^3$, обмежена замкненою поверхнею ∂W. Тоді об'ємний інтеграл від дивергенції векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ і поверхневий інтеграл від векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ по ∂W пов'язані співвідношенням

$$\oiint\limits_{\partial W}\vec{F}d\vec{S} = \iiint\limits_{W}\operatorname{div}\vec{F}dV \text{ або } \left(\vec{I}^1_{\partial W}, \vec{F}\right) = I^1_W \operatorname{div}\vec{F}.$$

Узагальнення теореми Гаусса на випадок дробового числення виглядає так.

Дробова теорема Гаусса. Нехай $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ — безперервно диференційовні дійсні функції в області, яка включає паралелепіпед

$$W := \{(x,y,z),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ g \le z \le h\}.$$

Якщо ∂W — замкнута межа області *W*, то

$$\left(\vec{I}^\alpha_{\partial W}, \vec{F}\right) = I^\alpha_W \operatorname{div}^\alpha_W \vec{F}.$$

Зазначимо, що існує й узагальнення теореми Гаусса на непрямокутні області.

Отже, тепер ми маємо всі необхідні інструменти, щоб розглянути узагальнені співвідношення фрактальної електродинаміки. У подальшому викладі матеріалу ми, переважно, дотримувалися роботи [4].

2. Основи фрактальної електродинаміки

2.1. Електричний заряд для фрактального розподілу

Добре відомо, що коли електричний заряд розподілено в області $W \in \mathbb{R}^3$, то його розподіл там прийнято описувати об'ємною густиною заряду $\rho'(\vec{r}', t)$. Тоді загальний заряд у цій області визначають за допомогою інтеграла

$$Q_3(W) = \int_W \rho'(\vec{r}',t)dV_3', \ dV' = dx'dy'dz'$$

для декартових координат x', y', z', які є розмірними. З використанням безрозмірних координат $x = x'/l_0$, $y = y'/l_0$, $z = z'/l_0$, $\vec{r} = \vec{r}'/l_0$ маємо

$$Q_3(W) = \int_W \rho'(\vec{r}',t)dV_3' = \int_W \rho(\vec{r},t)dV_3,$$

$$\rho(\vec{r},t) = l_0^3\rho'(\vec{r}',t) = l_0^3\rho'(\vec{r}l_0,t), \ dV = dxdydz.$$

Зауважимо, що якщо ρ' вимірюють у кулонах на метр кубічний (Кл/м^3), то ρ — просто в кулонах (Кл).

Узагальнимо цей результат на випадок фрактального розподілу заряду. Є принаймні два шляхи зробити таке узагальнення. Перший полягає в узагальненні всіх відомих співвідношень електродинаміки з використанням дробових інтегралів і дробових похідних, другий — у використанні так званих дробових безперервних моделей фрактальних розподілів.

На жаль, подолання першого шляху на сьогоднішній день залишається не завершеним. У попередньому підрозділі нам довелося використовувати переважно прямокутні області для введення дробово-інтегральних операторів. Виявляється, саме тут зараз проходить передній край науки у фрактальній електродинаміці. Задля повноти викладення матеріалу, що розглядається, як приклад ми розглянемо нижче відповідну систему рівнянь Максвелла.

Отже, спочатку оберемо шлях, пов'язаний з використанням дробових безперервних моделей фрактальних розподілів. У дробових безперервних моделях фрактальних розподілів зарядів і полів ми використовуємо дробові інтеграли над областю в просторі $\mathbb{R}^n$ замість звичайних інтегралів над фрактальними множинами.

Щоб описати фрактальний розподіл за допомогою дробової безперервної моделі, використовуємо густину станів $c_n(D,\vec{r})$ і густину зарядів $\rho(\vec{r},t)$. Функція $c_n(D,\vec{r})$ є густиною станів у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Густина станів описує, наскільки щільно упаковані дозволені стани у просторі $\mathbb{R}^n$. Густина зарядів $\rho(\vec{r},t)$ описує розподіл зарядів за множиною дозволених станів в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. У дробовій безперервній моделі фрактальних середовищ густину станів $c_n(D,\vec{r})$ в $\mathbb{R}^n$ обирають так, щоб величина $d\mu_D(\vec{r},n) = c_n(D,\vec{r})dV_n$ описувала б кількість дозволених станів в об'ємі dV_n. Скористаємося позначеннями $dV_D = c_3(D,\vec{r})dV_3$, $dS_d = c_2(d,\vec{r})dS_2$, $dl_\gamma = c_1(\gamma,\vec{r})dl_1$, щоб задати густини станів у n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ для $n = 1,2,3$ відповідно.

Розглянемо фрактальний розподіл електричного заряду, що задається описаною вище функцією $\rho(\vec{r},t)$. У дробовій безперервній моделі загальний заряд визначають як

$$Q_D(W) = \int_W \rho(\vec{r},t)dV_D, \ dV_D = c_3(D,\vec{r})dV_3,$$

де для декартових координат $dV = dxdydz$, $D = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, а густина станів задається співвідношенням

$$c_3(D,\vec{r}) = \frac{8\pi^{D/2}|x|^{\alpha_1-1}|y|^{\alpha_2-1}|z|^{\alpha_3-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}.$$

У випадку центрально-симетричного розподілу заряду використовують густину станів

$$c_3(D,\vec{r}) = \frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}|\vec{r}|^{D-3}.$$

До речі, тут легко перевірити, що для нефрактального розподілу заряду у просторі $\mathbb{R}^3$ маємо $D = 3$ і $c_3(D,\vec{r}) = 1$, тобто рівномірний розподіл дозволених станів.

Розглянемо приклад простого розподілу заряджених частинок. Нехай W являтиме собою кулю радіусом R, тобто $W = \{\vec{r} : |\vec{r}| \le R\}$. Для стаціонарного (не залежного від часу), сферично-симетричного розподілу заряджених частинок з $\rho(\vec{r},t) = \rho(r)$ маємо

$$Q_D(W) = 4\pi\frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}\int_0^R \rho(r)r^{D-1}dr.$$

В однорідному випадку, коли $\rho(r) = \rho_0$, отримуємо

$$Q_D(W) = 4\pi\rho_0\frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}\frac{R^D}{D}.$$

Розподіл заряджених частинок вважають однорідним, якщо всі області W і W' з однаковими об'ємами $V_D(W) = V_D(W')$ мають однакові загальні заряди цих областей: $Q_D(W) = Q_D(W')$.

Для однорідного фрактального розподілу заряджених частинок електричний заряд підпорядковується степеневому закону $Q(R) \sim R^D$, тоді як для однорідного n-вимірного розподілу ми маємо $Q(R) \sim R^n$. Саме ця властивість може бути використана для вимірювання фрактальної розмірності фрактальних розподілів зарядів. Зазвичай саме цей закон розглядають як визначення фрактальної розмірності заряду D. Якщо всі заряди ідентичні, то ця розмірність дорівнює масовій фрактальній розмірності, яку ми розглядали в [1].

2.2. Електричний струм для фрактального розподілу

Нехай заряджені частинки, які мають густину розподілу $\rho(\vec{r},t)$, впорядковано рухаються зі швидкістю $\vec{u}(\vec{r},t)$. Тоді густину струму $\vec{j}(\vec{r},t)$ визначають співвідношенням $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{u}(\vec{r},t)$.

Силу струму $I_3(S)$, який протікає через поверхню S в просторі $\mathbb{R}^3$, можна визначити як потік вектора $\vec{j}$ крізь цю поверхню:

$$I_3(S) = \Phi_j(S) = \int_S \left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_2\right),$$

де $d\vec{S}_2 = \vec{n}dS_2$, dS_2 — безрозмірний елемент площі поверхні; $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі.

Тепер припустимо, що поверхня, якою тече електричний струм, є фрактальною та має розмірність $d > 2$. Тоді в рамках дробової безперервної моделі

$$I_d(S) = \int_S \left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_d\right), \quad d\vec{S}_d = c_2(d,\vec{r})d\vec{S}_2,$$

де $c_2(d,\vec{r})$ — густина станів на поверхні, якою протікає електричний струм. Зазвичай використовують

$$c_2(d,\vec{r}) = \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)}|\vec{r}|^{d-2}.$$

Легко переконатися, що для нефрактальної поверхні, коли $d = 2$, отримуємо $c_2(d,\vec{r}) = 1$.

2.3. Теорема Гаусса для фрактального розподілу

Використовуючи отримані у попередньому пункті співвідношення, запишемо:

$$I_d(S) = \int_{\partial W} \left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_d\right) = \int_{\partial W} c_2(d,\vec{r})\left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_2\right).$$

Тепер можна скористатися теоремою Остроградського—Гаусса:

$$\int_{\partial W} c_2(d,\vec{r})\left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_2\right) = \int_W \operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r})\vec{j}(\vec{r},t)\right)dV_3.$$

Оскільки $dV_D = c_3(D,\vec{r})dV_3$,
то $dV_3 = c_3^{-1}(D,\vec{r})dV_D$. Тоді можна переписати:

$$\int_W \operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r})\vec{j}(\vec{r},t)\right)dV_3 =$$

$$= \int_W c_3^{-1}(D,\vec{r})\operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r})\vec{j}(\vec{r},t)\right)dV_D.$$

Отже, отримали *теорему Гаусса для дробової безперервної моделі фрактальних розподілів зарядів і полів*:

$$\int_{\partial W} \left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_d\right) =$$

$$= \int_W c_3^{-1}(D,\vec{r})\operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r})\vec{j}(\vec{r},t)\right)dV_D.$$

2.4. Теорема Стокса для фрактального розподілу

Теорема Стокса пов'язує поверхневий інтеграл від ротора напруженості електричного поля $\vec{E}$ по поверхні S в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ з контурним інтегралом від вектора $\vec{E}$, обчисленого за межею цієї поверхні $L = \partial S$:

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}_1\right) = \int_S \left(\operatorname{rot}\vec{E}, d\vec{S}_2\right),$$

де $\vec{E}(\vec{r},t)$ є напруженістю електричного поля в точці з радіус-вектором $\vec{r}$. Раніше ми записали, що $dl_\gamma = c_1(\gamma,\vec{r})dl_1$, де $c_1(\gamma,\vec{r})$ — густина станів на межі L, яка може бути задана виразом

$$c_1(\gamma,\vec{r}) = \frac{2^{1-\gamma}\Gamma(1/2)}{\Gamma(\gamma/2)}|\vec{r}|^{\gamma-1}.$$

Видно, що за умови $\gamma = 1$ маємо $c_1(\gamma,\vec{r}) = 1$. Тепер можна записати:

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}_\gamma\right) = \oint_L c_1(\gamma,\vec{r})\left(\vec{E}, d\vec{l}_1\right) =$$

$$= \int_S \left(\operatorname{rot}\left(c_1(\gamma,\vec{r})\vec{E}\right), d\vec{S}_2\right).$$

З іншого боку, $dS_d = c_2(d,\vec{r})dS_2$, звідки $dS_2 = c_2^{-1}(d,\vec{r})dS_d$, $d\vec{S}_2 = c_2^{-1}(d,\vec{r})d\vec{S}_d$.

Тоді

$$\int_S \left(\operatorname{rot}\left(c_1(\gamma,\vec{r})\vec{E}\right), d\vec{S}_2\right) =$$

$$= \int_S c_2^{-1}(d,\vec{r})\left(\operatorname{rot}\left(c_1(\gamma,\vec{r})\vec{E}\right), d\vec{S}_d\right).$$

У результаті одержуємо *теорему Стокса для дробової безперервної моделі фрактального розподілу зарядів і струмів*:

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}_\gamma\right) = \int_S c_2^{-1}(d,\vec{r})\left(\operatorname{rot}\left(c_1(\gamma,\vec{r})\vec{E}\right), d\vec{S}_d\right).$$

2.5. Закон збереження заряду для фрактального розподілу

Закон збереження заряду говорить про те, що швидкість зміни заряду у часі в області W, обмеженій поверхнею $S = \partial W$, дорівнює потокові заряду через цю поверхню. Відповідне рівняння, також відоме як рівняння безперервності в інтегральній формі, має вигляд

$$\frac{dQ(W)}{dt} = -I(S).$$

У дробовій безперервній моделі цей закон описують співвідношенням

$$\frac{d}{dt}Q_D(W) = -I_d(S),$$

де $Q_D(W) = \int_W \rho(\vec{r},t)\,dV_D$, $I_d(S) = \int_S \left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_d\right)$.

Тоді

$$\frac{d}{dt}Q_D(W) = \frac{d}{dt}\int_W \rho(\vec{r},t)\,dV_D = -\int_{\partial W}\left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_d\right).$$

Отже, збереження електричного заряду в рамках дробової безперервної моделі описується дробовим інтегральним рівнянням. Використовуючи узагальнену вище теорему Гаусса, отримаємо

$$\int_{\partial W}\left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_d\right) =$$

$$= \int_W c_3^{-1}(D,\vec{r})\operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r})\vec{j}(\vec{r},t)\right)dV_D =$$

$$= \int_W c_3^{-1}(D,\vec{r})\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_2(d,\vec{r})j_k(\vec{r},t)\right)dV_D.$$

Якщо поверхня W сама не змінюється у часі, то

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho(\vec{r},t)\,dV_D = \int_W \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}dV_D.$$

Тоді

$$\int_W \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}dV_D =$$

$$= -\int_W c_3^{-1}(D,\vec{r})\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_2(d,\vec{r})j_k(\vec{r},t)\right)dV_D.$$

Ураховуючи у цьому співвідношенні, що $dV_D = c_3(D,\vec{r})dV_3$, отримуємо дробове інтегральне рівняння, яке описує закон збереження електричного заряду:

$$\int_W c_3(D,\vec{r})\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}dV_3 =$$

$$= -\int_W \frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_2(d,\vec{r})j_k(\vec{r},t)\right)dV_3 = 0.$$

Оскільки це співвідношення виконується для довільної області W, то це можливо лише коли

$$c_3(D,\vec{r})\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_2(d,\vec{r})j_k(\vec{r},t)\right) = 0.$$

У результаті ми отримали *закон збереження електричного заряду в диференціальній формі*. Це рівняння для фрактального розподілу у дробовій безперервній моделі.

Зазначимо, що останнє диференціальне рівняння не є дробовим диференціальним рівнянням. Для $D = 3$ і $d = 2$, коли $c_3(3,\vec{r}) = 1$ і $c_2(2,\vec{r}) = 1$, ми отримуємо добре відоме рівняння безперервності у диференціальній формі:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}j_k(\vec{r},t) = 0.$$

2.6. Закон Кулона для фрактального розподілу

Розглянемо закон Кулона для дробової безперервної моделі фрактального розподілу електричних зарядів. Заряд $dQ_D = \rho(\vec{r}')dV_D'$, розташований у точці з радіус-вектором $\vec{r}'$, у точці з радіус-вектором $\vec{r}$ створює електричне поле $d\vec{E}$, яке записується за допомогою співвідношення

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dQ_D}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3},$$

де $\vec{r}$ і $\vec{r}'$ — безрозмірні радіус-вектори; ε_0 — електрична стала.

Напруженість поля, створюваного у точці $\vec{r}$ електричним зарядом, розподіленим в області W звичайного тривимірного простору із густиною $\rho(\vec{r}')$, має такий вигляд:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_W \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(\vec{r}')\,dV_3'.$$

У випадку фрактального розподілу заряду в області W маємо

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_W \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(\vec{r}')\,dV_D',$$

де $dV_D' = c_3(D,\vec{r}')\,dV_3'$.

Цей вираз розглядається як закон Кулона для стаціонарного фрактального розподілу електричних зарядів у рамках дробової безперервної моделі.

2.7. Закон Біо–Савара–Лапласа для фрактального розподілу

Відповідно до закону Біо–Савара–Лапласа, індукція магнітного поля в точці $\vec{r}$, створеного електричними струмами, розподіленими в області W тривимірного простору із густиною $\vec{j}(\vec{r}')$, визначається співвідношенням

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_W \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}'),\vec{r}-\vec{r}'\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV_3',$$

де $\vec{r}$ і $\vec{r}'$ — безрозмірні радіус-вектори; μ_0 — магнітна стала.

У випадку фрактального розподілу струмів в області W маємо

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_W \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}'),\vec{r}-\vec{r}'\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV_D'.$$

Цей вираз і розглядається як закон Біо–Савара–Лапласа для стаціонарного фрактального розподілу електричних струмів у рамках дробової безперервної моделі.

2.8. Закон Гаусса для фрактального розподілу

У класичній електродинаміці закон Гаусса, відомий також як теорема Гаусса про потік, установлює зв'язок між просторовим розподілом електричного заряду та створюваним ним електричним полем. Відповідно до закону Гаусса, повний потік вектора напруженості електричного поля Φ_E через замкнуту поверхню $S=\partial W$ є пропорційним сумарному електричному зарядові $Q_D(W)$ всередині об'єму W, обмеженого цією поверхнею:

$$\Phi_E(\partial W) = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_D(W).$$

У дробовій безперервній моделі фрактального розподілу електричного заряду електричний потік через поверхню $S=\partial W$ дорівнює

$$\Phi_E(S) = \int_S \left(\vec{E}, d\vec{S}_d\right),$$

де $\vec{E}(\vec{r},t)$ — вектор напруженості електричного поля, $d\vec{S}_d = \vec{n}\,dS_d = \vec{n}c_2(d,\vec{r})\,dS_2$. Водночас відомо, що

$$Q_D(W) = \int_W \rho(\vec{r},t)\,dV_D.$$

Тоді закон Гаусса для стаціонарного фрактального розподілу електричних зарядів у рамках дробової безперервної моделі можна записати так:

$$\int_S \left(\vec{E}, d\vec{S}_d\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_W \rho(\vec{r},t)\,dV_D,$$

де $dV_D = c_3(D,\vec{r})\,dV_3$.

У випадку стаціонарного розподілу фрактального заряду $\rho(\vec{r},t)=\rho(\vec{r})$ всередині кулі радіусом R: $W=\{\vec{r}:|\vec{r}|\le R\}$ маємо

$$Q_D(W) = 4\pi\frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}\int_0^R \rho(r)r^{D-1}dr.$$

У випадку $d=2$ і сфери $S=\partial W=\{\vec{r}:|\vec{r}|=R\}$, що обмежує цю кулю, можна записати $\Phi_E(\partial W)=4\pi R^2E(R)$, звідки

$$E(R) = \frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\varepsilon_0 R^2\Gamma(D/2)}\int_0^R \rho(r)r^{D-1}dr.$$

Для однорідного розподілу $\rho(\vec{r})=\rho_0$ цей вираз ще більше спрощується:

$$E(R) = \rho_0\frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\varepsilon_0\Gamma(D/2)}R^{D-2}.$$

Звідси випливає дуже цікавий результат: для фрактального розподілу з розмірністю $D=2+0$ маємо $E(R)=\text{const}$.

2.9. Закон Ампера для фрактального розподілу

Відповідно до закону Ампера, індукція магнітного поля навколо провідника зі струмом пропорційна силі цього струму, який є джерелом поля. У разі стаціонарних струмів контурний інтеграл від вектора індукції магнітного поля $\vec{B}(\vec{r})$ по замкнутому контуру є прямо пропорційним силі струму, що пронизує цей контур:

$$\oint_L \left(\vec{B}(\vec{r}), d\vec{l}_1 \right) = \mu_0 I_3(S) = \mu_0 \int_S \left(\vec{j}(\vec{r}), d\vec{S}_2 \right),$$

де $d\vec{l}_1 = \vec{\tau} dl_1$, $\vec{\tau}$ — вектор дотичної до кривої L у заданій точці.

У стаціонарному випадку $I_3(S)$ і $\vec{j}(\vec{r})$ не змінюються у часі. У рамках дробової безперервної моделі закон Ампера для фрактального розподілу зарядів та полів є таким:

$$\oint_L \left(\vec{B}(\vec{r}), d\vec{l}_\gamma \right) = \mu_0 \int_S \left(\vec{j}(\vec{r}), d\vec{S}_d \right),$$

$$d\vec{S}_d = \vec{n} dS_d = \vec{n} c_2(d, \vec{r}) dS_2,$$

$$d\vec{l}_\gamma = \vec{\tau} dl_\gamma = \vec{\tau} c_1(\gamma, \vec{r}) dl_1.$$

Розглянемо найпростіший приклад фрактального розподілу. Для циліндрично-симетричного розподілу з $\gamma = 1$ маємо

$$I_d(S) = 2\pi \int_0^R j(r) c_2(d, \vec{r}) r dr =$$

$$= 4\pi \frac{2^{2-D}}{\Gamma(d/2)} \int_0^R j(r) r^{d-1} dr,$$

де густина дозволених станів визначається співвідношенням

$$c_2(d, \vec{r}) = \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d/2)} |\vec{r}|^{d-2}.$$

Для контуру L у вигляді кола $L = \partial W = \{ \vec{r} : |\vec{r}| = R \}$ отримуємо, що

$$\oint_L \left(\vec{B}(\vec{r}), d\vec{l}_1 \right) = 2\pi R B(R).$$

Тоді

$$B(R) = \frac{\mu_0 2^{2-d}}{R \Gamma(d/2)} \int_0^R j(r) r^{d-1} dr.$$

У разі однорідного розподілу $j(\vec{r}) = j_0$ отримуємо

$$B(R) = j_0 \frac{\mu_0 2^{2-d}}{d \Gamma(d/2)} R^{d-1}.$$

Цікаво, що для розподілу із розмірністю $d = 1 + 0$ маємо $B(R) = \mathrm{const}$.

Отже, усі основні закони електродинаміки були записані для дробової безперервної моделі фрактального розподілу. Тепер у рамках цієї моделі можна записати систему рівнянь Максвелла в інтегральній формі.

2.10. Рівняння Максвелла для фрактальних розподілів

Як відомо, система рівнянь Максвелла — це система фундаментальних рівнянь, що описують електричні та магнітні поля. Для фрактального розподілу заряджених частинок $\mathbb{R}^3$ система рівнянь Максвелла в інтегральній формі з використанням наведених вище позначень має вигляд [4]:

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}_2 \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_W \rho dV_D,$$

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}_2 \right),$$

$$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}_2 \right) = 0,$$

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}_1 \right) = \mu_0 \int_S \left(\vec{j}, d\vec{S}_d \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{E}, d\vec{S}_2 \right).$$

Зауважимо, що ця система справедлива лише для фрактального розподілу заряджених частинок.

Розглянемо фрактальний розподіл зарядів і полів. Нехай є поля, які задані лише на фрактальній множині. Вважаємо, що напруженість електричного поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ та індукція магнітного поля $\vec{B}(\vec{r}, t)$ є визначеними тільки на фракталі і не існують поза фракталом, який перебуває в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$. Фрактальний розподіл, у якому електромагнітні поля визначені на фракталі, розглядається як апроксимація деякого реального випадку фрактального середовища. У цьому випадку система рівнянь Максвелла записується так [4]:

$$\oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}_d \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_W \rho dV_D,$$

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}_\gamma \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}_d \right),$$

$$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}_d \right) = 0,$$

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}_\gamma \right) = \mu_0 \int_S \left(\vec{j}, d\vec{S}_d \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{E}, d\vec{S}_d \right).$$

Ця система дробових інтегральних рівнянь Максвелла описує електромагнітні поля узагальненого фрактального розподілу зарядів і полів.

У рамках дробової безперервної моделі ми раніше отримали диференціальні рівняння, що відповідають дробовим інтегральним рівнянням Максвелла. Залишилося скористатися результатами та записати [4]:

$$\int_W c_3^{-1}(D,\vec{r}) \operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r}) \vec{E}(\vec{r},t) \right) dV_D =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_W \rho(\vec{r},t) dV_D,$$

$$\int_S c_2^{-1}(d,\vec{r}) \left(\operatorname{rot}\left(c_1(\gamma,\vec{r}) \vec{E}(\vec{r},t) \right), d\vec{S}_d \right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{B}(\vec{r},t), d\vec{S}_d \right),$$

$$\int_W c_3^{-1}(D,\vec{r}) \operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r}) \vec{B}(\vec{r},t) \right) dV_D = 0,$$

$$\int_S c_2^{-1}(d,\vec{r}) \left(\operatorname{rot}\left(c_1(\gamma,\vec{r}) \vec{B}(\vec{r},t) \right), d\vec{S}_d \right) =$$

$$= \mu_0 \int_S \left(\vec{j}(\vec{r},t), d\vec{S}_d \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{E}(\vec{r},t), d\vec{S}_d \right).$$

Звідси отримуємо

$$\operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r}) \vec{E}(\vec{r},t) \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} c_3(D,\vec{r}) \rho(\vec{r},t),$$

$$\operatorname{rot}\left(c_1(\gamma,\vec{r}) \vec{E}(\vec{r},t) \right) = -c_2(d,\vec{r}) \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\left(c_2(d,\vec{r}) \vec{B}(\vec{r},t) \right) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\left(c_1(\gamma,\vec{r}) \vec{B}(\vec{r},t) \right) =$$

$$= \mu_0 c_2(d,\vec{r}) \vec{j}(\vec{r},t) + \varepsilon_0 \mu_0 c_2(d,\vec{r}) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}.$$

Ця система рівнянь Максвелла описує електромагнітне поле фрактального розподілу частинок і полів у межах дробової безперервної моделі (див., наприклад, [4]). Легко помітити, що ці диференціальні рівняння не є дробовими.

Також слід зазначити, що третє рівняння системи можна переписати:

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) = -\left(\vec{B}(\vec{r},t), \operatorname{grad} c_2(d,\vec{r}) \right).$$

У випадку $d = 2$ $c_2(2,\vec{r}) = 1$, $\operatorname{grad} c_2(2,\vec{r}) = 0$. Однак у загальному випадку, коли $d \neq 2$, градієнт нулю не дорівнює, а тому й $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r},t) \neq 0$. Така ситуація може статися, якщо магнітне поле раптом виявиться несоленоїдальним і його силові лінії будуть незамкнутими, а отже, вони з чогось мають починатися і чимось закінчуватися. У нефрактальній фізиці так не буває взагалі, і на думку спадає лише непідтверджена гіпотеза про монополь Дірака. Швидше за все, саме тому магнітне поле узагальненого фрактального розподілу було запропоновано розглядати як деякий «дробовий магнітний монополь» (див., наприклад, [4]) $q_m \sim \left(\vec{B}(\vec{r},t), \operatorname{grad} c_2(d,\vec{r}) \right)$. Загалом питання трактування фізичного сенсу наведених результатів наразі залишається відкритим.

2.11. Дробові нелокальні рівняння Максвелла

Отже, наведені вище версії системи рівнянь Максвелла враховують фрактальність розподілу частинок і полів, але використовують при цьому звичайні (недробові) векторно-диференціальні та векторно-інтегральні оператори. Повернемося до можливості застосування розглянутих у підрозділі 1.4 дробових операторів. Як було зазначено вище, диференціальні оператори, які містять дробові похідні, на відміну класичного випадку, мають нелокальний характер. Це з тим, що дробова похідна (наприклад, Рімана–Ліувілля, Ліувілля, Рісса, Капуто) обчислюється не у нехтовно малому околі однієї точки, а одразу загалом на кінцевому інтервалі. Тому і рівняння Максвелла в диференціальній формі, записані за допомогою дробових диференціальних операторів, також виявляються нелокальними.

Система дробових нелокальних рівнянь Максвелла у диференціальній формі, запропонована у

2008 р. [26], має вигляд

$$\mathrm{div}_W^{\alpha_1}\vec{E}(t,\vec{r}) = g_1\rho(t,\vec{r}),,\ \mathrm{rot}_W^{\alpha_2}\vec{E}(t,\vec{r}) = -\partial_t\vec{B}(t,\vec{r}),$$

$$\mathrm{div}_W^{\alpha_3}\vec{B}(t,\vec{r}) = 0,$$

$$g_2\mathrm{rot}_W^{\alpha_4}\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{j}(t,\vec{r}) + g_3^{-1}\partial_t\vec{E}(t,\vec{r}),$$

де величини α_s, $s = 1,2,3,4$, можуть бути як цілими, так і дробовими; g_1, g_2, g_3 — сталі.

Відповідна система дробових нелокальних рівнянь Максвелла в інтегральній формі, що з'явилася у 2005 р. та була узагальнена у 2008 р. [26], з використанням розглянутих у підрозділі 1.4 векторно-інтегральних операторів записується так:

$$\left(\vec{I}_{\partial W}^{\alpha_1}, \vec{E}(t,\vec{r})\right) = g_1 I_W^{\alpha_1}\rho(t,\vec{r}),$$

$$\left(\vec{I}_{\partial S}^{\alpha_2}, \vec{E}(t,\vec{r})\right) = -\frac{d}{dt}\left(\vec{I}_S^{\alpha_2}, \vec{B}(t,\vec{r})\right),$$

$$\left(\vec{I}_{\partial W}^{\alpha_3}, \vec{B}(t,\vec{r})\right) = 0,$$

$$g_2\left(\vec{I}_{\partial S}^{\alpha_4}, \vec{B}(t,\vec{r})\right) =$$

$$= \left(\vec{I}_S^{\alpha_4}, \vec{j}(t,\vec{r})\right) + g_3^{-1}\frac{d}{dt}\left(\vec{I}_S^{\alpha_4}, \vec{E}(t,\vec{r})\right).$$

Важливо, що саме систему дробових нелокальних рівнянь Максвелла пропонують використовувати для опису поширення електромагнітних хвиль у середовищах, які мають нелокальні фрактальні властивості [4, 26].

Зауважимо, що для розгляду рівнянь Максвелла застосовують також складніші математичні інструменти з арсеналу теорії дробового зовнішнього числення (*англ.* fractional exterior calculus) або дробових диференціальних форм (*англ.* fractional differential forms), однак ці випадки виходять за межі нашого огляду. Тим, хто цікавиться даним питанням, можна порадити, зокрема, роботи [4, 9, 26].

2.12. Електромагнітні хвилі та фрактальний осцилятор

Добре відомо, що існує зв'язок між електромагнітними хвилями та класичною механікою. Він полягає в тому, що електромагнітні хвилі можна зобразити у вигляді суперпозиції нескінченної множини класичних гармонічних осциляторів. Дивно, але існує аналогічний зв'язок між електромагнітними хвилями та фрактальною механікою [29].

Порівняно нещодавно було встановлено, що у фрактальному середовищі можна виділити множину фрактальних осциляторів, властивості яких докладно розглядаються у роботі [30]. Тут під фрактальним середовищем ми розглядаємо таке середовище, в якому згасання електромагнітних хвиль описується степеневим законом [29]. Важливо, що подібне фрактальне середовище не є теоретичною абстракцією, а отримано на основі цілком реальних експериментальних даних. Із використанням зазначених фрактальних осциляторів може бути побудований ортонормований базис, за яким і розкладаються електромагнітні хвилі [29].

Розглянемо цей оригінальний результат докладніше. У роботі [31] для зазначеного вище фрактального середовища були записані такі дробові рівняння Максвелла (ще один різновид!):

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\mu}{t_0}\partial_{0\tau}^{\alpha}\vec{H},\ \ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{t_0}\partial_{0\tau}^{\alpha}\vec{E},$$

де $\partial_{0\tau}^{\alpha}$ — інтегро-диференціальний оператор Капуто, який задається співвідношенням

$$\partial_{0\tau}^{\alpha} f(\tau) = \mathrm{sign}^n(\tau - s) D_{s\tau}^{\alpha-n}\frac{\partial^n f(\tau)}{\partial\tau^n},$$

$D_{s\tau}^{\alpha}$ — інтегро-диференціальний оператор Рімана–Ліувілля

$$D_{s\tau}^{\alpha} f(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sign}(\tau - s)}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_s^{\tau}\frac{f(\tau')d\tau'}{|\tau - \tau'|^{\alpha+1}} \\ f(\tau) \\ \mathrm{sign}^n(\tau - s)\dfrac{\partial^n}{\partial\tau^n}D_{s\tau}^{\alpha-n} f(\tau) \end{cases};$$

ε і μ — безрозмірні діелектрична та магнітна проникності середовища; t_0 — безрозмірний характерний час. Для досить низьких частот, коли дисперсія в середовищі нехтовно мала, а діелектрична та магнітна проникності не змінюються в часі, а також слабкого поля, коли в середовищі не виникає нелінійних ефектів, напруженості електричного та магнітного полів можуть бути представлені у вигляді розкладань за стоячими хвилями. Відповідно до звичайної теорії вторинного квантування [32],

$$\vec{E} = \sum_{\gamma}\omega_{\gamma} q_{\gamma}(t)\vec{e}_{\gamma}(r),\ \ \vec{H} = \sum_{\gamma} p_{\gamma}(t)\vec{h}_{\gamma}(r),$$

де виконуються співвідношення

$$\int \vec{e}_{\gamma'}(r)\vec{e}_{\gamma}(r)\,d^3r = \delta_{\gamma'\gamma},\ \int \vec{h}_{\gamma'}(r)\vec{h}_{\gamma}(r)\,d^3r = \delta_{\gamma'\gamma},$$

$$\int \vec{e}_{\gamma'}(r)\vec{h}_{\gamma}(r)\,d^3r = 0,\ \vec{h}_{\gamma}(r) = \frac{1}{\omega_{\gamma}}\mathrm{rot}\,\vec{e}_{\gamma}(r).$$

Тоді при підстановці цих розкладань до дробових рівнянь Максвелла маємо рівняння руху [29]:

$$\partial^{\alpha}_{0\tau} p_{\gamma} = -\frac{t_0}{\mu}\omega^2_{\gamma} q_{\gamma},\ \partial^{\alpha}_{0\tau} q_{\gamma} = \frac{t_0}{\varepsilon} p_{\gamma}.$$

Оскільки в цьому випадку величини ε, μ і t_0 не мають якогось особливого значення, то вважають $\varepsilon = \mu = t_0 = 1$. У результаті отримуємо рівняння фрактального осцилятора [30]:

$$\partial^{\alpha}_{0\tau}\partial^{\alpha}_{0\tau} q_{\gamma} + \omega^2_{\gamma} q_{\gamma} = 0.$$

Саме за нескінченною множиною таких фрактальних осциляторів і виявляються розкладеними електромагнітні хвилі у фрактальному середовищі. Слід звернути увагу, що у рівнянні фрактального осцилятора дробовий порядок має похідна за часом. Фізичний сенс цього полягає в тому, що відбувається поглинання електромагнітного поля даним середовищем [29].

Висновки

Фрактальна електродинаміка багато в чому базується на використанні дробового числення. У рамках дробового числення використовуються дробові інтеграли (наприклад, Рімана–Ліувілля, Ліувілля та Рісса), дробові похідні (наприклад, Рімана–Ліувілля, Капуто, Ліувілля та Рісса), що дозволяє створювати дробові диференціальні, інтегральні, інтегро-диференціальні рівняння, розв'язувати задачі Коші, крайові задачі тощо.

Також у рамках дробового числення проведено узагальнення векторного числення, побудовано основні диференціальні та інтегральні операції, що узагальнені на випадок використання фрактальних розподілів.

Із використанням дробових безперервних моделей фрактальних розподілів узагальнено основні співвідношення електродинаміки, у результаті чого побудована фрактальна електродинаміка, тобто електродинаміка, здатна описувати фрактальні розподіли зарядів, струмів і полів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Фрактальная радиофизика. 1. Теоретические основы. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2020. Т. 25, № 1. С. 3—77. DOI: 10.15407/rpra25.01.003
2. Лазоренко О.В., Чорногор Л.Ф. Фрактальна радіофізика. 2. Фрактальний і мультифрактальний аналізи сигналів і процесів. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2023. Т. 28, № 1. С. 5—70. DOI: 10.15407/rpra28.01.005
3. Горобець Ю.І., Кучко А.М., Вавилова І.Б. *Фрактальна геометрія у природознавстві: Навчальний посібник*. Київ: Наукова думка, 2008. 232 с.
4. Tarasov V.E. *Fractional dynamics. Applications of fractal Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. New York: Springer, 2010. 504 p.
5. Hibschweiler R., and MacGregor T.H. *Fractional Cauchy Transforms*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006. 235 p.
6. Saichev A.I., and Woyczynski W.A. *Distributions in the Physical and Engineering Sciences: Distributional and Fractal Calculus, Integral Transforms and Wavelets*. Boston: Birkhäuser, 1997. 336 p.
7. Gil'mutdinov A.K., Ushakov P.A., El-Kharazi R. *Fractal Elements and their Applications*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ., 2017.
8. Nakayama T., and Yakubo K. *Fractal Concepts in Condensed Matter Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 203 p.
9. Tarasov V.E. Fractal electrodynamics via non-integer dimensional space approach. *Phys. Lett. A*. 2015. Vol. 36, Iss. 379. P. 2055—2061. DOI: 10.1016/j.physleta.2015.06.03
10. Ali I., Haq S., Aldosary S.F., Nisar K.S., Ahmad F. Numerical solution of one- and two-dimensional time-fractional Burgers equation via Lucas polynomials coupled with Finite difference method. *Alex. Eng. J.* 2022. Vol. 61, Iss. 8. P. 6077—6087. ISSN 1110-0168. DOI: 10.1016/j.aej.2021.11.032
11. Ali U., Ahmad H., Baili J., Botmart T., Aldahlan M.A. Exact analytical wave solutions for space-time variable-order fractional modified equal width equation. *Results Phys*. 2022. Vol. 33, id. 105216. ISSN 2211-3797. DOI: 10.1016/j.rinp.2022.105216
12. Leibniz G.W. Leibniz an de l'Hopital (Letter from Hannover, Germany, September 30, 1695) *Oeuvres Mathernatiques de Leibniz. Correspondence de Leibniz avec Hugens, van Zulichem et le Marquis de L'Hopital*. Paris: Libr. de A. Franck, ed. 1853. P. 1. Vol. 2. P. 297—302.
13. Euler L. De progressionibvs transcendentibvs, sev qvarvm termini generates algebraice dari neqvevn. *Comment. Acad. Sci. Imperialis petropolitanae*. 1738. T. 5. P. 38—57.
14. Laplace P.S. *Théorie analytique des probabilités*. Paris: Courcier, 1812.

15. Fourier J. *The Analytical Theory of Heat*. New York: Dover publ., 1955. 466 p. (First publ.: Théorie Analytique de la Chaleur, Par M. Fourier. A Paris: Chez firmin didot pere et fils, 1822).
16. Abel N.H. Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales defines. *Gesammelte mathematische werke.* Leipzig: Teubner, 1881. T. 1. P. 11—27. (First publ. in Mag. Naturvidenkaberne, Aurgang 1. Bd 2. Christiania 1823).
17. Liouville J. Mémoire sur quelques Quéstions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quéstions. *J. I'Ecole Roy. Polytechn*. 1832. T. 13, cah. 21. P. 1—69.
18. Riemann B. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. *Gesammelte Mathematische Werke.* Leipzig: Teubner, 1876. P. 331—344.
19. Holmgren Hj. Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som heist. *Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Handl. Stockholm*. 1865–1866. Bd. 5б, N. 11. S. 1—83.
20. Grünwald A.K. Uber «begrenete» Derivationen und deren Anwendung. *Zangew. Math, und Phys.* 1867. Bd. 12. S. 441—480.
21. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем. *Мат. сб.* 1868. Т. 3. С. 1—68.
22. Сонин Н.Я. Сообщение о дифференцировании с произвольным указателем. *Тр. 2-го съезда русских естествоиспытателей*. 1870. Т. 2. С. 18—21.
23. Hadamard J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *J. Math. Pures Appl.* 1892. T. 8. P. 101—186.
24. Hardy G.H., Riesz M. The general theory of Dirichlet's series. *Cambridge Univ. Press*. 1915. N 18. 78 p.
25. Weyl H. Bemerkungen zum begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*. 1917. Bd. 62, N 1—2. S. 296—302.
26. Tarasov V.E. Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations. *Ann. Phys*. 2008. Vol. 323, Iss. 11. P. 2756—2778. DOI: 10.1016/j.aop.2008.04.005
27. Liang Y. *Hausdorff Calculus. Applications to Fractal Systems.* Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2019. 150 p.
28. Sabban A. *Novel Wearable Antennas for Communication and Medical Systems.* Taylor & Francis Group, 2018. 443 p.
29. Alisultanov Z.Z., Agalarov A.M., Potapov A.A., Ragimkhanov G.B. Some Applications of Fractional Derivatives in Many-Particle Disordered Large Systems. In: Skiadas C.H., eds. *Fractional Dynamics, Anomalous Transport and Plasma Science*. Springer, 2018. P. 125—154.
30. Meilanov R.R., Yanpolov M. Y. Features of the phase trajectory of a fractal oscillator. *Tech. Phys. Lett*. 2001. Vol. 28, Iss. 1. P. 67—73.
31. Bogolyubov A.N., Potapov A.A., Rekhviashvili S.Sh. An Approach to Introducing Fractional Integro-Differentiation in Classical Electrodynamics. *Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2009. Vol. 64, Iss. 4. P. 365—368. DOI: 10.3103/S0027134909040031
32. Van Hieu N. *Fundamentals of the Method of Second Quantization*. Moscow: Energoatomizdat, 1984.

Стаття надійшла 12.09.2023

REFERENCES

1. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2020. Fractal Radio Physics. 1. Theoretical Bases. *Radio Phys. Radio Astron.*, **25**(1), pp. 3—7 (in Russian). DOI: 10.15407/rpra25.01.003
2. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2023. Fractal Radio Physics. 2. Fractal and Multifractal Analyses of Signals and Processes. *Radio Phys. Radio Astron.,* **28**(1), pp. 5—70 (in Ukrainian). DOI: 10.15407/rpra28.01.005
3. Gorobets, Yu.I., Kuchko, A.M., and Vavilova, I.B., 2008. *Fractal Geometry in Natural Science*. Textbook. Kyiv, Ukraine: Naukova Dumka Publ. (in Ukrainian).
4. Tarasov, V.E., 2011. *Fractional Dynamics. Applications of Fractal Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. New York, USA: Springer.
5. Hibschweiler, R., and Macgregor, T.H., 2006. *Fractional Cauchy Transforms*. Boca Raton: Chapman &Hall/CRC.
6. Saichev, A.I., and WoyczynskI, W.A., 1997. *Distributions in the Physical and Engineering Sciences: Distributional and Fractal Calculus, Integral Transforms and Wavelets*. Boston: Birkhäuser.
7. Gil'mutdinov, A.K., Ushakov, P.A., and El-Kharazi, R., 2017. *Fractal Elements and their Applications*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ.
8. Nakayama, T., and Yakubo, K., 2010. *Fractal Concepts in Condensed Matter Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
9. Tarasov, V.E., 2015. Fractal electrodynamics via non-integer dimensional space approach. *Phys. Lett. A*, **36**(379), pp. 2055—2061. DOI: 10.1016/j.physleta.2015.06.03
10. Ali, I., Haq, S., Aldosary, S.F., Nisar, K.S., and Ahmad, F., 2022. Numerical solution of one- and two-dimensional time-fractional Burgers equation via Lucas polynomials coupled with Finite difference method. *Alex. Eng. J.,* **61**(8), pp. 6077—6087. ISSN 1110-0168. DOI: 10.1016/j.aej.2021.11.032
11. Ali, U., Ahmad, H., Baili, J., Botmart, T., and Aldahlan, M.A., 2022. Exact analytical wave solutions for space-time variable-order fractional modified equal width equation. *Results Phys.*, **33**, id. 105216. ISSN 2211-3797. DOI: 10.1016/j.rinp.2022.105216
12. Leibniz, G.W., 1853. Leibniz an de l'Hopital (Letter from Hannover, Germany, September 30, 1695) *Oeuvres Mathérnatiques de Leibniz. Correspondence de Leibniz avec Huygens, van Zulichem et le Marquis de L'Hopital*. Paris: Libr. de A. Franck, ed., p. 1, vol. 2, pp. 297—302.
13. Euler, L., 1738. De progressionibvs transcendentibvs, sev qvarvm termini generates algebraice dari neqvevn. *Comment. Acad. Sci. Imperialis petropolitanae*, 5, pp. 38—57.
14. Laplace, P.S., 1812. *Théorie analytique des probabilités*. Paris: Courcier.

15. Fourier, J., 1955. *The Analytical Theory of Heat*. New York: Dover publ. First publ.: (Théorie Analytique de la Chaleur, Par M. Fourier. A Paris: Chez firmin didot pere et fils, 1822).
16. Abel, N.H., 1881. Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales defines. *Gesammelte mathematische werke.* Leipzig: Teubner, **1**, pp. 11—27. (First publ. in Mag. Naturvidenkaberne, Aurgang 1. Bd 2. Christiania 1823).
17. Liouville, J., 1832. Mémoire sur quelques Quéstions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quéstions. *J. I'Ecole Roy. Polytechn.*, **13**(21), pp. 1—69.
18. Riemann, B., 1876. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. *Gesammelte Mathematische Werke.* Leipzig: Teubner, pp. 331—344.
19. Holmgren, Hj., 1865—1866. Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som heist. *Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Handl. Stockholm.*, **5**(11), SS. 1–83.
20. Grünwald, A.K., 1867. Uber «begrenete» Derivationen und deren Anwendung. *Zangew. Math, und Phys.,* **12**, SS. 441—480.
21. Letnikov, A.V., 1868. Theory of differentiation with an arbitrary pointer. *Math. sb.,* **3**, pp. 1—68 (in Russian).
22. Sonin, N.Ya., 1870. Message about differentiation with an arbitrary pointer. *Tr. 2-th s'jezda russkikh estestvoispytateley,* **2**, pp. 18—21 (in Russian).
23. Hadamard, J., 1892. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *J. Math, Pures Appl.*, **8**, pp. 101—186.
24. Hardy, G.H., and Riesz, M., 1915. The general theory of Dirichlet's series. *Cambridge Univ. Press.*, 18, 78 p.
25. Weyl, H., 1917. Bemerkungen zum begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, **62**(1—2), SS. 296—302.
26. Tarasov, V.E., 2008. Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations. *Ann. Phys.*, **323**(11), pp. 2756—2778. DOI: 10.1016/j.aop.2008.04.005
27. Liang, Y., 2019. *Hausdorff Calculus. Applications to Fractal Systems.* Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH.
28. Sabban, A., 2018. *Novel Wearable Antennas for Communication and Medical Systems.* Taylor & Francis Group.
29. Alisultanov, Z.Z., Agalarov, A.M., Potapov, A.A., and Ragimkhanov, G.B., 2018. Some Applications of Fractional Derivatives in Many-Particle Disordered Large Systems. In: Skiadas, C.H., eds., 2018. *Fractional Dynamics, Anomalous Transport and Plasma Science*. Springer, pp. 125—154.
30. Meilanov, R.R., and Yanpolov, M.Y., 2001. Features of the phase trajectory of a fractal oscillator. *Tech. Phys. Lett.*, **28**(1), pp. 67—73.
31. Bogolyubov, A.N., Potapov, A.A., and Rekhviashvili, S.Sh., 2009. Introduction of fractional integro-differentiation in classical electrodynamics. *Mosc. Univ. Phys. Bull.*, **64**(4), pp. 365—368. DOI: 10.3103/S0027134909040031
32. Van Hieu, N., 1984. *Fundamentals of the Method of Second Quantization*. Moscow: Energoatomizdat.

Received 12.09.2023

O.V. Lazorenko, and L.F. Chernogor

V.N. Karazin National University of Kharkiv
4, Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

FRACTAL RADIOPHYSICS.
Part 3. FRACTIONAL CALCULUS IN ELECTRODYNAMICS

Subject and Purpose. At the beginning of the 21st century, a fundamentally new scientific direction was formed, currently known as fractal radiophysics. The present work is an overview of the principal theoretical and practical ideas concerning "fractalization" in radio physics. The purpose is a systematic presentation of the main practical results suitable for application of the fractional calculus in modern theoretical radiophysics.

Methods and Methodology. The basic theoretical principles of fractional calculus are outlined in a structured form. Results of applying fractional calculus methods in electrodynamics are systematized. Essential features, advantages and disadvantages of the technique are demonstrated and the problems still remaining discussed.

Results. The basics of fractional (or fractal) calculus have been considered with emphasis on practical application to problems of radiophysics. A variety of approaches to constructing fractional integrals and Riemann–Liouville, etc. fractional derivatives have been presented. Using the Newton-Leibniz formula and fundamental theorems of fractional calculus, principles of generalization of the classic vector calculus to fractal problems have been discussed, suggesting the examples of fractional vector-differential and vector-integral operators, Green's and Stokes' fractional formulas, etc. With the use of Gauss's fractional formula the basics of fractal electrodynamics are expounded. Some different types of fractal Maxwellian equations has been induced and analyzed. Also, the main approaches to solving radio wave propagation problems in fractal media are discussed.

Conclusions. As a practical example of applying fractals in modern theoretical radiophysics, results have been presented of the use of fractional calculus in electrodynamics. These results signify appearance of a fundamentally new direction in radiophysics, namely fractal electrodynamics.

Keywords: *fractal, fractional calculus, fractal electrodynamics, fractal medium, fractal electronics, fractal process, fractal characteristics.*