

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra29.03.180>

УДК 621.372(075.8)

PACS: 41.20.Jb, 05.45.Df, 94.20.Bb

О.В. Лазоренко, Л.Ф. Черногор

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, м. Харків, 61077, Україна

E-mail: Oleg.V.Lazorenko@karazin.ua; Leonid.F.Chernogor@gmail.com

ФРАКТАЛЬНА РАДІОФІЗИКА.

Частина 4. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

Предмет і мета роботи. На початку XXI століття сформувався принципово новий науковий напрямок — фрактальна радіофізика. Предметом цього огляду є основні втілені на практиці ідеї «фракталізації» у радіофізиці. Мета роботи — систематизований виклад основних результатів практичного застосування теорії фракталів у радіофізиці, а також докладний розбір оригінальності, новизни та практичної цінності отриманих результатів.

Методи та методологія. Наведено результати використання фрактального підходу в різних областях сучасної радіофізики. Розглядаються результати застосування методів фрактального та мультифрактального аналізу щодо різних радіофізичних об'єктів, явищ і процесів. Висвітлено основні особливості, переваги та недоліки такого підходу, а також наявні проблеми.

Результати. Розглянуто основні практичні результати застосування фрактального підходу в радіофізиці. Обговорено основні особливості розв'язання задачі про поширення радіохвиль у фрактальних середовищах. Використання фракталів у прикладній електродинаміці продемонстровано на прикладі фрактальних антен, резонаторів, фільтрів, конденсаторів, транзисторів, дуплексерів, частотно-селективних поверхонь та метаматеріалів. Про фрактали в напівпровідниковій і вакуумній електроніці повідомлено на прикладі фрактальних структур катодної плями та самих катодів, а також фрактальних електродів. Розглянуто особливості застосування фрактальних ідей у статистичній і нелінійній радіофізиці. Для ілюстрації «фракталізації» фізики та радіофізики геокосмосу використано фрактальні процеси, що виникають при землетрусах, в атмосфері, іоносфері та магнітосфері.

Висновки. Проаналізовано основні напрями практичного застосування теорії фракталів у сучасній радіофізиці, а також обговорено особливості отриманих нових результатів, що відображають одну з основних властивостей навколишнього світу — його фрактальність.

Ключові слова: фрактал, фрактальна електродинаміка, фрактальне середовище, фрактальна електроніка, фрактальний процес, фрактальні характеристики.

Вступ

Ця стаття є четвертою, завершальною частиною огляду з фрактальної радіофізики [1–3]. У ній йдеться про те, що на сьогодні вже реально зроб-

лено у галузі фрактальної радіофізики. Метою роботи є викладення основних практичних результатів використання ідеї фракталів у сучасній радіофізиці.

Цитування: Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Фрактальна радіофізика. Частина 4. Практичне застосування. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2024. Т. 29, № 3. С. 180–205. <https://doi.org/10.15407/rpra29.03.180>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024



Ця стаття відкритої доступу за ліцензією CC BY-NC-ND 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.uk>)

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- зібрати, класифікувати та проаналізувати основні практичні результати, отримані в радіофізиці із застосуванням теорії фракталів, методів фрактального та мультифрактального аналізів тощо;

- у кожному розглянутому випадку спробувати сформулювати, які саме переваги дало (або не дало) використання фрактального підходу.

Структура роботи відповідає різноманіттю наявних наукових напрямів у сучасній радіофізиці. Але через вкрай малий дозволений обсяг ми змушені обмежитися як їх досить вузьким колом, так і лише точковими посиланнями на літературні джерела. Тому поза увагою залишилися такі «прикордонні» з радіофізикою напрямки, як, наприклад, радіолокація, радіонавігація, телекомунікації та зв'язок тощо. І тим не менш, сподіваємося, що наведена тут інформація буде цікавою та корисною.

«Фракталізація» радіофізики відбулася завдяки багатьом фахівцям. Такими вченими, у першу чергу, є К. Акі, В. Алімов, М. Беррі, В. Болотов, Р. Бурлага, Д. Вернер, Ю. Горобець, К. Гупта, Д. Джаггард, Е. Джейкмен, А. Ді Ієва, В. Дімірі, Ю. Кім, Л. Клейн, Н. Коен, С. Куадфеул, Дж. Леві-Вехел, Б. Мандельброт, Р. Міттра, Р. Пащенко, А. Потапов, К. Пуенте, Б. Росс, Х. Сан, Х. Такаядзу, В. Тарасов, Л. Телеска, Ю. Ткач, К. Трико, Д. Туркотт, Г. Уорнелл, А. Хаджимірі та багато інших.

Процес «фракталізації» можна умовно поділити на три етапи. Перший (початковий) етап був пов'язаний із теоретичним виявленням та експериментальною перевіркою фрактальності різних природних і штучних об'єктів, а також створенням адекватних методів опису їх фрактальних властивостей. На другому етапі проводилося вдосконалення зазначених методів (наприклад, фрактального аналізу сигналів, процесів і зображень, фрактальних методів виявлення, розпізнавання, підвищення контрастності, тобто фрактальної узагальненої фільтрації) з подальшим виділенням нових наукових напрямів у радіофізиці як таких. Третій етап, який почався приблизно в 2005 р. і триває дотепер, передбачає розроблення реальної фрактальної елементної бази, фрактальних вузлів, а також цілих фрактальних радіосистем і пристроїв. Приблизно за таким

самим сценарієм («відшукати фрактальність — описати фрактальність — отримати користь від фрактальності») відбувається «фракталізація» й інших галузей науки та техніки (див., наприклад, [4–11]). Принаймні наявність такої загальної тенденції, як нам здається, є достатнім аргументом для скептиків, які й у наші дні сумніваються у доцільності використання фрактальних ідей у науці взагалі й у радіофізиці зокрема. Якщо після публікації цього огляду кількість таких людей хоч трохи зменшиться, то автори матимуть підстави вважати своє завдання виконаним.

1. Фрактали в теоретичній радіофізиці

У теоретичній радіофізиці, крім використання дробового числення, розглянутого у третій частині огляду [3], існують інші важливі та цікаві напрямки застосування фрактального підходу.

Розв'язання практичних задач радіофізики, — наприклад, розроблення антен та антенних решіток з фрактальною геометрією апертури, фрактальних фільтрів і резонаторів, — супроводжується необхідністю розгляду низки важливих теоретичних проблем, якими традиційно займається електродинаміка. Зокрема, ці проблеми пов'язані з дослідженнями відбиття та розсіяння електромагнітних хвиль фрактальними поверхнями, випромінювання таких хвиль фрактальними поверхнями, їх поширення у фрактальних середовищах, дифракції на різних фрактальних структурах тощо [12, 13]. Іншими словами, йдеться про новий науковий напрямок у радіофізиці — фрактальну електродинаміку.

Термін «фрактальна електродинаміка» був уведений Д.Л. Джаггардом (D.L. Jaggard) у 1990 р. [13]. Натомість перші роботи в цьому напрямку з'явилися ще на межі 1970–1980-х рр. Особливо слід відзначити роботу М.В. Беррі (M.V. Berry) [14], у якій було сформульовано концепцію диффрактала. Диффрактал — це електромагнітна хвиля, розсіяна фрактальним об'єктом. Установлено, що при відбитті та розсіянні електромагнітних хвиль фрактальними поверхнями поле в зоні Фраунгофера виявляється самоподібним. Фрактальні властивості самої поверхні певним чином передаються електромагнітній хвилі, параметри або характеристики хвилі стають фрактальними [12], тобто хвиля виявляється

диффрактом. Дуже важливо, що інформацію про фрактальні властивості об'єкта можна отримати за характеристиками такої хвилі [13].

Поширення електромагнітних хвиль у фрактальних середовищах почали досліджувати ще у «дофрактальну» епоху. Деякі фахівці вважають, що відлік слід вести від початку 1960-х рр., коли з'явилися піонерські роботи [15, 16] з поширення хвиль у турбулентній атмосфері. Сама ж заснована на них модель турбулентності з дробовим показником степеня була запропонована А.М. Колмогоровим ще у 1941 р. [17]. Більше того, виявляється, що той самий Л.Ф. Річардсон, робота якого про обчислення довжини берегової лінії Великої Британії свого часу так надихнула Б. Мандельброта [1], ще в 1926 р. пропонував використовувати функцію Вейерштрасса для моделювання деяких аспектів турбулентності.

Наступним етапом дослідження поширення електромагнітних хвиль у середовищах із фрактальними властивостями стало розв'язання задач дифракції хвиль на одному та кількох фрактальних фазових екранах [13]. На межі 1980—1990-х рр. були успішно розв'язані перші задачі про розсіяння та відбиття електромагнітних хвиль від фрактальних поверхонь (див., наприклад, [13]). До їх числа належить, зокрема, задача про розсіяння на фрактальній гофрованій циліндричній поверхні, у вигляді якої можуть бути представлені, наприклад, фрактальні волокна або синтетичні поверхні [18]. Загальні підходи до розв'язання таких задач викладено у монографії [12], а численні приклади моделювання розсіяння електромагнітних хвиль на фрактальних поверхнях можна знайти у [19]. Дослідження процесів відбиття, розсіяння, дифракції електромагнітних хвиль на фрактальних об'єктах, а також особливостей їх поширення у фрактальних середовищах продовжуються і з часом набувають все більшої актуальності.

2. Фрактали у прикладній електродинаміці

2.1. Фрактальні антени

Одним із напрямів застосування фракталів у прикладній електродинаміці, які найбільш активно розвиваються, є створення фрактальних антен. Більше того, деякі відомі фахівці говорять

навіть про новий напрямок в інженерії — інженерію фрактальних антен [20]. На сьогодні прийнято виділяти два основні напрямки у використанні фракталів — конструювання фрактальних антенних елементів та створення фрактальних антенних решіток [13, 20]. З 1993 р. під фрактальними антенними елементами мають на увазі фрактальні випромінювачі та власне антени з фрактальною геометрією. У фрактальних антенних решітках фрактальним є просторове розташування елементів, хоча самі антенні елементи є нефрактальними [20].

Розглянемо коротку історію появи та розвитку фрактальних антен [13, 20, 21]. У 1986 р. Д.Л. Джаггард уперше запропонував застосовувати теорію фракталів для створення антен. Однак слід зауважити, що окремі фрактальні структури застосовувалися і раніше. Так, формально до фрактальних належать спіральні та логоперіодичні антени. Інше питання, що така геометрія при їх створенні обиралася задля мініатюризації або забезпечення ширококутовості антен, а про фрактальність взагалі нічого не говорилося. Більше того, деякі самоподібні структури використовувалися для створення антенних решіток ще в середині 1960-х рр., а перша логоперіодична антена була розроблена взагалі в середині 1950-х рр. Цікаво, що сам Д.Л. Джаггард прямо вказує, що ідея використання у якості елементів антенної решітки інших антенних решіток вперше була висловлена ще в 1943 р. [13].

У 1990-ті рр. з'явився цілий клас фрактальних антенних решіток, в яких застосовано різну кількість ітерацій «класичних» фрактальних множин (кривої та сніжинки Коха, острова Мінковського, множини Мандельброта, дерева Келі, серветки та килима Серпінського тощо) [13, 20, 21]. Часто для конструювання таких антен застосовують технологію на основі запропонованих М. Барнслі систем ітерованих функцій [1]. Практично паралельно відбувався розвиток фрактальних антенних елементів. «Фракталізації», як правило, піддавалися рамкові, монопольні та дипольні антени [20].

У середині 1990-х рр. науковою групою К. Пуенте (С. Puente) були створені фрактальні мультисмугові монопольні антени, зокрема, монополь Серпінського та фрактальна деревоподібна антена [12, 22, 23]. Зазначимо, що одним з ефек-

тивних методів зміни числових характеристик фрактальних антен стало їх масштабне розтягання або стискання. Приблизно в той самий час інша наукова група на чолі з Н. Коеном (N. Cohen) створила цілий набір мініатюрних дипольних і рамкових фрактальних антен, геометрія яких оптимізувалася за допомогою спеціально створеного генетичного алгоритму [21, 24]. Саме Н. Коена часто вважають творцем першої фрактальної антени, посилаючись на роботу [21], яка вийшла друком у 1995 р. Цікаво, що сам Н. Коен у монографії [10] як рік народження фрактальних антен вказує 1988 р.

На думку автора огляду [25], перша фрактальна надширокосмугова (ФНШС) антена була створена у 2005 р. Тим часом, існує думка, що розглянуті вище антени Пуенте теж є ФНШС антенами. З огляду на це роком народження ФНШС антен можна вважати 1996 р., коли було опубліковано роботу [22]. До того ж і група Коена також створила свою версію ФНШС антени раніше 2005 р.

Часто до фрактальних антен відносять також багатокільцеві антени (див., наприклад, [26]), перша з яких була запропонована у 2000 р.

Усі розглянуті вище фрактальні антени й антенні решітки поєднувало те, що вони були планарними, тобто їх геометричний розмір в одному з напрямків був набагато меншим за розміри у двох інших напрямках. У 1998 р. з'явилася концепція фрактальних об'ємних антен [27]. Сенс цієї концепції — у певному збільшенні розмірів уздовж напрямку, що раніше вважався нехтовно малим. Прикладами таких антен є заснована на килимі Серпінського мікросмужкова антена, багат шаровий фрактальний монопол, в якому застосовано комбінації квадратного та ромбоподібного килимів Серпінського, а також багат шарова мікросмужкова монополна антена Серпінського. Згодом для фрактальних об'ємних антен була запропонована ідея використовувати паразитні ефекти, що виникають при побудові багат шарової структури, для збільшення широкосмугової подібної антени в порівнянні з аналогічними характеристиками антени, виконаної у вигляді одного-єдиного елемента такої структури [20].

Починаючи з кінця 1990-х рр. спостерігається лавиноподібне зростання кількості робіт, в яких повідомляється про створення нових фракталь-

них антен різного виду та призначення (див., наприклад, [13, 20, 25, 26]). Зокрема, при створенні фрактальних антенних елементів і фрактальних антенних решіток стали застосовуватися не тільки детерміновані, але і стохастичні фрактали, що суттєво збільшило різноманітність новостворених антен і антенних решіток, а також сприяло вдосконаленню методів їх опису [12, 20]. Варіанти сучасних класифікацій фрактальних антен добре описані, наприклад, в оглядовій роботі [28].

Цікавим є факт, що американці М. Бланк (M. Blank) і Р. Гудмен (R. Goodmen) у 2010-ті рр. встановили, що як фрактальну антену в широкому діапазоні частот (від вкрай низьких частот до радіохвиль) можна використовувати молекулу ДНК [29].

Основними перевагами існуючих фрактальних антен є компактність, низькопрофільність, конформність, мультисмуговість чи широкосмуговість (або навіть надширокосмуговість), оптимізована напруженість поля, співвідношення «ціна/ефективність» [20, 29]. Зазначимо, що незважаючи на ретельні пошуки, нам не вдалося з'ясувати, чи досліджувалися «фрактальні антени в квадраті», тобто фрактальні антенні решітки, елементи яких теж є фрактальними.

Необхідно також зазначити, що якщо спочатку проводилися дослідження властивостей антен, розташованих у вільному просторі, то вже приблизно у 2000-х рр. з'явився інтерес до вивчення властивостей антен, які перебувають в оточенні складних систем провідників і діелектриків, зокрема, антен у хвилеводах (див., наприклад, [8]).

На жаль, «фракталізація» антен не є панацеєю від усіх наявних проблем. Так, подальша мініатюризація антен з використанням фракталів наштовкується на низку обмежень [30]. Показано, що бажане збільшення кількості ітерацій при створенні геометрії антен призводить до зменшення резонансної частоти, ефективності випромінювання та збільшення добротності. Топологія антени сильніше, ніж фрактальна розмірність, впливає на параметри малих двовимірних фрактальних монополів, зокрема, на втрати. Зі зростанням кількості циклів у середині структури ефективність і показник широкосмуговості, скоріш за все, збільшуються зі зростанням порядку фізичного фрактала. За відсутності циклів при кожній ітерації збільшується довжина

та вигин дротів і, як наслідок, зростають омичні втрати і збільшується кількість енергії, накопиченої в навколишньому просторі. Останнє означає нижчу ефективність випромінювання та більш високу добротність, а отже, нижчий показник широкосмуговості. Коли кількість ітерацій перевищує певний поріг, відбуваються суттєві зміни діаграми направленості та опір випромінювання антени наближається до нуля. Іншими словами, якщо кількість ітерацій перевищує 4–6, то ніяких практично цінних покращень параметрів антен не спостерігається.

На цей час галузями застосування фрактальних антен є сучасні телекомунікації, шумова радіолокація, нелінійна радіолокація, антирадары, системи пошуку, локалізації та трасування мобільних об'єктів, пеленгація у складних міських умовах, визначення місця розташування несанкціонованих джерел радіовипромінювання при боротьбі з терористами, оперативний зв'язок у військах, космічний зв'язок, сучасний фізичний експеримент тощо [31]. Добре ілюстровані приклади й аналіз поточного стану справ щодо практичного застосування реально існуючих фрактальних (у тому числі і ФНШС) антенних елементів та антенних решіток можна знайти у монографії [31] та огляді [25].

2.2. Фрактальні резонатори та фільтри

Паралельно зі створенням перших фрактальних антен у 1988 р. з'явилися перші фрактальні резонатори [10]. Найчастіше вони є мініатюрними планарними резонаторами, для побудови яких використовується фрактальний ітераційний процес. Порівняно з іншими видами резонаторів, застосування фрактальних резонаторів сприяє зменшенню розмірів фільтрів, що їх використовують, про що вже було сказано вище. Установлено, що чим більша кількість фрактальних ітерацій виконується в процесі виготовлення резонатора, тим меншою є резонансна частота. Більше того, найбільш суттєве зменшення резонансної частоти спостерігається на перших двох ітераціях.

Разом із удосконаленням фрактальних резонаторів розвивалися й методи їхнього опису (див., наприклад, [32]). Резонатори, в основі яких лежить так званий острів Мінковського, належать

до класу резонаторів Мінковського, а резонатори, основною спільною ознакою яких є використання кривої Гільберта, входять до класу резонаторів Гільберта.

Після появи планарних фрактальних резонаторів порівняно недавно з'явилися і 3D фрактальні резонатори. Можливість створення таких фрактальних резонаторів була передбачена у 2002 р., а повідомлення про перше реальне втілення з'явилось за два роки по тому [33]. На відміну від планарних (2D) резонаторів, де застосовується плоска фрактальна крива, при створенні 3D резонатора використовується фрактальна крива у просторі. У результаті він являє собою «товсту» (багатоплощину) плівку з великої кількості мікросмужок, яка містить обрану просторову фрактальну криву [34]. Як такі криві виступають, зокрема, 3D меандр, 3D крива Гільберта і 3D спіраль. Наявний досвід застосування фрактальних резонансних структур, у свою чергу, призвів до створення у 2010-х рр. фрактальних резонаторів у НВЧ-діапазоні, зокрема, нових типів двозазорних резонаторів із квазіфрактальними елементами, які можуть бути використані у конструкції багатопроменевих клістронів і клістродів. Основними перевагами фрактальних резонаторів є їхні малі розміри та широкосмуговість [10].

Використання фракталів при створенні фільтрів у радіо- та мікрохвильовому діапазонах розпочалося наприкінці 1990-х рр. (див., наприклад, [12]). Застосування технології фрактальних ітерацій дозволяє успішно розв'язувати, у першу чергу, задачі мініатюризації планарних фільтрів при одночасному поліпшенні й інших характеристик, зокрема, ширини смуги пропускання. Найчастіше фрактальні фільтри будуються на основі фрактальних резонаторів [35]. Наприклад, створено багатомодовий квазіфрактальний мікросмужковий резонатор (модифікація кривої Гільберта) та смугові фільтри на його основі. Для досліджуваної системи характерна наявність двох смуг із центральними частотами 2.43 і 3.47 ГГц за втрат 0.38 і 2.53 дБ відповідно. Результати експериментів із виготовленими фільтрами добре узгоджуються з результатами відповідного числового моделювання [35].

Задля уникнення термінологічної плутанини зауважимо, що під «фрактальними фільтрами» у літературі також часто мають на увазі фільтри

на основі фрактальних множин, які використовуються для фрактальної обробки зображень на основі вейвлет-аналізу [36].

2.3. Фрактальні електронні пристрої

Ще одним цікавим напрямом використання фрактальних ідей у прикладній електродинаміці є створення фрактальних конденсаторів. Зауважимо, що тут не йдеться про конденсатори, поведінка яких в електричному колі описується дробовими інтегро-диференціальними операторами [3]. Тут фрактальність представлена в сенсі геометрії самого конденсатора.

Добре відомо, що ємність конденсатора пропорційна площі (або площам) поверхні обкладок. Водночас, як було показано у першій частині нашого огляду [1], для математичних фракталів із розмірністю D , що лежить у діапазоні $2 < D < 3$, площа поверхні S виявляється нескінченною. Для аналогічних фізичних фракталів величина S хоча і не є нескінченною, але все ж таки істотно перевершує площі поверхонь для схожих гладких структур. У результаті виникає можливість створення фрактальних конденсаторів, що мають дуже велику (порівняно з нефрактальними аналогами таких самих розмірів) електроємність. За даними Н. Коена, який є одним із засновників фрактальної електроніки, перший фрактальний конденсатор з'явився у 1998 р. [10]. Він був реалізований при розробці мініатюрних конденсаторів із великою ємністю, інтегрованих у саму плату, науковою групою А. Хаджимірі (А. Hajimiri) [37]. Додатковим «бонусом» використання таких конденсаторів є зменшення паразитної ємності, яка виникає на цій платі.

Однак ідея фрактального конденсатора може використовуватися не тільки в мікроелектроніці. У 2003 р. наукова група під керівництвом швейцарця Р. Кьотца (R. Koetz) вперше реалізувала на практиці цю ідею для конденсатора макроскопічних розмірів, досягнувши збільшення площі поверхні обкладок у 60 000 разів [38]. Конденсатори, виготовлені за даною технологією (так звані «суперконденсатори»), використовуються для створення систем накопичення енергії для деяких електромобілів [38]. Ще одним цікавим напрямком використання фрактальних конденсаторів є вбудовані датчики дощу [39].

У 1998 р. був розроблений, а в 2001 р. запатентований С. Деніелом (S. Daniel) перший фрактальний транзистор. Цей напівпровідниковий прилад дозволив суттєво збільшити потужність порівняно з його нефрактальними аналогами [10].

У 2009 р. з'явилася інформація про створення першого фрактального диплексера [40]. Основною його перевагою перед нефрактальним аналогом є ефективність і надширококутовість [10].

2.4. Фрактальні частотно-селективні поверхні та метаматеріали

У 1991 р. Е.А. Паркер (E.A. Parker) і А. Ель-Шейх (A. El Sheikh) висунули ідею про використання фракталів для створення частотно-селективних поверхонь (ЧСП) [41]. Сенс запропонованої ідеї полягає у використанні властивостей деяких фрактальних кривих, які можуть досить щільно заповнювати собою деяку обмежену область площини. Зазвичай застосовують острів Мінковського та криву Гільберта. Їхнє використання допомагає зменшити геометричні розміри поодиноких елементів, з яких будуються ЧСП [20]. Інша цікава ідея щодо створення мультисмутових ЧСП на основі застосування фрактальних дерев була запропонована у 1999 р. науковою групою Д.Х. Вернера (D.H. Werner) [42].

Новим напрямом, близьким до ЧСП, є створення фрактальних структур, які не пропускають електромагнітні хвилі в певному діапазоні [10]. Ця ідея була запропонована у 2004 р., а прикладом її вдалої реалізації є створення у 2008 р. та патентування у 2012 р. Н. Коеном системи електромагнітного маскування. Цікаво, що результат дії такого «плаща-невидимки» назвали «ефектом Гаррі Поттера».

Досить близько до теми ЧСП підходить концепція метаматеріалу (див., наприклад, [43]). Метаматеріали — це штучні композиційні матеріали, що мають корисні властивості, недоступні в природі. Найбільш відомою властивістю метаматеріалів є негативне заломлення. Негативна рефракція пов'язана з одночасними від'ємними ефективними значеннями діелектричної та магнітної проникностей, що може призвести до таких екстраординарних ефектів, як обернена рефракція Снелліуса, субхвильова візуалізація, обернений ефект Доплера тощо. Метаматеріали

з від'ємним показником заломлення, які також називають лівосторонніми матеріалами, були теоретично запропоновані В. Веселаго (V. Veselago) наприкінці 1960-х рр. і вперше реалізовані на практиці Дж. Пендрі (J. Pendry) у 1990-ті рр. Термін «метаматеріал» виник тому, що трійка векторів \vec{E} , \vec{H} і \vec{k} у матеріалі з додатним показником заломлення є правосторонньою, а з від'ємним — лівосторонньою. Цікаво, що пластина з показником заломлення $n = -1$ відновлює не тільки фази хвиль, що пройшли, а й амплітуди загасаючих хвиль, що відповідають за субхвильову візуалізацію. На практиці це можна використовувати, зокрема, для зменшення видимості об'єктів, покритих шаром метаматеріалу, у тих чи інших діапазонах електромагнітних хвиль. Зв'язок метаматеріалів із фракталами полягає в тому, що деякі штучні структури, які мають фрактальні властивості, поведуться як метаматеріали. Наприклад, такою є структура з магнітодіелектричних сфер, розташування яких засноване на послідовності чисел Фібоначчі [44]. Слід зазначити, що подібні унікальні ідеї висловлювалися у 1960-ті рр. видатним харківським радіофізиком М.А. Хижняком [45]. Частина їх згодом була успішно реалізована його учнями [44].

2.5. Фрактальна надширокосмугова комунікаційна система

У 2000-ті рр. групою харківських науковців під керівництвом професорів В.Н. Болотова та Ю.В. Ткача була спочатку теоретично обґрунтована [46], а потім створена на практиці фрактальна надширокосмугова комунікаційна система [87]. Як носій інформації у ній використовуються ФНШС сигнали типу «фрактальний вейвлет». Наявність цього сигналу на заданому місці в інформаційній послідовності означає логічну одиницю, його відсутність — нуль. Фрактальними в цій системі також є передавач, приймач, антена та високочастотний фільтр. Вона забезпечує завадостійку, двоканальну, бездротову передачу інформації зі швидкістю 0.92 Мбіт/с на відстань до 150 м.

2.6. Інші застосування

Найрізноманітніші структури, що мають фрактальні властивості, також успішно застосову-

ються в фундаментальних дослідженнях. Розглянемо деякі приклади такого застосування.

Система для передачі електромагнітних хвиль. У роботі [48] з використання тонкої металевої плівки з фрактальними елементами та структурою килима Серпінського, виготовленої на кремнієвій пластині методом техніки мікрообробки, виявлено надсильне пропускання електромагнітних хвиль на певних частотах. Це явище пояснюється ефектом поверхневого плазмонного резонансу та визначається ієрархією отворів різного розміру у фрактальній структурі. Така плівка є унікальною системою для покращення передачі електромагнітної хвилі одночасно на декількох обраних частотах.

Квантова інтерференція. У роботі [49] повідомляється про успішне вивчення явища квантової інтерференції балістичних електронів, які поширюються всередині фрактальних структур із характерними нанометровими розмірами.

Мезоскопічний електронний транспорт. У роботі [50] розглянуто детерміновану структуру імпедансів на фракталі у вигляді серветки Серпінського, особливо щодо систем з низькою генерацією, або мезоскопічних систем. Вивчено фрактальну множину резонансів контуру та наведено розрахунки частотно-залежних систем. На прикладах показано, що умова проміжного розміру може призвести до коливального скейлінгу повного імпедансу, який зникає в асимптотичній межі.

Паралельно розвиваються прикладні дослідження, результатом яких є створення нових електронних приладів, які об'єднані поняттям «фрактальна електроніка». Наведемо декілька прикладів.

Індуковане домішками розсіяння електронів. У роботі [51] повідомляється про дослідження індукованого домішками розсіяння електронів, яке змушувало електрони прямувати через мікро- та нанорозмірні пристрої за фрактальними траєкторіями.

Електронні прилади з фрактальним розподілом провідних каналів. У роботі [52] повідомляється про пристрої, утворені з атомних кластерів металевих елементів, які «самозбираються» на плоских поверхнях як на кандидатах для майбутньої реалізації цих пристроїв. Цей процес заснований на модифікованій формі дифузій-

но-обмеженої агрегації, яка, як відомо, генерує фрактальні структури, де гіллясті структури повторюються на різних масштабах. Самостійне складання мінімізує витрати матеріалу, при цьому традиційним методам виготовлення. Це також дозволяє ефективно генерувати цілі масиви складних багатомасштабних структур за один крок осадження.

Електроніка, що розтягується (Stretchable electronics) [53]. Електроніка, що розтягується, забезпечує основу для застосунків, які виходять за рамки звичайних технологій пластин і друкованих плат завдяки їх унікальній здатності інтегруватися з м'якими матеріалами та криволінійними поверхнями. Показано, що тонкі плівки твердих електронних матеріалів, сформовані у вигляді детермінованих фрактальних структур і пов'язані еластомерами, забезпечують незвичайну механіку, потрібну для конструювання пристроїв, що розтягуються.

Фотонні та магнетонні кристали. Ще одним напрямом нової елементної бази фрактальної електроніки є використання фрактальних фотонних і магнетонних кристалів та їх модифікацій. Надзвичайна важливість цього напрямку визначається тим, що саме така елементна база дозволить створити новітні пристрої обробки та передачі інформації [9].

Фрактальні надхвильові відбивачі. Установлено, що можна створити компактний фрактальний відбивач, який демонструє «надхвильові властивості». Іншими словами, фрактальна пластина здатна ефективно відбивати електромагнітні хвилі з довжинами, набагато більшими, ніж її поперечні розміри [9].

Генератор фрактального сигналу. Вдалося знайти роботу [54], яка вийшла у 1992 р., де теоретично був розроблений, мабуть, один із перших генераторів фрактального сигналу.

Зауважимо, що у 2014 р. Н. Коен висловив крайнє здивування та занепокоєння з приводу практичного впровадження результатів «фракталізації», коли вже готові технології перебувають у бездіяльності цілі десятиліття [10].

Тим не менш, останнім часом з'являються нові, начебто, зовсім фантастичні пропозиції. Так, у 2016 р. у монографії [11] обґрунтовувалась ідея, що фрактальна електроніка може виступати як універсальний інтерфейс до нейронів.

3. Фрактали в оптиці та квантовій радіофізиці

Застосування фрактальних ідей у квантовій радіофізиці пов'язане безпосередньо з лазерами. Насамперед, йдеться про оптичний аналіз і синтез фрактальних полів та структур [55]. Перші дослідження в цьому напрямку розпочалися в середині 1980-х рр. (див., наприклад, [56]). Основна ідея полягає в тому, що структура поля оптичного сигналу, який зазнав дифракції на фрактальному об'єкті (часто званому фрактальним патерном), сама виявляється фрактальною. Виникають такі фрактальні поля як у зоні Френеля, так і у зоні Фраунгофера [57]. Інше питання, що такий простий підхід, названий «схемою фрактального конвертера», на жаль, не дозволяє згенерувати довільну фрактальну структуру оптичного поля. Більш досконала технологія була запропонована у 1993 р. [58]. Вона заснована на реалізації запропонованої М. Барнслі ідеї систем ітерованих функцій [1]. Наступним кроком було використання як фрактального патерну не регулярного фрактала, а стохастичного. Можна було б очікувати, що отримана структура оптичного поля теж виявиться стохастичним фракталом, але це виявилось не зовсім так. Установлено, що у цьому випадку сама структура поля не є стохастичним фракталом, а фрактальність проявляється лише у просторовому розподілі середніх інтенсивностей світла. виправити цю ситуацію вдалося при використанні цілого ансамблю стохастичних фрактальних розсіювачів, певним чином розміщених у тривимірному просторі [55]. Також установлено, що і сам по собі лазерний промінь теж може мати фрактальні властивості [59]. Перші дослідження щодо обґрунтування цієї теоретичної можливості були проведені у 1998 р. Фрактальна розмірність отриманої структури, що виникає в перерізі лазерного пучка, дорівнювала $D = 1.6 \pm 0.1$. У 2019 р. з'явилася інформація про експериментальне підтвердження наявності фрактальних розподілів у лазерних пучках [60].

Іншими важливими напрямками застосування фракталів є оптична передача зображень на фоні завад і голографія [55]. Ще одним цікавим напрямом досліджень є задачі про розсіяння та поглинання світла фрактальними агрегатами (статистичними сумішами) мікрочастинок [43]. Для

практиків це цікаво насамперед тим, що шорсткі поверхні таких напівпровідників і провідників в оптичному діапазоні електромагнітних хвиль мають дуже маленький коефіцієнт відбиття.

4. Фрактали в напівпровідниковій і вакуумній електроніці

Фрактальні властивості притаманні часовим та просторовим структурам та процесам у плазмі, що виникають в електронних приладах в області катодної плями (англ. *cathodic spot*) [61]. Зокрема, фрактальною є густина струму електронів катодної дуги. Більше того, не тільки сама катодна пляма є просторовою структурою, де центри емісії електронів мають фрактальний розподіл. Виявлено також, що процес еволюції катодної плями у часі також є фрактальним. Перші успішні дослідження в цьому напрямку датовані приблизно серединою 1990-х рр. [115].

Один із напрямків розвитку вакуумної НВЧ мікроелектроніки пов'язаний зі створенням приладів із польовою емісією електронів (див., наприклад, [62]). Конструкція таких приладів зазвичай містить автоемісійний катод, який характеризується наявністю емітуючих вістрів, конусів, лез мікронних розмірів, що дозволяє отримати значні напруженості електричного поля при порівняно низьких значеннях прикладеної напруги. Зогляду на це важливою характеристикою таких катодів є коефіцієнт підсилення електричного поля на вістрях. Найбільш поширений спосіб підвищення цього коефіцієнта пов'язаний зі зменшенням товщини вершини вістря.

Інша ідея полягає у формуванні фрактальної поверхні з різного рівня ступенями: на виступах першої ступені розташовані дрібніші виступи другого ступеня, на яких, у свою чергу, можуть розташовуватися ще дрібніші, і т. д. Установлено, що повний коефіцієнт підсилення електричного поля на фрактальній багатоступінчастій поверхні виявиться рівним добуткові коефіцієнтів підсилення для кожного окремого ступеня. Отримані співвідношення для фрактальної емісійної поверхні польових катодів дозволили пояснити результати деяких ранніх експериментів [62].

У роботі [63] досліджено автоелектронну емісію з фрактальної поверхні, обмеженої множиною Жюліа. Установлено, що найбільш ефективною конфігурацією катода є вуглецеві фракталь-

ні ґрати лезового типу з протяжними межами, і як варіант запропоновано вуглецевий автоемітер лезового типу з розвиненою фрактальною поверхнею на основі фігури Пеано–Госпера. Така конфігурація відповідає найефективнішому низьковольтному автоемітеру з високим значенням ефективної площі емісії.

У 1991 р. С. Ідзіма (S. Iijima) відкрив вуглецеві структури, відомі сьогодні як вуглецеві нанотрубки [64]. Виявилось, що масив цих нанотрубок, вирощених на поверхні катода, успішно може застосовуватися як джерело електронів у вакуумних приладах. Ще одним цікавим напрямком використання фракталів у напівпровідниковій електроніці є створення металевих фрактальних електродів, тобто електродів із фрактальною геометрією, які можна з'єднувати з напівпровідниковими елементами (див., наприклад, [52]).

5. Фрактали у статистичній радіофізиці

Задачі статистичної радіофізики, яка має справу зі стохастичними процесами, середовищами, об'єктами, вже самі по собі є досить складними. Додавання до стохастичності ще й фрактальності збільшує труднощі, що стоять перед дослідником, як мінімум, на порядок.

Однією з важливих проблем сучасної статистичної радіофізики є проблема виявлення малоконтрастних цілей. Для її розв'язання було запропоновано використовувати методи фрактальної обробки на основі застосування текстурних (1980-х рр.) та фрактальних (1990-х рр.) мір на основі принципів нелінійної динаміки. Результатом практичної реалізації зазначених ідей стало створення фрактального непараметричного виявника радіолокаційних сигналів. Так з'явився новий напрямок у радіофізиці — застосування теорії динамічних систем і фрактальної топології у задачах підвищення інформативності радіосистем, що функціонують у діапазонах оптичних і міліметрових хвиль, який успішно розвивається і нині. Важливо зазначити, що спочатку (у 2002 р., [116]) термін «фрактальна радіофізика» застосовувався виключно для даного напрямку. Однак час не стоїть на місці, і на сьогодні «фракталізація» зазнала й багато інших напрямків радіофізичних досліджень, підтвердженням чого є цей огляд (див., наприклад, [1]).

6. Фрактали у фізиці та радіофізиці геокосмосу

Із погляду нелінійної та системної парадигм, сформульованих Л.Ф. Чорногором у 1980-ті рр., процеси в геокосмосі, маючи виняткову складність і різноманітність, найчастіше є короткочасними, надширококутовими, нелінійними та фрактальними [65, 66]. З цієї причини стає зрозумілим, чому використання фахівцями фрактальних ідей у геофізиці стало, по суті, одним із перших напрямків їхнього практичного застосування. Історично це почало відбуватися фактично одразу після оприлюднення Б. Мандельбротом своєї революційної концепції, тобто на початку 1980-х рр. (див., наприклад, [8]).

6.1. Фрактали та землетруси

Вивчення фрактальних властивостей цілого комплексу процесів та явищ у геокосмосі, пов'язаних із землетрусами, почалося приблизно на рубежі 1970-х та 1980-х рр. Незважаючи на це, інколи вважають, що старт серйозних досліджень фрактальних властивостей землетрусів було дано десятиліттям пізніше, у 1990 р., коли з'явилася фундаментальна монографія [7].

Для відповіді на логічне питання про те, які ж фрактальні властивості може мати землетрус, наведемо цитату автора [7] Х. Такаюцу (H. Takayasu): «Землетруси мають таку безліч різних фрактальних властивостей, що їх можна віднести до найцікавіших фрактальних явищ». Нижче ми розглянемо лише деякі з них. Цікаво зауважити, що існує також думка, що землетрус — це явище фрактальної руйнації.

Афтершоки. Добре відомо (див., наприклад, [7]), що за головним поштовхом землетрусу відбувається низка більш слабких поштовхів — афтершоків. Ще 1894 р. японський геофізик Ф. Оморі (F. Omori) установив, що кількість афтершоків у момент часу $n(t)$ після основного поштовху, що стався на момент часу t_0 , зі зростанням величини t спадає за степеневим законом $n(t) \propto t^{-\alpha}$. Цей вираз отримав назву «закон Оморі». Згодом було встановлено, що оскільки величина α може бути і нецілою, то вона пов'язана з фрактальною розмірністю D і, по суті, встановлює наявність у афтершоків фрактальної властивості, яка називається «довгим хвостом» [7].

Більше того, пізніше було показано, що фрактальність є основною особливістю часових розподілів більшості параметрів землетрусів. Цікаво, що на думку В.П. Дімірі (V.P. Dimiri), автора однієї з фундаментальних монографій [8], уперше на фрактальність формули Оморі прямо було вказано у 2000 р. Існують також роботи з дослідження фрактальних властивостей просторового розподілу афтершоків (див., наприклад, [4]).

Зв'язок між кількістю землетрусів та їх магнітудою чи повною енергією. Ще одна «фрактальна» властивість землетрусів пов'язана із законом Гутенберга–Ріхтера, яка також з'явилася ще у «дофрактальну епоху» (у 1944 р.) та визначає кількість землетрусів $N(m)$ з магнітудою, більшою за m : $\log N(m) \propto -bm$. Згодом було показано (див., наприклад, [7, 8]), що її можна переписати у вигляді $f(m) \propto m^{-D}$, де $f(m)$ — частота землетрусів із магнітудою, більшою за m , а D — фрактальна розмірність. Дещо пізніше (у 1990 р.) на основі закону Гутенберга–Ріхтера також було встановлено зв'язок між величиною $N(m)$ і повною енергією, що виділилася під час землетрусу E [7]. Вона має вигляд $N(m) \propto E^{-2b/3}$, де величина $2b/3$ має сенс ще однієї фрактальної розмірності. Зазначимо, що закон Гутенберга–Ріхтера є добре відомим прикладом так званої концепції самоорганізованої критичності, запропонованої у 1987–1988 рр. П. Баком (P. Bak), К. Тангом (C. Tang) і К. Візенфельдом (K. Wiesenfeld). Відповідно до цієї концепції, будь-яка природна система в маргінальному стійкому стані, виходячи зі стану маргінальної критичності, еволюціонує назад до нього [8].

Просторовий розподіл джерел землетрусів. Одним із основних напрямків у пошуку фрактальних властивостей землетрусів є аналіз просторового розподілу їх джерел [6]. У результаті масштабних досліджень, розпочатих приблизно у 1980 р., установлено, що фрактальна розмірність D просторового розподілу епі- та гіпоцентрів землетрусів лежить у діапазоні $D \sim 1.2 \dots 1.6$ [117–120]. Зауважимо, що перша робота на цю тему з'явилася ще 1980 р. [117]. Дещо пізніше (з 1991 р.) для дослідження подібних експериментальних даних були також використані методи мультифрактального аналізу [53]. Установлено, що часова динаміка параметрів мультифрактального спектра може бути ефективно використана

для прогнозування землетрусів [53]. Таким чином, зроблено висновок, що землетрус є складним фрактальним просторово-часовим процесом [6, 8].

Сейсмогенні геотектонічні розломи та передбачення землетрусів. У середині 1980-х рр. було встановлено, що сейсмогенні геотектонічні розломи мають просторову фрактальну структуру у дуже великому діапазоні просторових масштабів — від 10^{-6} м до 10^5 м (див., наприклад, [121–124]). Одним із найважливіших практичних напрямків у дослідженнях подібного роду є прогнозування та оцінка ймовірної потужності землетрусів [8, 67]. Фрактальний аналіз площин геотектонічних розломів, які виникають у результаті землетрусів, дозволяє не тільки підрахувати кількість енергії, яка виділилася, а й оцінити низку числових параметрів передвісників землетрусу. Установлено, що фрактальна розмірність у цій точці розлому залежить від енергії сейсмічних хвиль, відстані до епіцентру землетрусу і пов'язана з частотою появи землетрусів. У роботі [68] стверджується, що метод оцінки небезпеки майбутніх землетрусів на основі останньої залежності є не лише досить ефективним, а й дуже дешевим, і тому вкрай рекомендується до практичного застосування. Зрозуміло, ніхто не говорить про точне передбачення землетрусів, оскільки механізми, що їх викликають, швидше за все, мають хаотичний характер. Тим часом, імовірнісне трактування прогнозу землетрусів найчастіше виявляється дуже корисним [8]. Більше того, виявлено, що найчастіше самі картини тріщин і розломів у різних породах є фрактальними зображеннями [69].

Процес появи землетрусів у часі. Якщо розглянути виникнення землетрусів у певному регіоні як деякий випадковий часовий процес, то встановлено, що він є стохастичним точковим процесом, який може мати фрактальні властивості [67]. Як правило, фрактальна розмірність D такого процесу оцінюється за допомогою статистичної характеристики, відомої як фактор Фано $FF(\tau)$. Відомо (див., наприклад, [67]), що фактор Фано $FF(\tau)$, який є функцією часу, що відраховується, (*counting time*) τ , пов'язаний із фрактальним показником α процесу співвідношенням $FF(\tau) = 1 + (\tau / \tau_0)^\alpha$, де τ_0 — час початку відліку, який показує нижню межу часу τ , вище якої

фактор Фано дійсно має самоафінні властивості. Фрактальний показник α пов'язаний із фрактальною розмірністю D простим співвідношенням: $D = 2 - \alpha$. Тут індикатором фрактальності стохастичного точкового процесу, що розглядається, є виконання вимоги $0 < \alpha < 1$. Знання величини фрактальної розмірності D дозволяє робити обґрунтовані прогнози щодо ймовірності землетрусу в заданому регіоні у зазначений проміжок часу. Зауважимо, що аналогічні фрактальні властивості виявлено й при аналізі часових і просторових розподілів появи інших стихійних лих, зокрема, вивержень вулканів, зсувів, пожеж, каменападів, повеней, розривів земної кори, падінь космічних тіл тощо [6]. Наприклад, у більшості зазначених випадків існує степенева залежність між числом подій, що відбуваються в регіоні, N , і площею регіону A : $N \sim A^{-\beta}$, де β — стала величина, яка деяким чином пов'язана з фрактальною розмірністю.

Сейсмoeлектричні сигнали. У результаті досліджень, розпочатих у 1990-ті рр., встановлено, що за досить сильних землетрусів фрактальні, а точніше, мультифрактальні властивості мають сейсмoeлектричні сигнали їхніх провідників [53, 67]. Виявлено зв'язок ширини мультифрактального спектра таких сигналів із магнітудою землетрусу: чим сильніший майбутній землетрус, тим ширшим є спектр. Більше того, при цьому виникає додатково й певна асиметрія мультифрактального спектра [6].

Акустичне випромінювання ультразвуково-го діапазону. Виявлено, що акустичні сигнали в ультразвуковому діапазоні частот (25...200 кГц), що генеруються під час землетрусу, мають фрактальні властивості [70]. Виявилось, що за часовими залежностями фрактальної розмірності для високочастотних сигналів (центральна частота спектра сигналу Фур'є f_0 лежить у діапазоні $f_0 \sim 160...200$ кГц) землетрус можна передбачити за 7–8 місяців, а низькочастотних сигналів ($f_0 \sim 25$ кГц) — приблизно за два місяці. На жаль, практична користь від отриманих результатів знижується через те, що погана просторова роздільна здатність даного методу (близько кількох сотень кілометрів) не дозволяє достатньою мірою з'ясувати положення епіцентру землетрусу [70].

Варіації геомагнітного поля в ультранизькочастотному діапазоні. У роботі [71] повідомляється

про наявність мультифрактальних властивостей варіацій геомагнітного поля в ультранизькочастотному діапазоні (0.1...10.0 Гц). Установлено, що характерні зміни мультифрактальних характеристик можна використовувати для прогнозування землетрусів.

Єдиний закон масштабування для землетрусів. У 2002 р. було представлено метод комплексного прогнозування землетрусів, у якому одночасно використовуються розглянуті вище закон Гутенберга–Ріхтера, закон Оморі та фрактальна розмірність геотектонічних розломів [72]. Метод заснований на запропонованому авторами [72] єдиному законі масштабування для землетрусів і дозволяє оцінити ймовірність появи землетрусу із заданою магнітудою в заданому районі. Відповідно до цього закону [72], ймовірність появи землетрусу з магнітудою $m = \lg S$ в заданому районі з геометричними розмірами $L \times L$ через час T , відрахований від останнього землетрусу, становить $P_{S,L}(T) \propto T^{-\alpha} f(TL^{d_f} S^{-b})$, де величина α визначається законом Оморі для афтершоків, величина b береться з закону Гутенберга–Ріхтера, величина d_f є ефективною фрактальною розмірністю розломів у досліджуваній області, а $f(x)$ — масштабувальна функція, яка при $x < 1$ залишається практично сталою, а при $x > 1$ швидко зменшується зі зростанням аргументу. Якщо ввести змінні $x = cTL^{d_f} S^{-b}$, де c — деяка константа, і $y = T^\alpha P_{S,L}(T)$, то на площині (x, y) функція $f(x)$ має вигляд відомої нелінійної хвилі — кінка. Ідея єдиного закону масштабування для землетрусів набула подальшого розвитку у роботах А. Коррала (A. Corral) [73] і використовується багатьма фахівцями.

Передбачення цунамі. Фрактали використовуються також для прогнозування іншого вкрай небезпечного процесу, що викликається землетрусами, — цунамі. Перша робота у цьому напрямку досліджень з'явилася ще у 1989 р. [74]. Як відомо, цунамі є поодиноким нелінійним хвилею (солітоном), яка здатна долати в океані величезні відстані, практично не змінюючи свого профілю. Швидкість переміщення такого солітону дорівнює \sqrt{gh} , де g — прискорення вільного падіння, h — глибина, та виявляється вкрай значною. Так, для цунамі, що виникло внаслідок землетрусу 26 грудня 2004 р. на Північній Суматрі (магні-

туда $M = 9.3$) швидкість у різних частинах океану змінювалася від 360 до 720 км/год на глибинах від 1 до 4 км відповідно. Коли хвиля цунамі виходить на мілководдя, її швидкість зменшується, але водночас різко збільшується амплітуда, унаслідок чого відбуваються катастрофічні руйнування в прибережній смузі. Так, якщо в океані амплітуда хвилі виявляється меншою за 1 м, то біля узбережжя вона стає більшою за 15 м [8]. Фрактали використовуються для передбачення цунамі, з одного боку, для моделювання берегової лінії [8], з іншого — для отримання законів масштабування, аналогічних тим, що були записані для землетрусів [74].

Контроль штучних вибухів. Сейсмографи які, як правило, працюють у безперервному режимі стеження за геофізичною обстановкою, можна використовувати не тільки для вивчення землетрусів. Існують відомості про дослідження мультифрактальних властивостей акустичних сигналів, зареєстрованих сейсмографом, які виникли внаслідок потужних вибухів (хімічних, ядерних) штучного походження [75].

6.2. Фрактали у метеорології

Перші відомості про успішні результати пошуків фракталів у метеорології з'явилися на початку 1990-х рр. Однією з перших публікацій на цю тему була робота [76]. Разом з тим, ще в ранніх своїх роботах Б. Мандельброт розраховував фрактальні розмірності хмар, турбулентних структур, каналів лінійних блискавок тощо [77]. На сьогодні відомо, що фрактальні властивості мають, наприклад, часові залежності швидкості вітру. Виявляється, фрактальна розмірність таких часових рядів, будучи мірою їх складності, корелює з рядом характеристичних параметрів відповідної турбулентної структури (потенціальної температури, кінетичної енергії турбулентності, швидкості тертя, об'ємного числа Річардсона) [5].

Фрактальні та мультифрактальні властивості мають часові ряди флуктуацій і просторові розподіли температур атмосфери, вітрів, середньоширотних циклонів, атмосферних потоків тощо [78].

Ще один приклад мультифрактальних властивостей пов'язаний з так званими блискавками, що б'ють вгору, які були експериментально виявлені

в середині 1990-х рр. [79]. Якщо звичайна лінійна блискавка є електричним розрядом між хмарою та земною поверхнею і б'є вниз, то «ельфи», «спрайти», «блакитні джети» та «гало» розряджаються в протилежному напрямку — вгору — на висотах 20...100 км, що суттєво вище за положення будь-яких хмар. Динамічна фрактальна структура в атмосфері, яка описує ці процеси, має мультифрактальні властивості [80]. Також у роботі [81] повідомляється про успішне виявлення мультифрактальних властивостей у процесу підняття кисню в атмосфері Землі.

6.3. Фрактали й іоносфера

У роботі [82], що вийшла друком у 2008 р., наведено результати перших досліджень мультифрактальної структури розвиненої дрібномасштабної іоносферної турбулентності (ДІТ) під час спеціалізованих експериментів із радіопросвічування середньопрошаркової іоносфери сигналами орбітальних супутників Землі (2005—2006). Установлено, що в умовах розвиненої турбулентності характерні значення фрактальної розмірності простору, зайнятого природними неоднорідностями ДІТ, як правило, близькі до топологічної розмірності їх простору вкладення, а справжні значення показника спектра ізотропної ДІТ мало відрізняються від загальноприйнятих номінальних значень. Проте навіть невеликі відмінності у зазначених параметрах, виявлені в експерименті, свідчать про різко нерівномірний розподіл локальних фрактальних структур розвиненої ДІТ у просторі. Запропоновано стохастичну модель нестационарного процесу для швидких амплітудних флуктуацій сигналів при їх поширенні в іоносфері з неоднорідним просторовим розподілом дрібномасштабних флуктуацій електронної концентрації. У кінцевому рахунку саме цей неоднорідний розподіл дрібномасштабних флуктуацій електронної концентрації призводить до специфічної мультифрактальної структури записів амплітуд радіосигналів, що приймаються.

6.4. Фрактали та магнітне поле

Установлено, що дуже часто фрактальні та мультифрактальні властивості мають часові варіації міжпланетного та земного магнітних полів. Такі

варіації, як правило, рееструються безпосередньо за допомогою магнетометрів. Перші спроби вивчення фрактальних властивостей часових варіацій міжпланетного магнітного поля були здійснені в NASA (США) у середині 1980-х рр. [83]. Тим часом той факт, що потужнісні спектри Фур'є магнітометричних сигналів мають степеневу залежність від частоти, був відомий ще наприкінці 1960-х — на початку 1970-х рр., тобто до появи ідеї фракталів.

Однак повернемося до «усвідомлених» досліджень фрактальності міжпланетного магнітного поля. Так, у результаті експериментальних спостережень і вимірювань, проведених за допомогою космічного апарата «Вояджер-2», установлено, що часові флуктуації міжпланетного магнітного поля мають властивість самоподібності на періодах від 20 до $3 \cdot 10^5$ с, а їхня фрактальна розмірність становить $D = 5/3$ [7]. Масовий інтерес до проведення фрактального та мультифрактального аналізу часових варіацій магнітного поля Землі виник дещо пізніше — на початку 2000-х рр.

Виявлено, що часові варіації геомагнітного поля, спричинені впливом різних потужних джерел енерговиділення, мають фрактальні та мультифрактальні властивості [5, 84]. Це справедливо як для джерел природного (землетруси, вибухи вулканів, падіння космічних тіл, сонячні спалахи), так і штучного (потужні хімічні та ядерні вибухи, старту та польоти космічних апаратів, нестационарне випромінювання потужних радіотехнічних систем) походження.

Також у геофізиці встановлено, що багато процесів у магнітосфері (зокрема, процес зміни магнітних полюсів Землі у часі) дуже добре описуються моделлю польоту Леві [29], яка належить до двопараметричних негаусівських моделей фрактальних сигналів, у яких фрактальна розмірність D і показник Херста H є двома незалежними один від одного параметрами [85]). Додамо, що процес зміни магнітних полюсів Землі також має мультифрактальні властивості [86].

Вважаємо за потрібне поділитися з читачем, на нашу думку, важливим і цікавим спостереженням. У літературних джерелах 1980—90-х рр. (див., наприклад, [83]) часто зустрічається помилка у цитуванні однієї з перших робіт Б. Мандельброта з фрактальної тематики [87]: у назві

вживається слово «fractal» замість «fractional». Це можна було б вважати несуттєвим, якби робота [87] не датувалася 1967 р. Саме тиражування цієї помилки призвело до поширення хибної думки про те, що поняття «фрактал» було створене Б. Мандельбротом ще в 1960-ті рр. Насправді це не так, оскільки поняття «фрактал» введено у 1975 р., як ми вже підкресливали в [1].

Крім аналізу результатів прямих магнітометричних вимірювань, проводяться дослідження й інших характеристик, тим чи іншим чином пов'язаних із геомагнітним полем. Однією з таких ефективних характеристик стану магнітного поля Землі є часові варіації D_{st} -індексу. Як відомо, він описує варіації інтенсивності симетричної частини кільцевого струму в іоносфері Землі [88]. Є інформація, що з використанням методів фрактального та мультифрактального аналізу часових залежностей D_{st} -індексу робилися спроби прогнозування магнітних бур [89]. Установлено також, що часовий ряд D_{st} -індексу являє собою мультифрактальний процес, який добре описується моделлю мультифрактального броунівського руху [90].

Зазначимо також, що мультифрактальні властивості можуть мати не лише часові, а й просторові варіації магнітного поля Землі [91], а також магнітного поля Сонця [92].

6.5. Фрактали та сонячна активність

У рамках системної парадигми, яка вже згадувалася вище, Сонце та Земля входять як підсистеми до відкритої нелінійної динамічної системи «Сонце — міжпланетне середовище — магнітосфера — іоносфера — атмосфера — Земля» (СМСМІАЗ). Процеси в такій системі відрізняються надзвичайною складністю і різноманіттям, а тому можуть мати фрактальні та мультифрактальні властивості. Розглянемо деякі числові характеристики, що ілюструють цей факт.

Числа Вольфа. Часовий ряд чисел Вольфа, що характеризує сонячну активність і пов'язаний із підрахунком числа сонячних плям, є унікальним у тому сенсі, що спостереження ведуться ще з 1610 р., хоча повні і достовірні дані є тільки з 1849 р. [93]. Добре відомо, що він має яскраво виражений 11-річний цикл, накладений, можливо,

на ще одну повільнішу компоненту з періодом близько ста років (див., наприклад, [29]). Однак ці відомості були отримані ще в «дофрактальну» епоху.

Уперше фрактальний аналіз часового ряду чисел Вольфа був проведений Б. Мандельбротом і Дж. Уоллісом у 1969 р. [94], тобто за шість років до появи самого поняття «фрактал». У перекладі на нинішню термінологію виявилось, що у діапазонах періодів збурень від 3 до 30 місяців та від 30 до 100 років фрактальна розмірність становить $D \approx 1.1$. Ці результати були отримані методом нормованого розмаху [94]. У низці пізніших робіт були отримані досить близькі результати з використанням інших методів фрактального аналізу, зокрема, $D \approx 1.2$ в [96], $D \approx 1.0 \dots 1.2$ в [97] і $D \approx 1.2 \dots 1.3$ в [95]. Було встановлено, що часовий ряд чисел Вольфа є фрактальним процесом, що добре описується моделлю узагальненого броунівського руху, яку ми докладно розглядали в другій частині нашого огляду [2]. Фрактальна розмірність D цього процесу перебуває у діапазоні $D \approx 1.1 \dots 1.3$. Отже, ряд чисел Вольфа має властивість персистентності. У 2006 р. було встановлено наявність сильної кореляції між фрактальною розмірністю та часовими змінами ряду чисел Вольфа [98]. Автори показали, що коефіцієнт кореляції між прогнозами максимумів, зробленими на основі фрактальної розмірності, і самими максимумами часового ряду становить приблизно 0.89.

У 1994 р. Ж. Куїн (Z. Qin) оцінив розмірність D_A атратора фазових траєкторій динамічної системи, здатної породити часовий ряд чисел Вольфа [99]. Цю фрактальну розмірність ми описали в першій частині нашого огляду [1]. Виявилось, що на часовому інтервалі з січня 1850 р. по травень 1992 р. величина D_A лежить у діапазоні $D_A \approx 2.8 \pm 0.1$. Нічого дивного тут не спостерігається, оскільки не можна порівнювати величини D і D_A . Вони просто описують зовсім різні об'єкти: перша — сам часовий ряд, а друга — атратор фазових траєкторій динамічної системи, поставленої у відповідність до цього ряду.

Зауважимо, що оцінки розмірності атратора D_A для ряду чисел Вольфа вперше були проведені ще 1990 р. у роботах [93, 100], однак кожна з них мала певні недоліки. Так, у роботі [93] досліджен-

ня були виконані для дуже коротких часових інтервалів до 1850 р. (кількість відліків $N \leq 400$ точок), тому розсіяння величин D_A для різних реалізацій виявилось значним ($D_A \sim 3.0 \dots 4.3$).

У 2006 р. почалися дослідження мультифрактальних властивостей ряду чисел Вольфа [101]. Було встановлено, що суттєвий негативний вплив на отримані оцінки чинить синусоїдальний тренд. Після його видалення виявилось, що фрактальна розмірність ряду загалом становить $D \approx 1.88 \pm 0.01$ [101]. І ця величина суттєво відрізняється від тієї, що дають методи монофрактального аналізу. Пояснення цьому просте: порівнювати між собою потрібно результати, отримані або без тренда, або з трендом. На жаль, у [101] цього зроблено не було. Більше того, у 2009 р. у роботі [102] був запропонований інший механізм видалення синусоїдального тренда, і значення для фрактальної розмірності виявилось іншим, $D \approx 1.26$, що цілком узгоджується з результатами, наведеними вище. Уточнення окремих аспектів мультифрактальних властивостей ряду чисел Вольфа продовжується дотепер (див., наприклад, [103]).

У чисел Вольфа є ще один фрактальний аспект. Згідно з гіпотезою Л. Зеленого та А. Мілованова [104], самі сонячні плями є фрактальними кластерами в магнітному полі Сонця. У результаті можна досліджувати фрактальні та мультифрактальні властивості зображень сонячних плям. Відповідна модель досить добре погоджується із реальними результатами спостережень [29]. Тут є також сенс згадати про фрактонну модель сонячного вітру, запропоновану тими ж авторами у [105]. Нагадаємо, що фрактон — це квазічастинка (фонон) у фрактальному середовищі [1].

Космічні промені. Із одинадцятирічним циклом сонячної активності пов'язані також часові флуктуації космічних променів. Так, у роботі [106] обговорюється оцінка скейлінгових властивостей динаміки флуктуацій космічних променів у циклі сонячної активності.

Глобальне сонячне випромінювання. У роботі [106] методами монофрактального аналізу досліджено фрактальні властивості часового ряду глобального сонячного випромінювання. Установлено наявність властивості антиперсистентності дослідженого ряду. Середнє значення фракталь-

ної розмірності за період 1990—2004 рр. склало $D = 1.93$. Крім того, виявлено деяку широтну залежність фрактальної розмірності, хоча тенденція антиперсистентності зберігається, а всі значення фрактальної розмірності задовольняють співвідношенню $D > 1.80$. Продемонстровано, що отримані результати можуть бути успішно використані для прогнозування глобальної сонячної активності.

Сонячний вітер. Проведений у роботі [107] фрактальний аналіз використовується для обґрунтування дискретності часових рядів сонячної активності та сонячного вітру. Вихідним при цьому є загальне положення про баланс утворення та розпаду (без урахування дифузії) фрактальних елементів у процесі еволюції рівноважних систем у застосуванні до геліофізичних та геомагнітосферних явищ. Результати розрахунків дозволяють класифікувати потоки сонячного вітру залежно від величини їхньої фрактальної розмірності. Обговорюється можливий механізм генерації високошвидкісних потоків сонячного вітру в рамках фрактальної парадигми.

6.6. Фрактали та потужні джерела енерговиділення

Фрактальні та мультифрактальні процеси у відкритих нелінійних динамічних системах «Земля—атмосфера—іоносфера—магнітосфера» (ЗАІМ) і СМСМІАЗ, як уже було сказано вище, можуть викликатися різними потужними нестационарними джерелами енерговиділення. Розглянемо два з них — падіння великих космічних тіл і гравітаційні хвилі.

6.6.1. Падіння великих космічних тіл

Розглянемо результати фрактального аналізу такого процесу на прикладі дослідження інфразвукового сигналу, згенерованого під час падіння Челябінського метеороїда [108]. Ця подія сталася 15 лютого 2013 р. у Челябінській області (Росія). Одним із великої кількості вкрай складних процесів у системі ЗАІМ, згенерованих під час цієї події, стали інфразвукові хвилі. Будучи вкрай потужними, ці акустичні сигнали були зареєстровані станціями Міжнародної системи виявлення ядерних випробувань і геофізичними обсерваторіями. Важливо відзначити, що амплітуда та

спектр інфразвукового сигналу несуть великий обсяг інформації про джерело самого сигналу та параметри атмосфери, в якій він поширювався.

Для досліджень використовувалися два сигнали, зареєстровані чутливими мікробарографами станції IS27 (Німеччина), розташованої в Антарктиді. Перший (прямий) сигнал подолав відстань понад 15 500 км і був зареєстрований 15 лютого 2013 р. між 17.30 і 18.15 UT. Другий (зворотний) сигнал пройшов більшу відстань (близько 25 000 км) і, отже, був прийнятий дещо пізніше (16 лютого 2013 р. між 02.50 і 03.35 UT).

У результаті досліджень, проведених за допомогою методів системного спектрального та динамічного фрактального аналізу, було встановлено таке.

Як у прямому, так і в зворотному сигналах були присутні по два надширококутових (НШС) процеси зі змінною середньою частотою (ЗСЧ).

У прямому сигналі перший НШС-процес із ЗСЧ розпочався приблизно о 17.41 UT і мав тривалість $\tau \approx 600 \dots 660$ с. Показник ширококутовості дорівнював $\mu \approx 0.8$; динамічний показник ширококутовості (для вікна з $\Delta t_w = 270$ с) змінювався у часі в межах $\mu_d \approx 0.6 \dots 0.3$; періоди збурень процесу становили $T \approx 35 \dots 90$ с; середній період T_0 зменшувався приблизно лінійно з 65 до 40 с. Фізичний сенс і причини використання саме такого набору числових характеристик описано у монографії [109]. Фрактальна розмірність D_H даного процесу змінювалася в межах 1.38...1.59. Для другого НШС-процесу із ЗСЧ, який почався приблизно о 17.52 UT, спостерігалось $\tau \approx 900 \dots 960$ с, $\mu \approx 0.8$, $\mu_d \approx 0.2 \dots 0.3$, $T \approx 20 \dots 60$ с. Середній період T_0 зменшувався приблизно за лінійним законом з 50 до 30 с, фрактальна розмірність змінювалася в межах $D_H \approx 1.51 \dots 1.78$.

У зворотному сигналі, де перший НШС-процес із ЗСЧ почався приблизно о 03.03 UT, було отримано, що $\tau \approx 600 \dots 900$ с, $\mu \approx 0.7$, $\mu_d \approx 0.35 \dots 0.3$, $T \approx 20 \dots 40$ с. Середній період T_0 зменшувався приблизно лінійно з 32 до 22 с, фрактальна розмірність змінювалася в межах $D_H \approx 1.45 \dots 1.77$. Для другого НШС-процесу із ЗСЧ, який почався приблизно о 03.10 UT, встановлено, що $\tau \approx 1500$ с, $\mu \approx 0.8$, $\mu_d \approx 0.5 \dots 0.2$, $T \approx 28 \dots 70$ с. Середній період T_0 зменшувався приблизно за лінійним законом з 55 до 30 с, фрактальна розмірність процесу змінювалася в межах $D_H \approx 1.61 \dots 1.77$.

Швидше за все, перший НШС-процес в обох сигналах може бути пояснений генерацією та поширенням вибухової ударної хвилі. Другий же НШС-процес, мабуть, пов'язаний з генерацією та поширенням балістичної хвилі. Слід зазначити, що проаналізовані сигнали містять великий обсяг інформації як про джерело, так і про стан навколишнього середовища вздовж траєкторії поширення.

6.6.2. Гравітаційні хвилі

Завершити опис фрактальних процесів у геофізиці хотілося б результатом, оцінка важливості якого, швидше за все, ще попереду. Маємо на увазі питання про наявність фрактальних і мультифрактальних властивостей у гравітаційних хвиль [110, 111].

Одним із найбільших відкриттів ХХІ століття (наскільки ми зараз можемо про це судити) є експериментальне виявлення гравітаційних хвиль. 14 вересня 2015 р. о 09:50:45 UTC два детектори Лазерної інтерферометричної гравітаційно-хвильової обсерваторії (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO), розташовані у Хенфорді та Лівінгстоні (США), одночасно виявили сигнал гравітаційної хвилі [112]. Через сто років після фундаментальних передбачень А. Ейнштейна і К. Шварцшильда вперше було здійснено пряму реєстрацію гравітаційних хвиль під час спостереження процесу злиття двох чорних дір в одну. У результаті проведених досліджень було встановлено таке:

- сигнали гравітаційних хвиль, які виникли в результаті злиття двох чорних дір і були зареєстровані в Хенфорді та Лівінгстоні, мають мультифрактальні властивості;

- як результат унікального природного НШС-процесу із ЗСЧ, ці сигнали мають складну, нестационарну мультифрактальну структуру;

- монофрактальний аналіз показав, що ємнісна фрактальна розмірність D_C сигналів дорівнює $D_C \approx 1.45 \pm 0.10$ (Хенфорд) і $D_C \approx 1.44 \pm 0.10$ (Лівінгстон);

- мультифрактальний аналіз за методом WTMM (Wavelet Transform Modulus Maxima, [125]) показав, що параметри мультифрактального спектра обох досліджених сигналів дорівнюють $\alpha_{\min} = 0.36 \dots 0.38$, $\alpha_{\max} = 1.01 \dots 1.03$, $\Delta\alpha = 0.65$, і $\alpha^* = 0.65 \dots 0.66$, що безсумнівно свідчить про їхню мультифрактальність;

• метод MF DFA (Multi-Fractal Detrended Fluctuation Analysis, [126]) свідчить, що сигнали є сильно нестационарними, включаючи й часові залежності їх мультифрактальних характеристик. Виявлено, що в обох випадках умова фрактальності для узагальненого показника Херста ($0 < \alpha^*(t) < 1$) достатньою мірою задовольняється тільки для деякої частини сигналу, де змінна безрозмірного часу має вигляд $t \leq 4.5$. Для самого ж показника Херста така умова ($0 < H(t) < 1$) задовольняється, в основному, у діапазоні $2 \leq t \leq 6$.

Щоб остаточно з'ясувати, чи дійсно досліджувані сигнали породжені фрактальним НШС (ФНШС) процесом або на нефрактальний НШС-процес просто накладається адитивний мультифрактальний шум, який має абсолютно іншу фізичну природу, необхідно провести нові експериментальні спостереження. Поки що ж автори вірять у перший результат, хоч і не виключають можливість другого.

7. Фрактали у нелінійній радіофізиці

Нелінійна радіофізика ще є порівняно молодого наукою. І хоча перші дослідження було проведено ще в середині ХХ століття, про нелінійну радіофізику як про окремий напрям почали говорити приблизно у 1980-ті рр. Саме тоді один із авторів цього огляду створив унікальний навчальний курс «Нелінійна радіофізика» [113], а другий автор, на той час студент п'ятого курсу, опинився серед його перших слухачів. За часом це цілком збіглося з етапом становлення та розвитку фрактальної концепції, про що ми говорили у [1]. В одному з розділів зазначеного курсу був пункт «Поняття про геометрію фракталів. Фрактали в математиці та природі». Там були викладені методи описання детермінованого хаосу в радіофізиці. Складається враження, що фрактальна тематика нібито «зростала» з нелінійної.

Це й не дивно, тому що фрактальність як така є запереченням лінійності в будь-якому її розу-

мінні. Це стосується як алгебричних, геометричних і статистичних властивостей самих фрактальних об'єктів, так і методів фрактального та мультифрактального аналізу сигналів, процесів, зображень тощо. Отже, все, про що йшлося в даному огляді, формально безпосередньо стосується саме нелінійної радіофізики.

Завершити розмову про місце фракталів у радіофізиці варто думкою Д.Л. Туркотта (D.L. Turcotte), висловленою у 2004 р. [114]: «У геофізиці існує безліч наборів даних, які демонструють фрактальну поведінку. Ця поведінка, взагалі кажучи, не може бути отримана з розв'язків стандартних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Однак у деяких випадках таку поведінку можна отримати за допомогою простих моделей кліткових автоматів». Цей вислів демонструє, наскільки «фракталізація» розширює горизонти дослідника. Для пояснення тих чи інших процесів, явищ, об'єктів поступово залучаються ідеї, поняття та методи, які вже знайшли застосування в інших галузях науки, але ще не входять до арсеналу інструментів, прийнятих у досліджуваній галузі.

Висновки

Нелінійність і фрактальність є невід'ємними властивостями відкритих нелінійних динамічних систем, а відтак і всього навколишнього світу. Дуже часто радіофізика має справу саме з такими системами, тому вона просто змушена була стати фрактальною.

На сьогодні вже накопичено велику кількість фактів успішного практичного застосування ідей «фракталізації» в самих різних напрямках радіофізики. «Фракталізація» радіофізики, що вже відбулася, — не данина мінливій моді, а новий магістральний шлях розвитку сучасних радіофізичних досліджень.

Сподіваємося, що у ХХІ сторіччі фрактальний підхід стане для радіофізики таким самим звичним інструментом, яким на цей час є фур'є-аналіз.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Фрактальная радиофизика. 1. Теоретические основы. Радиофизика и радиоастрономия. 2020. Т. 25, № 1. С. 3—77. DOI: 10.15407/rpra25.01.003
2. Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Фрактальная радиофизика. 2. Фрактальный и мультифрактальный анализы сигналов и процессов. Радиофизика и радиоастрономия. 2023. Т. 28, № 1. С. 5—70. DOI:10.15407/rpra28.01.005

3. Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Фрактальна радіофізика. 3. Дробове числення в електродинаміці. Радіофізика і радіоастрономія. 2024. Т. 29, № 1. С. 46–67. DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra29.01.46>
4. Nanjo K., Nagahama H. Fractal properties of spatial distributions of aftershocks and active faults. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2004. Vol. 19, Iss. 2. P. 387–397. DOI: 10.1016/s0960-0779(03)00051-1
5. Quadfeul S.-A., ed. *Fractal Analysis and Chaos in Geosciences*. Rijeka, Croatia: InTech Press, 2012. 174 p.
6. Goltz C. *Fractal and Chaotic Properties of Earthquakes*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. 182 p.
7. Takayasu H. *Fractals in the Physical Sciences. Nonlinear Science: Theory and Applications.*, Manchester, New York: Manchester University Press, 1990. 170 p.
8. Dimri V.P., ed. *Fractal Behavior of the Earth System*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 208 p.
9. Gil'mutdinov A.K., Ushakov P.A., El-Kharazi R. *Fractal Elements and their Applications*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ., 2017. 252 p.
10. Bandt C., Barnsley M., Devaney R., Falconer K. J., Kannan V., and Vinod Kumar P. B., eds. *Fractals, Wavelets, and their Applications: Contributions from the International Conference and Workshop on Fractals and Wavelets (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)*. Switzerland: Springer Int. Publ., 2014. 508 p.
11. Di Ieva A., ed. *The Fractal Geometry of the Brain*. New York: Springer-Verlag, 2016. 585 p.
12. Werner D.H., Mittra R. *Frontiers in Electromagnetics, IEEE Press Series on Microwave Technology and RF*. New York: Wiley-IEEE Press, November 1999. 814 p.
13. Jaggard D.L. Fractal Electrodynamics: From Super Antennas to Superlattices. In: Levy-Vehel J., Lutton E., Tricot C. *Fractals in Engineering*. New York: Springer-Verlag, 1997. P. 204–221.
14. Berry M.V. Diffraction. *J. Phys.* 1979. Vol. A12. P. 781–797.
15. Tatarskii V.I. *Wave Propagation in a Turbulent Medium*. New York: McGraw-Hill, 1961.
16. Chernov L.A. *Wave Propagation in a Random Medium*. New York: McGraw-Hill, 1960.
17. Kolmogorov A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds' number, and Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. In: Friedlander S.K., Topper L., eds. *Turbulence, Classical Papers on Statistical Theory*. New York: Interscience, 1961.
18. Jaggard D.L., Sun X. Scattering from bandlimited fractal fibers. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1989. Vol. 37, Iss. 12. P. 1591–1597. DOI: 10.1109/8.45102
19. Franceschetti G., Riccio D. *Scattering, natural surfaces, and fractals*. Elsevier, 2007. 307 p.
20. Werner D.H., Ganguly S. An overview of fractal antenna engineering research. *IEEE Antennas Propag. Mag.* 2003. Vol. 45, Iss. 1. P. 38–57. DOI: 10.1109/map.2003.1189650
21. Cohen N. *Fractal Antennas: Part 1. Communications Quarterly*. Summer, 1995. P. 7–22.
22. Puente C., Romeu J., Pous R., Garcia X., Benitez F. Fractal multiband antenna based on the Sierpinski gasket. *Electron. Lett.* 1996. Vol. 32, Iss. 1. P. 1–2. DOI: 10.1049/el:19960033
23. Puente C., Navarro M., Romeu I., Pous R. Variations on the fractal Sierpinski antenna flare angle. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. 1998 Digest. Antennas: Gateways to the Global Network. Held in Conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting (Cat. No.98CH36194). Atlanta, Georgia: 21–26 June 1998. Atlanta: IEEE, 1998, p. 1–4. DOI: 10.1109/APS.1998.701794
24. Cohen N. *Fractal Antennas: Part 2. Communications Quarterly*. Summer, 1996. P. 53–66.
25. Karmakar A. Fractal antennas and arrays: a review and recent developments. *Int. J. Microw. Wirel. Technol.* 2020. P. 1–25. DOI: 10.1017/s1759078720000963
26. Cohen N., Hohfeld R., Moschella D., Salkind P. Fractal wideband antennas for software defined radio, UWB, and multiple platform applications. *Radio and Wireless Conference, 2003. RAWCON '03. Proc.* Boston, MA, USA, 8–13 Aug. 2003. IEEE, 2003. DOI: 10.1109/rawcon.2003.1227902
27. Walker G.J., James J.R. Fractal Volume Antennas. *Electron. Lett.* 1998. Vol. 34, Iss. 16. P. 1536–1537. DOI: 10.1049/el:19981135
28. Al-Zabee A.A.K., Jabbar S.Q., Wang D. Fractal Antennas (Study and Review). *Int. J. Comput. Technol.* 2016. Vol. 15, Iss. 13. P. 7387–7400. DOI: 10.24297/ijct.v15i13.31
29. Frame M., Urry A. *Fractal Worlds: Grown, Built, and Imagined*. New Haven, London: Yale University Press, 2016.
30. FRACTALCOMS: Exploring the limits of Fractal Electrodynamics for the future telecommunication technologies IST-2001-33055, *Final Report Task 4.3* by J.M. Gonzalez, J. Romeu, E. Cabot and J.R. Mosig.
31. Sabban A. *Novel Wearable Antennas for Communication and Medical Systems*. Taylor & Francis Group, 2018. 443 p.
32. Even C., Russ S., Repain V., Pieranski P., Sapoval B. Localizations in Fractal Drums: An Experimental Study. *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, Iss. 4. P. 726–729.
33. Crnojevic-Bengin V., Budimir D. Novel microstrip resonators with embedded 3-D curves. *Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC'2004)*. New Delhi, India, 15–18 Dec. 2004.
34. Crnojevic-Bengin V., Budimir D. Novel 3-D Hilbert microstrip resonators. *Microwave Technol. Lett.* 2005. Vol. 46, Iss. 3. P. 195–197. DOI: 10.1002/mop.20943
35. Zemlyakov K., Crnojevic-Bengin V. Planar low-pass filters based on Hilbert fractal. *Microwave Opt. Technol. Lett.* 2012. Vol. 54, Iss. 11. P. 2577–2581.
36. Bagmanov V.Kh., Potapov A.A., Sultanov A.Kh., Zang W. Fractal Filters Intended for Signal Detection during Remote-Sensing Data Processing. *J. Commun. Technol. Electron.* 2018. Vol. 63, Iss. 10. P. 1163–1169.
37. Samavati H., Hajimiri A., Shahani A.R., Nasserbakht G.N., Lee T.H. Fractal Capacitors. *IEEE J. Solid-State Circuits*. 1998. Vol. 33, Iss. 12. P. 2035–2041.

38. Gassmann F, Koetz R., Wokaun A. Supercapacitors boost the fuel cell car. *Europhys. News*. 2003. Vol. 34, Iss. 5. P. 176–180. URL: <http://ecl.web.psi.ch/index.html>
39. Shahani A.R., Lee T.H., Samavati H., Shaeffer D.K., Walther S. *Lateral flux capacitor having fractal-shaped perimeters*. US Patent 6084285.
40. Xu H., Wang G., An H. Hilbert fractal curves form compact diplexer. *Microwaves & RF*. 2010. Vol. 49, no. 8. P. 92–95.
41. Parker E.A., El Sheikh A.N.A. Convolution Array Elements and Reduced Size Unit Cells for Frequency-Selective Surfaces. *IEE Proc. H: Microw., Antennas Propag.* 1991. Vol. 138, no. 1. P. 319–322. DOI: 10.1049/ip-h-2.1991.0004
42. Werner D.H., Bretones A.R., Long B. R. Radiation Characteristics of Thin-wire Ternary Fractal Trees. *Electron. Lett.* 1999. Vol. 35, no. 8. P. 609–610.
43. Dmitruk N.L., Goncharenko A.V., Venger E.F. *Optics of Small Particles and Composite Media*. Kyiv: Naukova Dumka, 2009. 387 p.
44. Козарь А.И. *Резонансные метакристаллы из малых магнитодиэлектрических сфер*. Монография. Харьков: ХНУРЭ, 2014. 352 с.
45. Козарь А.И., Хижняк Н.А. Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе. *Укр. физ. журн.* 1970. Т. 15. С. 847–849.
46. Bolotov V.N., Kirichok A.V., Tkach Yu.V. Experimental Research of Fractal Antennas. *Electromagnetic Phenomena*. 1998. Vol. 1, no. 4. P. 483–498.
47. Болотов В.Н., Ткач Ю.В. Генерирование сигналов с фрактальными спектрами. *Журн. техн. физики*. 2006. Т. 76, вып. 4. С. 91–98.
48. Bao Y.-J., Zhang B., Wu Z., Si J.-W., Wang M., Peng R.-W., Lu X., Shao J., Li Zh.-F., Hao X.-P., Ming N.-B. Surface-plasmon-enhanced transmission through metallic film perforated with fractal-featured aperture array. *Appl. Phys. Lett.* 2007. Vol. 90, no. 25. 251914. DOI: 10.1063/1.2750528
49. Carlier F, Akulin V.M. Quantum interference in nanofractals and its optical manifestation. *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69, no. 11. 115433. DOI: 10.1103/physrevb.69.115433
50. Burioni R., Cassi D., Neri F.M. Electrical circuits on mesoscopic sierpinski gaskets *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. Vol. 37, no. 37. P. 8823–8833. DOI: 10.1088/0305-4470/37/37/005
51. Marlow C.A., Taylor R.P., Martin T.P., Scannell B.C., Linke H., Fairbanks M.S., Hall G.D.R., Shorubalko I., Samuelson L., Fromhold T.M., Brown C.V., Hackens B., Faniel S., Gustin C., Bayot V., Wallart X., Bollaert S., and Cappy A. Unified model of fractal conductance fluctuations for diffusive and ballistic semiconductor devices. *Phys. Rev. B*. 2006. Vol. 73, Iss. 19. 195318. DOI: 10.1103/physrevb.73.195318
52. Fairbanks M.S., McCarthy D.N., Scott S.A., Brown S.A., Taylor R.P. Fractal electronic devices: simulation and implementation. *Nanotechnology*. 2011. Vol. 22, Iss. 36. 365304. DOI: 10.1088/0957-4484/22/36/365304
53. Fan J.A., Yeo W.H., Su Y., Hattori Y., Lee W., Jung S.Y., Zhang Y., Liu Z., Cheng H., Falgout L., Bajema M., Coleman T., Gregoire D., Larsen R.J., Huang Y., Rogers J.A. Fractal design concepts for stretchable electronics. *Nat. Commun.* 2014. Vol. 5, Iss. 1. 3266. DOI: 10.1038/ncomms4266
54. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Генератор фрактального сигнала. *Письма в Журн. техн. физики*. 1992. Т. 18, вып. 24. С. 19–21.
55. Francis T.S., Yu, S.J. *Optical Storage and Retrieval: Memory: Neural Networks, and Fractals*. CRC Press, 1996. 344 p.
56. Allain C., Cloitre M. Optical diffraction on fractals. *Phys. Rev. B*. 1986. Vol. 33, Iss. 5. P. 3566–3569. DOI: 10.1103/physrevb.33.3566
57. Uozumi U., Kimura H., Asakura T. Fraunhofer diffraction by Koch fractals: the dimensionality. *J. Mod. Opt.* 1991. Vol. 38. P. 1335–1347.
58. Tanida J., Uemoto A., Ichioka Y. Optical fractal synthesizer: concept and experimental verification. *Appl. Opt.* 1993. Vol. 32. P. 653–658.
59. Berry M. Fractal modes of unstable lasers with polygonal and circular mirrors. *Opt. Commun.* 2001. Vol. 200. P. 321–330.
60. Sroor H., Naidoo D., Miller S.W., Nelson J., Courtial J., Forbes A. Fractal light from lasers. *Phys. Rev. A*. 2019. Vol. 99, Iss. 1. DOI: 10.1103/physreva.99.013848
61. Anders A. *Cathodic Arcs: From Fractal Spots to Energetic Condensation*. Springer Science + Business Media, LLC, 2008. 555 p.
62. Solntsev V.A. Nonlinear phenomena in vacuum microelectronic structures. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Appl. Nonlinear Dynamics*. 1998. Vol. 6, Iss. 1. P. 54.
63. Isaeva O.B., Eliseev M.V., Rozhnev A.G., Ryskin N.M. Simulation of field emission from fractal surface. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Appl. Nonlinear Dynamics*. 1999. Vol. 7, Iss. 5. P. 33–43.
64. Iijima S., Ichihashi T. Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter. *Nature*. 1993. Vol. 363, no. 6430. P. 603–605. DOI: 10.1038/363603a0
65. Черногор Л.Ф. Солнце-межпланетарная среда — магнитосфера — ионосфера — атмосфера — Земля как открытая неравновесная нелинейная физическая система. *Журнал проблем эволюции открытых систем*. 2011. № 13. С. 22–58.
66. Черногор Л.Ф. Физика Земли, атмосферы, геокосмоса в свете системной парадигмы. *Радиофизика и радиоастрономия*. 2003. № 8. С. 59–101.
67. D'Amico S., ed. *Earthquake Research and Analysis — Seismology, Seismotectonic and Earthquake Geology*. Rijeka: InTech, 2012. 416 p.
68. Cello G., Marchegiani L., Tondi E. Evidence for the existence of a simple relation between earthquake magnitude and the fractal dimension of seismogenic faults: a case study from central Italy. Cello G., Malamud B.D. (eds.) *Fractal Analysis for Natural Hazards*. London: Geological Society, Special Publications, 2006. P. 133–140. DOI: 10.1144/GSL.SP.2006.261.01.10

69. Davy P., Bour O., De Dreuzy J.-R., Darcel C. Flow in multiscale fractal fracture networks. Cello G., Malamud B.D. (eds.) *Fractal Analysis for Natural Hazards*. London: Geological Society, Special Publications, 2006. P. 31–45. DOI: 10.1144/GSL.SP.2006.261.01.03
70. Paparo G., Gregori G. P., Poscolieri M., Marson I., Angelucci F., Glorioso G. Crustal stress crises and seismic activity in the Italian peninsula investigated by fractal analysis of acoustic emission, soil exhalation and seismic data. Cello G., Malamud B.D. (eds.) *Fractal Analysis for Natural Hazards*. London: Geological Society, Special Publications, 2006. P. 47–61. DOI: 10.1144/GSL.SP.2006.261.01.04
71. Telesca L., Lapenna V., Vallianatos F., Makris J., Saltas V. Multifractal features in short-term time dynamics of ULF geomagnetic field measured in Crete, Greece. *Chaos Solit. Fractals*. 2004. Vol. 21, Iss. 2. P. 273–282. DOI: 10.1016/j.chaos.2003.10.020
72. Christensen K., Danon L., Scanlon T., Bak P. Unified scaling law for earthquakes. *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 2002. 99(suppl_1). P. 2509–2513. DOI: 10.1073/pnas.012581099
73. Corral Á. Local distributions and rate fluctuations in a unified scaling law for earthquakes. *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68, Iss. 3. 035102(R). DOI: 10.1103/physreve.68.035102
74. Pelinovsky E.N. Tsunami climbing a beach and Tsunami zonation. *Sci. Tsunami Haz.* 1989. Vol. 7. P. 117–123.
75. Zhong M., Long Y., ZhangnW., Chen Z., Xie Q. Multi-Fractal Analysis of the Explosion Seismic Signal Based on Seismic Exploration. *First International Conference on Information Science and Engineering (ICISE '09)*: Proc. Nanjing, China, 26–28 Dec. 2009. IEEE: 2009. P. 600–603. DOI: 10.1109/ICISE.2009.766
76. Bloomfield P., Nychka, D. Climate spectra and detecting climate change. *Clim. Change*. 1992. Vol. 21, Iss. 3. P. 275–287. DOI: 10.1007/bf00139727
77. Mandelbrot B.B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1977. 468 p.
78. Кіріченко Л.О., Радівілова Т.А. Фрактальний аналіз самоподібних і мультифрактальних часових рядів. Монографія. Харків: ХНУРЕ, 2019. 106 с.
79. Fulleknig M., Mareev E., Rycroft M. (ed.). *Sprites, elves and intense lightning discharges*. NATO Science Series II. Dordrecht: Springer, 2006.
80. Potapov A., Cerman V. Features of multi-fractal structure of high-altitude lightning discharges in the ionosphere: elves, jets, sprites. *J. Eng.* 2019. Vol. 2019, Iss. 20. P. 6781–6783. DOI: 10.1049/joe.2019.0478
81. Kumar S., Cuntz M., Musielak Z.E. Fractal and Multifractal Analysis of the Rise of Oxygen in Earth's Early Atmosphere. *Chaos Solit. Fractals*. 2015. Vol. 77. P. 296–303. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.06.007
82. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Рахлин А.В. О некоторых особенностях фрактальной структуры развитой мелкомасштабной ионосферной турбулентности. *Изв. вузов. Радиофизика*. 2008. Т. LI. № 4. С. 287–294.
83. Burlaga L.F., Klein L. W. Fractal structure of the interplanetary magnetic field. *J. Geophys. Res.* 1986. Vol. 91, Iss. A1. P. 347–350. DOI: 10.1029/ja091ia01p00347
84. Черногор Л.Ф., Домнин И.Ф. *Физика геокосмических бурь*. Монография. Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2014. 408 с.
85. Burlaga L.F., Wang C., Ness N.F. A model and observations of the multifractal spectrum of the heliospheric magnetic field strength fluctuations near 40 AU. *Geophys. Res. Lett.* 2003. Vol. 30, Iss. 10. 1543. DOI: 10.1029/2003GL016903
86. Иванов С.С. Мультифрактальные свойства и размерность аттрактора обращений геомагнитного поля. *Геомагнетизм и аэронаука*. 1996. Т. 36, № 4. С. 149–156.
87. Mandelbrot B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science*. 1967. Vol. 156, Iss. 3775. P. 636–638.
88. Burton R.K., McPherron R.L., Russell C.T. An empirical relationship between interplanetary conditions and Dst. *J. Geophys. Res.* 1975. Vol. 80, Iss. 31. P. 4204–4214. DOI: 10.1029/JA080i031p04204
89. Yu Z.G., Anh V.V., Wanliss J.A., Watson S.M. Chaos game representation of the Dst index and prediction of geomagnetic storm events. *Chaos Solit. Fractals*. 2007. Vol. 31, Iss. 3. P. 736–746. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.12.046
90. Wanliss J.A. Nonlinear variability of SYM-H over two solar cycles. *Earth Planets Space*. 2004. Vol. 56. P. e13–e16. DOI: 10.1186/BF03352507
91. Toledo B., Medina P., Blunier S., Rogan J., Stepanova M., Valdivia J. Multifractal Characteristics of Geomagnetic Field Fluctuations for the Northern and Southern Hemispheres at Swarm Altitude. *Entropy*. 2021. Vol. 23, Iss. 5. 558. DOI: 10.3390/e23050558
92. Ioshpa B.A., Obridko V.I.M., Rudenchik E.A. Fractal Properties of Solar Magnetic Fields. *Astron. Lett.* 2008. Vol. 34, Iss. 3. P. 210–216. DOI: 10.1134/S1063773708030080
93. Vitinskii Yu.I. Solar Activity Forecasting. *NASA TTF-289 TT65-50115*. NASA, 1965.
94. Mandelbrot B., Wallis J.R. Computer experiments with fractional Gaussian noises. Pt. 1. Averages and variancrs. *Water Resour. Res.* 1969. Vol. 5, Iss. 1. P. 228–241.
95. Rypdal M., Rypdal K. Is there long-range memory in solar activity on timescales shorter than the sunspot period? *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2012. Vol. 117, Iss. A4. DOI: 10.1029/2011ja017283
96. Ruzmaikin A., Feynman J., Robinson P. Long-term persistence of solar activity. *Solar Phys.* 1994. Vol. 149, Iss. 2. P. 395–403. DOI: 10.1007/BF00690625
97. Ogurtsov M.G. New Evidence for Long-Term Persistence in the Sun's Activity. *Solar Phys.* 2004 Vol. 220, Iss. 1. P. 93–105. DOI: 10.1023/b:sola.0000023439.59453.e5
98. Kim R.-S., Yi Y., Cho K., Moon Y.-J., Kim S. Fractal Dimension and Maximum Sunspot Number in Solar Cycle. *J. Astron. Space Sci.* 2006. Vol. 23, Iss. 3. P. 227–236. DOI: 10.5140/JASS.2006.23.3.227
99. Qin Z. A fractal study on sunspot relative number. *Chin. Astron. Astrophys.* 1994. Vol. 18, Iss. 3. P. 313–318. DOI: 10.1016/0275-1062(94)90045-0

100. Weiss N.O., and Foukal P. Periodicity and Aperiodicity in Solar Magnetic Activity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A. Math. Phys. Sci.* 1990. Vol. 330, No. 1615. The Earth's Climate and Variability of the Sun Over Recent Millennia: Geophysical, Astronomical and Archaeological Aspect. P. 617–625.
101. Movahed M.S., Jafari G.R., Ghasemi F., Rahvar S., Tabar M.R.R. Multifractal detrended fluctuation analysis of sunspot time series. *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* 2006. Iss. 02. P. 02003(9 p.). DOI: 10.1088/1742-5468/2006/02/p02003
102. Hu J., Gao J., Wang X. Multifractal analysis of sunspot time series: the effects of the 11-year cycle and Fourier truncation. *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* 2009. Vol. 02. P. 02066(20 p.). DOI: 10.1088/1742-5468/2009/02/p02066
103. Wu N., Li Q.-X., Zou P. Multifractal properties of solar filaments and sunspots numbers. *New Astron.* 2015. Vol. 38. P. 1–10. DOI: 10.1016/j.newast.2014.12.008
104. Zelenyi L.M., Milovanov A.V. Fractal properties of sunspots. *Sov Astron. Lett.* 1991. Vol. 17, no. 6. P. 425–427.
105. Зеленый Л.М., Милованов А.В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики. *Успехи физ. наук.* 2004. Т. 174, № 8. С. 809–852.
106. Козлов В.И. Оценка скейлинговых свойств динамики флуктуаций космических лучей в цикле солнечной активности. *Геомагнетизм и аэрономия.* 1999. Т. 39, № 1. С. 100–104.
107. Вальчук Т.Е., Могилевский Э.И. Дискретность пространственно-временных проявлений солнечной активности и солнечно-земных связей. *Геомагнетизм и аэрономия.* 2009. Т. 49, № 5. С. 579–584.
108. Onishchenko A., Chernogor L., Lazorenko O. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid. *Eskişehir Technical Univ. J. of Sci. and Tech. A – Appl. Sci. and Eng.* 2019. Vol. 20. P. 188–192.
109. Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. *Сверхширокополосные сигналы и процессы.* Монография. Харьков: Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, 2009. 576 с.
110. Chernogor L.F., Lazorenko O.V., Onishchenko A.A. Multi-Fractal Analysis of the Gravitational Waves. *Journal of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Physics.* 2017. No. 26. P. 33–39.
111. Chernogor L.F., Lazorenko O.V., Onishchenko A.A. Fractal Analysis of the Gravitational Waves as a Unique Ultra-Wideband Process. *Proc. 9th Int. Conf. on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals.* Odessa, Ukraine. 4–7 Sept. 2018. Odessa, 2018. P. 34–39.
112. Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116, Iss. 6. P. 061102(16 p.). DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102
113. Черногор Л.Ф. *Нелинейная радиофизика.* Учебник. Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2010. 173 с.
114. Turcotte D.L. The relationship of fractals in geophysics to "the new science". *Chaos Solit. Fractals.* 2004. Vol. 19, Iss. 2. P. 255–258. DOI: 10.1016/s0960-0779(03)00039-0
115. Schulke T., Siemroth P. Vacuum arc cathode spots as a self-similarity phenomenon. *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1996. Vol. 24, Iss. 1. P. 63–64. DOI: 10.1109/27.491692
116. Potapov A.A. Fractal Radar: Towards 1980–2015. *The 8th CHAOS Int. Conf.:* Proc, Paris, France, 26–29 May 2015. Paris: Henri Poincare Institute, 2015.
117. Kagan Y.Y., Knopoff L. Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 1980. Vol. 62. P. 303–320.
118. Sadovskiy M.A., Golubeva T.V., Pisarenko V.F., Shnirman M.G. Characteristic dimensions of rock and hierarchical properties of seismicity. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Fiz. Zemli (USSR).* 1984. No. 2. P. 3–15.
119. Okubo P.G., Aki K. Fractal geometry in the San Andreas Fault System. *J. Geophys. Res.* 1987. Vol. 92. P. 345–355.
120. Aviles C.A., Scholz C.H., Boatwright J. Fractal analysis applied to characteristic segments of the San Andreas Fault. *J. Geophys. Res.* 1987. Vol. 92. P. 331–344.
121. D'Amico S., ed. *Earthquake Research and Analysis – Seismology, Seismotectonic and Earthquake Geology.* Rijeka: InTech, 2012. 416 p.
122. Brown S.R., Scholz C.H. Broad band with study of the topography of natural rock surfaces. *J. Geophys. Res.* 1985. Vol. 90. P. 12575–12582.
123. Scholz C.H., Aviles C.A. The fractal geometry of faults and faulting. Das S., Boatwright J., Scholz C.H., eds. *Earthquake Source Mechanics, Am. Geophys. Un. Maurice Ewing Ser. 6.* 1986. P. 147–156.
124. Sammis C.G., Biegel R.L. Fractals, Fault-gouge, and Friction. *Pure Appl. Geophys.* 1989. Vol. 131, Iss. 1–2. P. 255–271.
125. Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* San Diego, CA: Academic Press, 1998.
126. Kantelhardt J.W., Zschiegner S.A., Koscielny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., Stanley H.E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* 2002. Vol. 316, Iss. 1–4. P. 87–114. DOI: 10.1016/s0378-4371(02)01383-3

Стаття надійшла 12.09.2023

REFERENCES

1. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2020. Fractal Radio Physics. 1. Theoretical Bases. *Radio Phys. Radio Astron.*, **25**(1), pp. 3–77 (in Russian). DOI: 10.15407/rpra25.01.003
2. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2023. Fractal Radio Physics. 2. Fractal and Multifractal Analyses of Signals and Processes. *Radio Phys. Radio Astron.*, **28**(1), pp. 5–70 (in Ukrainian). DOI:10.15407/rpra28.01.005
3. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2024. Fractal Radio Physics. 3. Fractional Calculus in Electrodynamics. *Radio Phys. Radio Astron.*, **29**(1), pp. 46–67 (in Ukrainian). DOI: https://doi.org/10.15407/rpra29.01.46

4. Nanjo, K., and Nagahama, H., 2004. Fractal properties of spatial distributions of aftershocks and active faults. *Chaos Solit. Fractals*, **19**(2), pp. 387–397. DOI: 10.1016/s0960-0779(03)00051-1
5. Quadfeul, S.-A., ed., 2012. *Fractal Analysis and Chaos in Geosciences*. Rijeka, Croatia: InTech Press.
6. Goltz, C., 1997. *Fractal and Chaotic Properties of Earthquakes*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
7. Takayasu, H., 1990. *Fractals in the Physical Sciences. Nonlinear Science: Theory and Applications*, Manchester, New York: Manchester University Press.
8. Dimri, V.P., ed., 2005. *Fractal Behavior of the Earth System*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
9. Gil'mutdinov, A.K., Ushakov, P.A., and El-Kharazi, R., 2017. *Fractal Elements and their Applications*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ.
10. Bandt, C., Barnsley, M., Devaney, R., Falconer, K.J., Kannan, V., and Vinod Kumar, P.B., eds. *Fractals, Wavelets, and their Applications: Contributions from the International Conference and Workshop on Fractals and Wavelets (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)*. Switzerland: Springer Int. Publ., 2014.
11. Di Ieva, A., ed., 2016. *The Fractal Geometry of the Brain*. New York: Springer-Verlag.
12. Werner, D.H., and Mittra, R., 1999. *Frontiers in Electromagnetics, IEEE Press Series on Microwave Technology and RF*. New York: Wiley–IEEE Press.
13. Jaggard, D.L., 1997. Fractal Electrodynamics: From Super Antennas to Superlattices. In: Levy-Vehel, J., Lutton, E., and Tricot, C., 1997. *Fractals in Engineering*. New York: Springer-Verlag, pp. 204–221.
14. Berry, M.V., 1979. Diffractals. *J. Phys.*, **A12**, pp. 781–797.
15. Tatarskii, V.I., 1961. *Wave Propagation in a Turbulent Medium*. New York: McGraw-Hill.
16. Chernov, L.A., 1960. *Wave Propagation in a Random Medium*. New York: McGraw-Hill.
17. Kolmogorov, A.N., 1961. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds' number, and Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. In: Friedlander, S.K., and Topper, L., eds., 1961. *Turbulence, Classical Papers on Statistical Theory*. New York: Interscience.
18. Jaggard, D.L., and Sun, X., 1989. Scattering from bandlimited fractal fibers. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **37**(12), pp. 1591–1597. DOI: 10.1109/8.45102
19. Franceschetti, G., and Riccio, D., 2007. *Scattering, natural surfaces, and fractals*. Elsevier.
20. Werner, D.H., and Ganguly, S., 2003. An overview of fractal antenna engineering research. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, **45**(1), pp. 38–57. DOI: 10.1109/map.2003.1189650
21. Cohen, N., 1995. Fractal Antennas: Part 1. *Commun. Q.*, pp. 7–22.
22. Puente, C., Romeu, J., Pous, R., Garcia, X., and Benitez, F., 1996. Fractal multiband antenna based on the Sierpinski gasket. *Electron. Lett.*, **32**(1), pp. 1–2. DOI: 10.1049/el:19960033
23. Puente, C., Navarro, M., Romeu, I., and Pous, R., 1998. Variations on the fractal Sierpinski antenna flare angle. In: *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. 1998. Digest. Antennas: Gateways to the Global Network. Held in Conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting (Cat. No.98CH36194). Atlanta, Georgia, 21–26 June 1998. IEEE, 1998, pp. 1–4. DOI: 10.1109/aps.1998.701794
24. Cohen, N., 1996. Fractal Antennas. Part 2. *Commun. Q.*, pp. 53–66.
25. Karmakar, A., 2020. Fractal antennas and arrays: a review and recent developments. *Int. J. Microw. Wirel. Technol.*, pp. 1–25. DOI: 10.1017/s1759078720000963
26. Cohen, N., Hohfeld, R., Moschella, D., and Salkind, P., 2003. Fractal wideband antennas for software defined radio, UWB, and multiple platform applications. In: *Radio and Wireless Conference, RAWCON '03*. Proc. Boston, MA, USA, 8–13 Aug. 2003. IEEE, 2003. DOI: 10.1109/rawcon.2003.1227902
27. Walker, G.J., and James, J.R., 1998. Fractal Volume Antennas. *Electron. Lett.*, **34**(16), pp. 1536–1537. DOI: 10.1049/el:19981135
28. Al-Zabee, A.A.K., Jabbar, S.Q., and Wang, D., 2016. Fractal Antennas (Study and Review). *Int. J. Comput. Technol.*, **15**(13), pp. 7387–7400. DOI: 10.24297/ijct.v15i13.31
29. Frame, M., and Urry, A., 2016. *Fractal Worlds: Grown, Built, and Imagined*. New Haven, London: Yale University Press.
30. FRACTALCOMS: Exploring the limits of Fractal Electrodynamics for the future telecommunication technologies IST-2001-33055. *Final Report Task 4.3* by J.M. Gonzalez, J. Romeu, E. Cabot, and J.R. Mosig.
31. Sabban, A., 2018. *Novel Wearable Antennas for Communication and Medical Systems*. Taylor & Francis Group.
32. Even, C., Russ, S., Repain, V., Pieranski, P., and Sapoval, B., 1999. Localizations in Fractal Drums: An Experimental Study. *Phys. Rev. Lett.*, **83**(4), pp. 726–729.
33. Crnojevic-Bengin, V., and Budimir, D., 2004. Novel microstrip resonators with embedded 3-D curves. In: *Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC', 2004)*. New Delhi, India, 15–18 Dec. 2004.
34. Crnojevic-Bengin, V., and Budimir, D., 2005. Novel 3-D Hilbert microstrip resonators. *Microwave Technol. Lett.*, **46**(3), pp. 195–197. DOI: 10.1002/mop.20943
35. Zemlyakov, K., and Crnojevic-Bengin, V., 2012. Planar low-pass filters based on Hilbert fractal. *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **54**(11), pp. 2577–2581.
36. Bagmanov, V.Kh., Potapov, A.A., Sultanov, A.Kh., and Zang, W., 2018. Fractal Filters Intended for Signal Detection during Remote-Sensing Data Processing. *J. Commun. Technol. Electron.*, **63**(10), pp. 1163–1169.
37. Samavati, H., Hajimiri, A., Shahani, A.R., Nasserbakht, G.N., and Lee, T.H., 1998. Fractal Capacitors. *IEEE J. Solid-State Circuits*, **33**(12), pp. 2035–2041.
38. Gassmann, F., Koetz, R., and Wokaun, A., 2003. Supercapacitors boost the fuel cell car. *Europhys. News*, **34**(5), pp. 176–180. Available from: <http://ecl.web.psi.ch/index.html>

39. Shahani, A.R., Lee, T.H., Samavati, H., Shaeffer, D.K., and Walther, S. *Lateral flux capacitor having fractal-shaped perimeters*. US Patent 6084285.
40. Xu, H., Wang, G., and An, H., 2010. Hilbert fractal curves form compact diplexer. *Microwaves & RF*, **49**(8), pp. 92–95.
41. Parker, E.A., and El Sheikh, A.N.A., 1991. Convolved Array Elements and Reduced Size Unit Cells for Frequency-Selective Surfaces. *IEE Proc. H: Microw., Antennas Propag.*, **138**(1), pp. 19–22. DOI: 10.1049/ip-h-2.1991.0004
42. Werner, D.H., Bretones, A.R., and Long, B.R., 1999. Radiation Characteristics of Thin-wire Ternary Fractal Trees. *Electron. Lett.*, **35**(8), pp. 609–610.
43. Dmitruk, N.L., Goncharenko, A.V., and Venger, E.F., 2009. *Optics of Small Particles and Composite Media*. Kyiv: Naukova Dumka Publ.
44. Kozar, A.I., 2014. *Resonant metacrystals from small magnetodielectric spheres*. Monograph. Kharkov: KhNURE Publ. (in Russian).
45. Kozar, A.I., and Khizhnyak, N.A., 1970. Reflection of electromagnetic waves from a resonant dielectric sphere in a waveguide. *Ukr. Fiz. Zh.*, **15**, pp. 847–849 (in Russian).
46. Bolotov, V.N., Kirichok, A.V., and Tkach, Yu.V., 1998. Experimental Research of Fractal Antennas. *Electromagnetic Phenomena*, **1**(4), pp. 483–498.
47. Bolotov, V.N., and Tkach, Yu.V., 2006. Signal generation with fractal spectra. *Zh. Tekh. Fiz.*, **76**(4), pp. 91–98 (in Russian).
48. Bao, Y.-J., Zhang, B., Wu, Z., Si, J.-W., Wang, M., Peng, R.-W., Lu, X., Shao, J., Li, Zh.-F., Hao, X.-P., Ming, N.-B., 2007. Surface-plasmon-enhanced transmission through metallic film perforated with fractal-featured aperture array. *Appl. Phys. Lett.*, **90**(25), 251914. DOI: 10.1063/1.2750528
49. Carlier, F., and Akulin, V.M., 2004. Quantum interference in nanofractals and its optical manifestation. *Phys. Rev. B*, **69**(11), 115433. DOI: 10.1103/physrevb.69.115433
50. Burioni, R., Cassi, D., and Neri, F.M., 2004. Electrical circuits on mesoscopic Sierpinski gaskets. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**(37), pp. 8823–8833. DOI: 10.1088/0305-4470/37/37/005
51. Marlow, C.A., Taylor, R.P., Martin, T.P., Scannell, B.C., Linke, H., Fairbanks, M.S., Hall, G.D.R., Shorubalko, I., Samuelson, L., Fromhold, T.M., Brown, C.V., Hackens, B., Faniel, S., Gustin, C., Bayot, V., Wallart, X., Bollaert, S., and Cappy, A., 2006. Unified model of fractal conductance fluctuations for diffusive and ballistic semiconductor devices. *Phys. Rev. B*, **73**(19), 195318. DOI: 10.1103/physrevb.73.195318
52. Fairbanks, M.S., McCarthy, D.N., Scott, S.A., Brown, S.A., and Taylor, R.P., 2011. Fractal electronic devices: simulation and implementation. *Nanotechnology*, **22**(36), 365304. DOI: 10.1088/0957-4484/22/36/365304
53. Fan, J.A., Yeo, W.H., Su, Y., Hattori, Y., Lee, W., Jung, S.Y., Zhang, Y., Liu, Z., Cheng, H., Falgout, L., Bajema, M., Coleman, T., Gregoire, D., Larsen, R.J., Huang, Y., Rogers, J.A., 2014. Fractal design concepts for stretchable electronics. *Nat. Commun.*, **5**(1), 3266. DOI: 10.1038/ncomms4266
54. Kuznetsov, A.P., and Kuznetsov, S.P., 1992. Fractal signal generator. *Pis'ma v ZhTF*, **18**(24), pp. 19–21 (in Russian).
55. Francis, T.S., and Yu, S.J., 1996. *Optical Storage and Retrieval: Memory: Neural Networks, and Fractals*. CRC Press.
56. Allain, C., and Cloitre, M., 1986. Optical diffraction on fractals. *Phys. Rev. B*, **33**(5), pp. 3566–3569. DOI: 10.1103/physrevb.33.3566
57. Uozumi, U., Kimura, H., and Asakura, T., 1991. Fraunhofer diffraction by Koch fractals: the dimensionality. *J. Mod. Opt.*, **38**, pp. 1335–347.
58. Tanida, J., Uemoto, A., and Ichioka, Y., 1993. Optical fractal synthesizer: concept and experimental verification. *Appl. Opt.*, **32**, pp. 653–658.
59. Berry, M., 2001. Fractal modes of unstable lasers with polygonal and circular mirrors. *Opt. Commun.*, **200**, pp. 321–330.
60. Sroor, H., Naidoo, D., Miller, S.W., Nelson, J., Courtial, J., and Forbes, A., 2019. Fractal light from lasers. *Phys. Rev. A*, **99**(1). DOI: 10.1103/physreva.99.013848.
61. Anders, A., 2008. *Cathodic Arcs: From Fractal Spots to Energetic Condensation*. Springer Science + Business Media, LLC.
62. Solntsev, V.A., 1998. Nonlinear phenomena in vacuum microelectronic structures. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Appl. Nonlinear Dynamics*, **6**(1), p. 54.
63. Isaeva, O.B., Eliseev, M.V., Rozhnev, A.G., and Ryskin, N.M., 1999. Simulation of field emission from fractal surface. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Appl. Nonlinear Dynamics*, **7**(5), pp. 33–43.
64. Iijima, S., and Ichihashi, T., 1993. Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter. *Nature*, **363**(6430), pp. 603–605. DOI: 10.1038/363603a0
65. Chernogor, L.F., 2011. Sun — interplanetary medium — magnetosphere — ionosphere — atmosphere — Earth as an open non-equilibrium non-linear physical system. *Zhurnal problem evoljutsiy otkrytykh system*, **13**, pp. 22–58 (in Russian).
66. Chernogor, L.F., 2003. Physics of the Earth, atmosphere, geocosmos in the light of the system paradigm. *Radiofizika i radioastronomiya*, **8**, pp. 59–101 (in Russian).
67. D'Amico, S., ed., 2012. *Earthquake Research and Analysis — Seismology, Seismotectonic and Earthquake Geology*. Rijeka: InTech.
68. Cello, G., Marchegiani, L., and Tondi, E., 2006. Evidence for the existence of a simple relation between earthquake magnitude and the fractal dimension of seismogenic faults: a case study from central Italy. In: Cello, G., and Malamud, B.D., eds., 2006. *Fractal Analysis for Natural Hazards*. London: Geological Society, Special Publications, pp. 133–140. DOI: 10.1144/GSL.SP.2006.261.01.10
69. Davy, P., Bour, O., De Dreuzy, J.-R., and Darcel, C., 2006. Flow in multiscale fractal fracture networks. In: Cello, G., and Malamud, B.D., eds., 2006. *Fractal Analysis for Natural Hazards*. London: Geological Society, Special Publications, pp. 31–45. DOI: 10.1144/GSL.SP.2006.261.01.03

70. Paparo, G., Gregori, G. P., Poscolieri, M., Marson, I., Angelucci, F., and Glorioso, G., 2006. Crustal stress crises and seismic activity in the Italian peninsula investigated by fractal analysis of acoustic emission, soil exhalation and seismic data. In: Cello, G., and Malamud, B.D., eds., 2006. *Fractal Analysis for Natural Hazards*. London: Geological Society, Special Publications, pp. 47–61. DOI: 10.1144/GSL.SP.2006.261.01.04
71. Telesca, L., Lapenna, V., Vallianatos, F., Makris, J., and Saltas, V., 2004. Multifractal features in short-term time dynamics of ULF geomagnetic field measured in Crete, Greece. *Chaos Solit. Fractals*, **21**(2), pp. 273–282. DOI: 10.1016/j.chaos.2003.10.020
72. Christensen, K., Danon, L., Scanlon, T., and Bak, P., 2002. Unified scaling law for earthquakes. *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 99(suppl_1), pp. 2509–2513. DOI: 10.1073/pnas.012581099
73. Corral, Á., 2003. Local distributions and rate fluctuations in a unified scaling law for earthquakes. *Phys. Rev. E*, **68**(3), 035102(R). DOI: 10.1103/physreve.68.035102
74. Pelinovsky, E.N., 1989. Tsunami climbing a beach and Tsunami zonation. *Sci. Tsunami Haz.*, **7**, pp. 117–123.
75. Zhong, M., Long, Y., Zhang, W., Chen, Z., and Xie, Q., 2009. Multi-Fractal Analysis of the Explosion Seismic Signal Based on Seismic Exploration. In: *First International Conference on Information Science and Engineering (ICISE '09)*: Proc. Nanjing, China, 26–28 Dec. 2009. IEEE: 2009. P. 600–603. DOI: 10.1109/icise.2009.766
76. Bloomfield, P., and Nychka, D., 1992. Climate spectra and detecting climate change. *Clim. Change*, **21**(3), pp. 275–287. DOI: 10.1007/bf00139727
77. Mandelbrot, B.B., 1977. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.
78. Kirichenko, L.O., and Radivilova, T.A., 2019. *Fractal analysis of self-similar and multifractal time series*. Monograph. Kharkiv: KhNURE Publ. (in Ukrainian).
79. Fulleknig, M., Mareev, E., and Rycroft, M., eds., 2006. *Sprites, elves and intense lightning discharges*. NATO Science Series II. Dordrecht: Springer.
80. Potapov, A., and Cerman, V., 2019. Features of multi-fractal structure of high-altitude lightning discharges in the ionosphere: elves, jets, sprites. *J. Eng.*, 2019(20), pp. 6781–6783. DOI: 10.1049/joe.2019.0478
81. Kumar, S., Cuntz, M., and Musielak, Z.E., 2015. Fractal and Multifractal Analysis of the Rise of Oxygen in Earth's Early Atmosphere. *Chaos Solit. Fractals*, **77**, pp. 296–303. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.06.007
82. Alimov, V.A., Vybornov, F.I., Rakhlin, A.V., 2008. On some features of the fractal structure of developed small-scale ionospheric turbulence. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika*, **LI**(4), pp. 287–294 (in Russian).
83. Burlaga, L.F., and Klein, L.W., 1986. Fractal structure of the interplanetary magnetic field. *J. Geophys. Res.*, **91**(A1), pp. 347–350. DOI: 10.1029/ja091ia01p00347
84. Chernogor, L.F., and Domnin, I.F., 2014. *Physics of geocosmic storms*. Monograph. Kharkov: KhNU imeni V.N. Karazina Publ. (in Russian).
85. Burlaga, L.F., Wang, C., and Ness, N.F., 2003. A model and observations of the multifractal spectrum of the heliospheric magnetic field strength fluctuations near 40 AU. *Geophys. Res. Lett.*, **30**(10), 1543. DOI: 10.1029/2003GL016903
86. Ivanov, S.S., 1996. Multifractal properties and dimension of the geomagnetic field reversal attractor. *Geomagnetizm i aeronomiya*, **36**(4), pp. 149–156 (in Russian).
87. Mandelbrot, B., 1967. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science*, **156**(3775), pp. 636–638.
88. Burton, R.K., McPherron, R.L., and Russell, C.T., 1975. An empirical relationship between interplanetary conditions and Dst. *J. Geophys. Res.*, **80**(31), pp. 4204–4214. DOI: 10.1029/JA080i031p04204
89. Yu, Z.G., Anh, V.V., Wanliss, J.A., and Watson, S. M., 2007. Chaos game representation of the Dst index and prediction of geomagnetic storm events. *Chaos Solit. Fractals*, **31**(3), pp. 736–746. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.12.046
90. Wanliss, J.A., 2004. Nonlinear variability of SYM-H over two solar cycles. *Earth Planets Space*, **56**, pp. e13–e16. DOI: 10.1186/BF03352507
91. Toledo, B., Medina, P., Blunier, S., Rogan, J., Stepanova, M., and Valdivia, J., 2021. Multifractal Characteristics of Geomagnetic Field Fluctuations for the Northern and Southern Hemispheres at Swarm Altitude. *Entropy*, **23**(5), 558. DOI: 10.3390/e23050558
92. Ioshpa, B.A., Obridko, V.I.M., and Rudenichik, E.A., 2008. Fractal Properties of Solar Magnetic Fields. *Astron. Lett.*, **34**(3), pp. 210–216. DOI: 10.1134/S1063773708030080
93. Vitinskii, Yu.I., 1965. Solar Activity Forecasting. *NASA TTF-289 TT65-50115*.
94. Mandelbrot, B., and Wallis, J.R., 1969. Computer experiments with fractional Gaussian noises. *Water Resour. Res.*, **5**(1), pp. 228–241.
95. Rypdal, M., and Rypdal, K., 2012. Is there long-range memory in solar activity on timescales shorter than the sunspot period? *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, **117**(A4). DOI: 10.1029/2011ja017283
96. Ruzmaikin, A., Feynman, J., and Robinson, P., 1994. Long-term persistence of solar activity. *Solar Phys.*, **149**(2), pp. 395–403. DOI: 10.1007/BF00690625
97. Ogurtsov, M.G., 2004. New Evidence for Long-Term Persistence in the Sun's Activity. *Solar Phys.*, **220**(1), pp. 93–105. DOI: 10.1023/b:sola.0000023439.59453.e5
98. Kim, R.-S., Yi, Y., Cho, K., Moon, Y.-J., and Kim, S., 2006. Fractal Dimension and Maximum Sunspot Number in Solar Cycle. *J. Astron. Space Sci.*, **23**(3), pp. 227–236. DOI: 10.5140/JASS.2006.23.3.227
99. Qin, Z., 1994. A fractal study on sunspot relative number. *Chin. Astron. Astrophys.*, **18**(3), pp. 313–318. DOI: 10.1016/0275-1062(94)90045-0

100. Weiss, N.O., and Foukal, P., 1990. Periodicity and Aperiodicity in Solar Magnetic Activity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A. Math. Phys. Sci.*, **330**(1615). The Earth's Climate and Variability of the Sun Over Recent Millennia: Geophysical, Astronomical and Archaeological Aspect, pp. 617–625.
101. Movahed, M.S., Jafari, G.R., Ghasemi, F., Rahvar, S., and Tabar, M.R.R., 2006. Multifractal detrended fluctuation analysis of sunspot time series. *J. Stat. Mech.: Theory Exp.*, 02, 02003(9 p.). DOI: 10.1088/1742-5468/2006/02/p02003
102. Hu, J., Gao, J., and Wang, X., 2009. Multifractal analysis of sunspot time series: the effects of the 11-year cycle and Fourier truncation. *J. Stat. Mech.: Theory Exp.*, **02**, 02066. DOI: 10.1088/1742-5468/2009/02/p02066
103. Wu, N., Li, Q.-X., and Zou, P., 2015. Multifractal properties of solar filaments and sunspots numbers. *New Astron.*, **38**, pp. 1–10. DOI: 10.1016/j.newast.2014.12.008
104. Zelenyi, L.M., and Milovanov, A.V., 1991. Fractal properties of sunspots. *Sov Astron. Lett.*, **17**(6), pp. 425–427.
105. Zelenyi, L.M., and Milovanov, A.V., 2004. Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems of space electrodynamics. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, **174**(8), pp. 809–852 (in Russian).
106. Kozlov, V.I., 1999. Estimation of the scaling properties of the dynamics of cosmic ray fluctuations in the solar activity cycle. *Geomagnetizm i aeronomiya*, **39**(1), pp. 100–104 (in Russian).
107. Val'chuk, T.E., and Mogilevtskiy, E.I., 2009. Discreteness of space-time manifestations of solar activity and solar-terrestrial relations. *Geomagnetizm i aeronomiya*, **49**(5), pp. 579–584 (in Russian).
108. Onishchenko, A., Chernogor, L., and Lazorenko, O., 2019. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid. *Eskişehir Technical Univ. J. of Sci. and Tech. A – Appl. Sci. and Eng.*, **20**, pp. 188–192.
109. Lazorenko, O.V., and Chernogor, L.F., 2009. *Ultrawideband signals and processes*. Monograph. Kharkov: V.N. Karazin Kharkiv National University Publ. (in Russian).
110. Chernogor, L.F., Lazorenko, O.V., and Onishchenko, A.A., 2017. Multi-Fractal Analysis of the Gravitational Waves. *Vestnik of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Physics*, **26**, pp. 33–39.
111. Chernogor, L.F., Lazorenko, O.V., and Onishchenko, A.A., 2018. Fractal Analysis of the Gravitational Waves as a Unique Ultra-Wideband Process. In: *Proc. 9th Int. Conf. on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*. Odessa, Ukraine, 4–7 Sept. 2018, pp. 34–39.
112. Abbott, B.P. et al., 2016. Observation of Gravitational waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, **116**(6), 061102 (16 p.). DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102
113. Chernogor, L.F., 2010. *Nonlinear radiophysics*. Textbook. Kharkov: V.N. Karazin Kharkiv National University Publ. (in Russian).
114. Turcotte, D.L., 2004. The relationship of fractals in geophysics to "the new science". *Chaos Solit. Fractals*, **19**(2), pp. 255–258. DOI: 10.1016/s0960-0779(03)00039-0
115. Schulke, T., and Siemroth, P., 1996. Vacuum arc cathode spots as a self-similarity phenomenon. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **24**(1), pp. 63–64. DOI: 10.1109/27.491692
116. Potapov, A.A., 2015. Fractal Radar: Towards 1980–2015. In: *The 8th CHAOS Int. Conf.*: Proc. Paris, France, 26–29 May 2015. Paris: Henri Poincare Institute
117. Kagan, Y.Y., and Knopoff, L., 1980. Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **62**, pp. 303–320.
118. Sadovskiy, M.A., Golubeva, T.V., Pisarenko, V.F., Shnirman, M.G., 1984. Characteristic dimensions of rock and hierarchical properties of seismicity. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Fiz. Zemli (USSR)*, **2**, pp. 3–15.
119. Okubo, P.G., and Aki, K., 1987. Fractal geometry in the San Andreas Fault System. *J. Geophys. Res.*, **92**, pp. 345–355.
120. Aviles, C.A., Scholz, C.H., and Boatwright, J., 1987. Fractal analysis applied to characteristic segments of the San Andreas Fault. *J. Geophys. Res.*, **92**, pp. 331–344.
121. D'Amico, S. ed., 2012. *Earthquake Research and Analysis – Seismology, Seismotectonic and Earthquake Geology*. Rijeka: InTech Publ.
122. Brown, S.R., and Scholz, C.H., 1985. Broad band with study of the topography of natural rock surfaces. *J. Geophys. Res.*, **90**, pp. 12575–12582.
123. Scholz, C.H., and Aviles, C.A., 1986. The fractal geometry of faults and faulting. In: Das, S., Boatwright, J., and Scholz, C.H., eds., 1986. *Earthquake Source Mechanics, Am. Geophys. Un. Maurice Ewing Ser.* **6**, pp. 147–156.
124. Sammis, C.G., and Biegel, R.L., 1989. Fractals, Fault-gouge, and Friction. *Pure Appl. Geophys.*, **131**(1–2), pp. 255–271.
125. Mallat, S., 1998. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. San Diego, CA: Academic Press.
126. Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., Stanley, H.E., 2002. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, **316**(1–4), pp. 87–114. DOI: 10.1016/s0378-4371(02)01383-3

Received 12.09.2023

O.V. Lazorenko, L.F. Chernogor

V.N. Karazin Kharkiv National University
4, Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

FRactal Radiophysics. Part 4. PRACTICAL APPLICATIONS

Subject and Purpose. At the beginning of the 21st century, a fundamentally new scientific direction was formed in radiophysics – fractal radiophysics. The subject of this review is the main practical ideas of "fractalization" in radio physics. The purpose of the work is a systematic presentation of the main results of the practical application of fractal theory in radiophysics, as well as a detailed analysis of the originality, novelty, and practical value of the obtained results.

Methods and Methodology. The results of using the fractal approach in various fields of modern radiophysics are presented. The results of the application of fractal and multifractal analysis methods for various radiophysical objects, phenomena and processes are considered. The main features, advantages and disadvantages of this approach, as well as existing problems, are highlighted.

Results. The main practical results of applying the fractal approach in radio physics are considered. The main features of solving the problem of radio wave propagation in fractal media are also discussed. The usage of fractals in applied electrodynamics is demonstrated by the example of fractal antennas, resonators, filters, capacitors, transistors, diplexers, frequency-selective surfaces and metamaterials, etc. Fractals in semiconductor and vacuum electronics are described by the example of the fractal structures of the cathode spot and the cathodes themselves, fractal electrodes and diffusers, as well as the avalanche breakdown of the p-n junction. The features of the application of fractal ideas in statistical and nonlinear radiophysics are considered. To illustrate the "fractalization" of physics and radiophysics of the geospace, the fractal processes that occur during earthquakes, in the atmosphere, ionosphere and magnetosphere, etc., are used.

Conclusions. The main directions of practical application of the theory of fractals in modern radiophysics are analyzed, as well as the features of the new results obtained, which reflect one of the main properties of the surrounding world – its fractality, are discussed.

Keywords: fractal, fractal electrodynamics, fractal medium, fractal electronics, fractal process, fractal characteristics.