

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra30.01.024>

УДК 52-17:519.2

PACS 96.12.Kz:07.05.Tr:02.50.-r

І.О. Дулова<sup>1</sup>, Н.В. Бондаренко<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України  
вул. Акад. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна

<sup>2</sup> Університет Каліфорнії – Санта Круз, м. Санта Круз, 95064, США  
E-mail: irina.dulv@gmail.com

## ЛОКАЛЬНІ ПОХИБКИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИСОТ РЕЛЬЄФУ ПОВЕРХНІ ПЛАНЕТИ, ВІДНОВЛЕНОГО ЗА ЗОБРАЖЕННЯМИ МЕТОДОМ УДОСКОНАЛЕНОЇ ФОТОКЛИНОМЕТРІЇ

**Предмет і мета роботи.** Відхилення висот рельєфу ділянки поверхні планети, обчисленого методом удосконаленої фотоклинометрії (МУФК) за набором зображень, від їх справжніх значень на малих просторових масштабах (менших за чверть розміру всієї ділянки) вивчаються шляхом комп'ютерного моделювання. Метою роботи є визначення таких «локальних» похибок обчислення висот та нахилів поверхні з використанням зображень із різними відношеннями сигнал/шум (ВСШ).

**Методи та методологія.** Метод удосконаленої фотоклинометрії застосовується для обчислення найімовірнішого рельєфу ділянки поверхні планети за її зображеннями. Вивчаються два підходи, які можна застосувати для реалізації методу: МУФК-Ф, що використовує оптимальну фільтрацію в області просторових частот за допомогою перетворення Фур'є, та МУФК-Т, у якому метод скінченних різниць застосовується для розв'язання рівняння Пуассона.

**Результати.** Тестові експерименти з відновлення топографії поверхні за зображеннями методом удосконаленої фотоклинометрії показали, що розмір дрібномасштабних деталей рельєфу, які зберігають свою форму, буде тим більшим, що меншим є ВСШ початкових зображень. У разі реалізації обчислень методом МУФК-Т розмір найменших надійно відтворюваних за формою деталей перевищує у 4 рази ( $ВСШ \geq 50$ ) та у 5 разів ( $ВСШ = 10$ ) роздільну здатність початкових зображень  $G$ . У разі використання МУФК-Ф форми рельєфу зберігаються тільки починаючи з просторових масштабів  $9G$  ( $ВСШ \geq 50$ ) та  $17G$  ( $ВСШ = 10$ ). За МУФК-Т найбільша локальна похибка була характерною для найдрібніших об'єктів поверхні:  $0.35\sigma_0$  ( $ВСШ = 1$ ) та  $0.17\sigma_0$  ( $ВСШ = 50$ ), де  $\sigma_0$  – середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу.

**Висновки.** Обчислення рельєфу поверхні методом удосконаленої фотоклинометрії за набором зображень із  $ВСШ \geq 50$  дозволяє надійно відтворити форму об'єктів, розмір яких  $\geq 4G$  та  $\geq 9G$ , з використанням МУФК-Т та МУФК-Ф відповідно. Для об'єктів, що мають розмір  $8G \dots 64G$ , локальна похибка обчислення висот досягала значень  $0.004\sigma_0 \dots 0.07\sigma_0$  (МУФК-Т) та  $0.01\sigma_0 \dots 0.08\sigma_0$  (МУФК-Ф). З метою вивчення найдрібніших об'єктів поверхні розміром  $4G \dots 8G$  рельєф потрібно відновлювати методом скінченних різниць.

**Ключові слова:** оптимальна фільтрація, похибка обчислення висоти, рельєф поверхні планети, фотометрія.

Цит у в а н н я: Дулова І.О., Бондаренко Н.В. Локальні похибки обчислення висот рельєфу поверхні планети, відновленого за зображеннями методом удосконаленої фотоклинометрії. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2025. Т. 30. № 1. С. 24–40. <https://doi.org/10.15407/rpra30.01.024>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2025

 Це стаття відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.uk>)

## Вступ

На сьогодні відомо багато методів отримання інформації про висоту поверхні, якими можна скористатись для обробки даних, одержаних з борту космічного апарата (КА). Кожен із методів має свої переваги та недоліки. Так, альтиметрія, тобто пряме зондування з борту КА, дозволяє визначити висоту поверхні відносно центру мас космічного тіла. Вимірювання здійснюються вздовж лінії орбіти КА, тож на ній можна забезпечити досить високу щільність вимірювань. Однак відстані між орбітами бувають різними на різних ділянках, і для того, щоб забезпечити високе просторове розділення, необхідно виконати велику кількість прольотів КА. Альтиметрія широко використовується у дослідженнях планетних поверхонь (див., наприклад, [1–4]).

Серед непрямих методів визначення рельєфу найбільшої популярності набула фотограмметрія, або стереометрія. Цей метод використовує явище паралаксу, а саме зміну видимого положення об'єкта залежно від положення спостерігача. Фотограмметрія дає можливість визначити висоти топографічних деталей, а просторова роздільна здатність обчисленого рельєфу залежить від щільності помітних об'єктів на зображеннях. Наприклад, для поверхні Місяця з використанням фотограмметрії побудовано глобальний розподіл висот, що має роздільну здатність приблизно 300 м [5], та майже 500 менших ділянок з роздільною здатністю близько 2 м [6].

Іншим популярним непрямим методом визначення рельєфу є фотоклинометрія [7], яка використовує залежність яскравості на зображенні поверхні від її нахилу. Рівень яскравості дозволяє обчислити нахил поверхні у кожній точці ділянки. Висоти поверхні обчислюються шляхом інтегрування поля нахилів за відповідними контурами. Якщо використовується «ідеальне» зображення, не спотворене на шляху розповсюдження випромінювання та у процесі реєстрації рівня яскравості, то різниця висот у двох точках поверхні залишається незмінною, незважаючи на вибір шляху інтегрування. Такий «традиційний» варіант фотоклинометрії [7] широко застосовували на ранніх етапах дослідження планет [8–11].

Реальні експерименти з приймання та реєстрації зображень на борту КА завжди супроводжу-

ються шумами різноманітної природи [12–14]. Наявність шумів призводить до того, що результати інтегрування поля нахилів між двома точками поверхні відрізняються залежно від обраного контуру. Через це виникають труднощі у застосуванні традиційної фотоклинометрії для обробки декількох зображень ділянки поверхні [15]. Останнім часом традиційна фотоклинометрія застосовується разом із фотограмметрією [16–18], зокрема, для отримання топографії малих об'єктів Сонячної системи [19–21].

На відміну від традиційної фотоклинометрії, метод удосконаленої фотоклинометрії (МУФК) дозволяє обчислити найімовірніший рельєф ділянки поверхні за серією її зображень та врахувати випадкову шумову складову початкових даних [22, 23]. Подальший розвиток та особливості застосування методу МУФК викладено у роботах [24–27]. Згодом МУФК було успішно застосовано у визначенні рельєфу ділянок поверхні Марса [28, 29] (з припущенням незмінних фотометричних властивостей усієї поверхні у межах цих ділянок) та Місяця [27, 30].

Початкові зображення для фотоклинометрії можна отримувати у будь-якому діапазоні довжин хвиль, як для використання у її «традиційному» варіанті [31, 32], так і для МУФК [23, 24]. Крім того, МУФК можна реалізувати з використанням додаткової інформації про рельєф, наприклад, фотограмметричних карт або вимірювань альтиметра з широкою або вузькою діаграмою направленості [26, 27].

Як було зазначено вище, для обчислення найімовірнішого рельєфу з використанням МУФК підходить будь-яка кількість початкових зображень [25], у тому числі, коли наявне тільки одне зображення [28]. Проте потрібно брати до уваги, що з метою зменшення похибок обчислення висот число зображень повинно бути якнайбільшим. Для надійного обчислення висот треба мати, як мінімум, два зображення. Для одночасного з рельєфом визначення фотометричних властивостей ділянки поверхні знадобиться мати додаткові зображення, щоб забезпечити можливість визначення всіх параметрів фотометричної функції. Якщо ж існує ще більша кількість отриманих за різних умов освітлення зображень, усі вони будуть використані для підвищення точності результату відновлення [25, 33].

Глобальні похибки відновлення висот поверхні з використанням МУФК детально обговорюються в роботі [33]. Тут ми розглянемо оцінку похибок відновлення висот поверхні на дрібних просторових масштабах, тобто локальні похибки відновлення малих топографічних об'єктів. Буде виконано дослідження похибок залежно від значень відношення сигнал/шум (ВСШ) початкових зображень та від розмірів деталей рельєфу. Характеристики дрібномасштабного рельєфу важливі для вивчення текстури поверхонь, аналізу процесів їх модифікації, а також стануть у пригоді для можливого подальшого освоєння цих планетних поверхонь. Дрібномасштабним ми вважатимемо такий рельєф, просторовий розмір деталей якого менший за чверть розміру ділянки поверхні, яка досліджується. Похибки обчислення висот на таких масштабах називатимемо локальними. Буде досліджено два варіанти реалізації МУФК: із застосуванням перетворення Фур'є (МУФК-Ф) та методу скінченних різниць (МУФК-Т).

### 1. Варіанти реалізації методу МУФК та джерела виникнення похибок

Особливості застосування та реалізації методу МУФК можна знайти, наприклад, у [25–27, 30]. Тут, подібно до [33], ми обмежимося стислим викладом суті методу. Задача МУФК формулюється як пошук найімовірнішої функції  $H(x, y)$ , тобто залежності висоти поверхні  $H$  від координат  $(x, y)$ , за  $t$  наявними зображеннями  $Q_j(x, y)$ , де  $j = 1, \dots, t$ . Для реалізації обчислень необхідно знати залежність рівня яскравості зображення елементарної ділянки поверхні від її нахилу відносно джерела освітлення та спостерігача, тобто мати припущення стосовно фотометричної функції поверхні, що вивчається.

Задача МУФК розв'язується у першому наближенні, коли у ряді Тейлора для  $Q_j(x, y)$  беруть до уваги тільки два перші члени:

$$Q_j(x, y) = Q_{0j} + \bar{c}_j \bar{t}(x, y), \quad (1)$$

де  $\bar{t}(x, y)$  — обчислене за зображеннями поле нахилів;  $\bar{c}_j$  — векторна константа. Якщо  $F'$  — перша похідна обраної фотометричної функції, а умови спостереження характеризуються кутами освітлення, розсіювання та фазовим  $(\theta_j, \varepsilon_j, \psi_j)$  відпо-

відно), то  $\bar{c}_j$  обчислюється як

$$\bar{c}_j = AF'(\bar{t}, \theta_j, \varepsilon_j, \psi_j) \Big|_{\bar{t}}, \quad (2)$$

де  $A$  — альbedo, що залежить від властивостей матеріалу поверхні та її структурних особливостей, менших за масштаб від просторової роздільної здатності наявних зображень.

Надалі, як і в [33], відхилення яскравості зображень  $Q_j$  від їх постійних значень  $Q_{0j}$  буде позначено як  $J_j$ :

$$J_j(x, y) = Q_j(x, y) - Q_{0j}. \quad (3)$$

У загальному випадку обчислене поле нахилів  $\bar{t}(x, y)$  відрізняється від фактичного поля нахилів поверхні  $\nabla H$  на певну випадкову величину  $\bar{\delta}(x, y)$ , яка обумовлена наявністю у початкових зображеннях випадкового шуму реєстрації:

$$\nabla H(x, y) = \bar{t}(x, y) + \bar{\delta}(x, y).$$

Величини  $H(x, y)$  та  $\bar{\delta}(x, y)$  розглядаються як реалізації стаціонарних гауссових процесів, що мають спектральну щільність  $I_H(\bar{k})$  та  $I_{\bar{\delta}}(\bar{k})$  відповідно, де  $\bar{k}$  — вектор просторової частоти.

У першому варіанті реалізації (МУФК-Ф) оптимальна статистична оцінка кожної з фур'є-компонент найімовірнішого рельєфу за формулою Байєса [34] обчислюється як [23]:

$$\tilde{H}(\bar{k}) = \frac{i \sum_j \bar{k} \bar{c}_j \tilde{J}_j(\bar{k})}{I_{\bar{\delta}}(\bar{k}) / I_H(\bar{k}) + \sum_j (\bar{k} \bar{c}_j)^2}. \quad (4)$$

Відношення  $I_{\bar{\delta}}(\bar{k}) / I_H(\bar{k})$  — це величина, обернена щодо ВСШ. У загальному випадку для різних просторових частот  $\bar{k}$  фур'є-образу початкових зображень це відношення може бути різним. Хвиляста лінія означає фур'є-образ відповідної функції.

Найімовірніший рельєф поверхні обчислюється як обернене перетворення Фур'є від фур'є-образу рельєфу (4). Для реалізації МУФК-Ф потрібно, щоб розміри зображень дорівнювали степеню двійки, тоді є можливість застосування алгоритму швидкого перетворення Фур'є для скорочення часу обчислень.

Другий варіант реалізації методу (МУФК-Т) застосовується без переходу до частотної площини. Коли апіорні відомості щодо статистики ре-

льєфу відсутні [23, 27], обчислення виконуються у координатній площині. У цьому разі найімовірніший рельєф поверхні можна знайти як розв'язок рівняння Пуассона:

$$\Delta H(x, y) = \nabla \vec{t}(x, y). \quad (5)$$

Як і раніше,  $\vec{t}(x, y)$  — це найімовірніше поле нахилів, обчислене за початковими зображеннями. Його треба отримати перед використанням (5), мінімізуючи функцію втрат [23, 25] для оцінки оптимального значення нахилу в кожній точці  $(x, y)$  поверхні за всіма початковими зображеннями, поданими у вигляді  $J_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), див. вираз (3). З цієї метою можна застосувати будь-який прийнятний метод. У цій роботі застосовано підхід, викладений у [25].

Для розв'язання рівняння Пуассона ми застосували чисельний метод скінченних різниць з урахуванням граничної умови Неймана [35]:

$$\nabla H(x, y)|_C = \vec{t}_n(x, y), \quad (6)$$

де  $\vec{t}_n(x, y)$  — нормальна похідна  $H(x, y)$  на межі  $C$  кадру.

Варіант реалізації МУФК-Т дозволяє обробляти зображення будь-якого розміру. Недолік цього варіанта полягає у тому, що обчислення зазвичай потребують багато часу.

Одним з основних джерел похибок МУФК є перше наближення у рівнянні (2), у рамках якого розв'язано задачу оцінки найбільш імовірного рельєфу [23]. Урахування тільки першого наближення призводить до систематичних похибок відновленого рельєфу [33]. У разі використання МУФК-Ф для відновлення рельєфу за єдиним зображенням систематичні похибки сягають 96 % [28]. Крім того, похибки МУФК залежать від умов формування початкових зображень. Так, скінченні розміри початкових зображень у варіанті МУФК-Ф призводять до обмеження діапазону фур'є-спектрів обчислюваних масивів, а у координатній площині на межах кадрів виникають розриви, тому поблизу меж похибки обчислення стають максимальними.

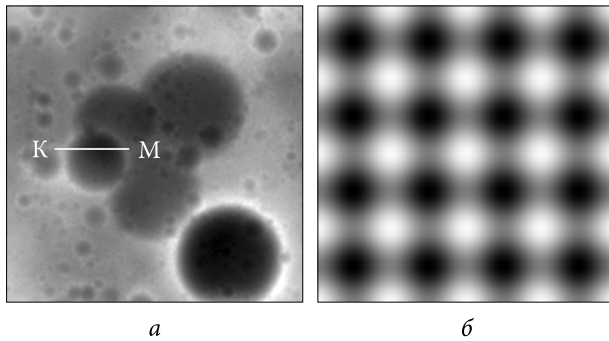
Похибки методу скінченних різниць (МСР), який використовується у рамках МУФК-Т, прямо залежать від кроку дискретизації зображень і мають порядок  $O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$ , де  $\Delta x$  та  $\Delta y$  — розміри одного пікселя зображення на поверхні

[36]. Якщо  $\Delta x = \Delta y$ , то похибка МСР матиме порядок  $O(\Delta x^2)$ . Отже, зменшення похибки МСР можна досягти шляхом зменшення кроку дискретизації, що і було показано, наприклад, у [37]. Метод скінченних різниць широко застосовується для розв'язання рівняння Пуассона [37, 38]. Похибка обчислення аналітичних функцій у разі використання МСР не перевищує 1% [38].

Поблизу меж кадру точність розв'язання рівняння Пуассона з використанням МСР залежить від вибраного варіанта обчислення граничних елементів. Якщо використовується лінійне наближення для обчислення похідних на межах кадру (як у МУФК-Т), то похибки поблизу меж матимуть порядок  $O(\Delta x^2)$  або  $O(\Delta y^2)$  і значно перевищуватимуть похибки всередині кадру [38, 39]. Зменшення похибок МУФК-Т можна досягти шляхом використання справжніх значень висот (граничні умови Діріхле [35]) замість граничних умов Неймана (6), якщо ці дані відомі.

Значущими джерелами можливих похибок у обчисленні рельєфу за фотоклинометрією є використання невідповідної фотометричної функції та помилки у визначенні умов спостереження. Різні об'єкти Сонячної системи потребують використання різних фотометричних функцій. Так, для вивчення поверхні Марса зазвичай застосовують функцію Мінарта [40–42]. Для Місяця відома дискова функція Акімова [22, 23], а більш сучасний підхід до фотометричних досліджень його поверхні обговорюється у [43]. Окрім цього, широкого застосування у вивченні поверхонь планет, супутників та астероїдів набула фотометрична функція Хапке [42, 44]. Обговорення застосування різних фотометричних функцій для фотоклинометрії наведено у [42].

У роботі [14] показано, що похибка кута освітлення на  $-10\dots+10^\circ$  призводить до похибки обчисленої глибини кратера  $+50\dots-30\%$ . Незначна похибка оцінки яскравості поверхні, величиною лише 0.6%, призводить до переоцінки глибини на 30%. Якщо використовувати для обчислень фотометричну функцію Хапке [42, 44], то нехтування шорсткістю поверхні, просторовий розмір якої менший роздільної здатності початкових зображень, призводить до помилок оцінок глибин, що сягають 60%. Наведені значення можливих похибок були розраховані за методом «традиційної» фотоклинометрії [14].



**Рис. 1.** Цифрові моделі рельєфу, що використовувалися для експериментів: *a* – вкрита кратерами поверхня, подібна до поверхні планет земної групи,  $512 \times 512$  пк (модель А); *б* – штучний рельєф,  $1024 \times 1024$  пк, діаметр «пагорбів» і «заглиблень» становить 128 пк (модель Б)

Коли ж МУФК-Ф використовується у відновленні поверхні за одним зображенням, похибка кута освітлення на  $-10...+10^\circ$  призводить до похибки оцінок висот у  $+60...-28\%$  [28]. Відновлення рельєфу поверхні Марса вказує на те, що залучення до обчислень закону розсіювання Ламберта [45] замість закону Мінарта [40–42], за яким формувалися тестові зображення, призводить до помилки оцінки висот лише у 4% [28]. З іншого боку, для поверхні Місяця використання закону Ламберта дає значно більші похибки, у середньому майже 50% [30].

Згідно з роботою [28], використання для відновлення рельєфу фотометричної функції, за якою формувались тестові зображення, призводить до подібних за рівнем похибок незалежно від виду цієї функції. З огляду на це для досліджень у поточній роботі ми використовували закон розсіювання Ламберта, що є найбільш простим для реалізації, але дозволяє отримати оцінку рівня похибок при використанні МУФК.

Варто зазначити, що в цій роботі, подібно до [33], ми припускаємо, що всі зображення, які використовуються, були суміщені. Тобто розбіжності у положенні топографічного об'єкта між усіма знімками повинні бути не більшими за роздільну здатність цих зображень. Великі розбіжності між положенням одного й того ж об'єкта на різних зображеннях, що можуть виникати через процедуру реєстрації випромінювання, потрібно усунути на етапі попередньої обробки початкових зображень. Якщо цього не зробити [33], то

слід чекати на можливість виникнення артефактів та/або спотворення форми об'єктів поверхні.

Крім того, МУФК не враховує явище паралаксу, тобто зміну видимого положення об'єкта залежно від положення спостерігача. Це накладає додаткове обмеження на відбір зображень для обробки: потрібно віддавати перевагу зображенням, в яких кут спостереження є близьким до нуля.

## 2. Тестові експерименти

Для оцінки локальних похибок обчислення висот було виконано серію комп'ютерних експериментів з відновлення рельєфу ділянки поверхні за її зображеннями методом МУФК. Модель рельєфу А (рис. 1, *a*) має розмір  $512 \times 512$  пк. Підстильна поверхня для цього рельєфу – це реалізація вінерівського випадкового процесу [46], яка потім була модифікована кратерами. Подібний ландшафт є характерним для поверхонь планет земної групи. Якщо середньоквадратичне відхилення висот тестового рельєфу позначити як  $\sigma_0$ , то його висоти змінюються у межах  $-3.59\sigma_0...2.09\sigma_0$ , а їх середнє значення дорівнює нулю.

Другий варіант моделі рельєфу (рис. 1, *б*) – це штучний рельєф: плоска поверхня, вкрита пагорбами і поглибленнями однакового діаметра, що мають симетричну форму та однакове найбільше абсолютне відхилення висот від середньої висоти поверхні  $H_F$ . Розмір ділянки моделі рельєфу Б становить  $1024 \times 1024$  пк. Діаметр деталей  $D$  змінювався від 4 до 256 пк. Було розглянуто декілька варіантів виразності такого рельєфу, тобто відношення  $t = H_F/D$  набувало значень 0.025, 0.224 та 0.432.

За кожною з цих двох моделей рельєфу (рис. 1) було сформовано набори з пар початкових зображень з кутом освітлення  $50^\circ$  для відновлення рельєфу методом МУФК (кут розсіювання дорівнював  $0^\circ$ ). У зображення додавали випадковий шум із ВСШ, яке набувало значень 1, 10, 50 та 100, що відображує різні стани приймальної апаратури. Закон Ламберта [45] було прийнято за фотометричну функцію цих поверхонь. Альbedo поверхні у межах ділянки вважали сталим, його значення дорівнювало 0.1. Кожна з пар зображень мала взаємно перпендикуляр-

ні напрямки освітлення. Також ми вважали, що роздільна здатність приймальної апаратури  $G$  дорівнювала 1 пк початкових зображень.

### 3. Локальні похибки

Тестові експерименти [33] показали, що рельєф, відновлений за зображеннями з використанням МУФК, завжди подібний до модельного. Ми дослідили, наскільки добре з точки зору топографічної форми відновлюються дрібні об'єкти та ділянки досліджуваної поверхні для різних ВСШ початкових зображень. Було обчислено коефіцієнти кореляції між відновленим з використанням МУФК-Ф та МУФК-Т рельєфом та базовою моделлю поверхні А (рис. 1, а) для локальних ділянок поверхні розміром  $W \times W$ . Значення отриманих коефіцієнтів кореляції оцінювались виходячи з гіпотези про наявність (з імовірністю 0.95) кореляції між випадковими величинами, розмір вибірок яких становить  $W \times W$  елементів, згідно з [47]. Після цього обчислювалась відносна площа поверхні, що відповідає додатній, від'ємній кореляції та її відсутності з імовірністю 0.95 (див. табл. 1). Видно, що на найкоротших просторових масштабах ( $W = 3$  пк) завжди є частина поверхні, що якимось чином відрізняється від моделі за формою. Так, за МУФК-Ф для ВСШ = 1 вона досягає майже 30%, а за МУФК-Т — лише 11%. Частка такої поверхні (табл. 1) зменшується у разі збільшення ВСШ, а також у разі використання варіанта МУФК-Т.

Найменш надійно відтворюється форма деталей, якщо ВСШ = 1. Окрім місць, де не існує кореляції між рельєфом базової моделі та відновленим з використанням МУФК-Ф, є навіть ділянки, що виявляють надійну від'ємну кореляцію (див. табл. 1). На цих місцях замість опуклостей на відновленому рельєфі може бути увігнутість і навпаки, замість увігнутості — опуклість. З використанням МУФК-Ф форми рельєфу відтворюються надійно тільки починаючи з  $W = 9$  пк для ВСШ  $\geq 50$ , а також (ці дані не включено до табл. 1)  $W = 17$  пк для ВСШ  $\geq 10$  та  $W = 128$  пк для ВСШ = 1.

У разі використання МУФК-Т для ВСШ = 1 топографічна форма деталей буде надійно відтворюватися на просторових масштабах  $W \geq 9$  пк. Якщо ВСШ = 10 або ВСШ  $\geq 50$ , то надійно від-

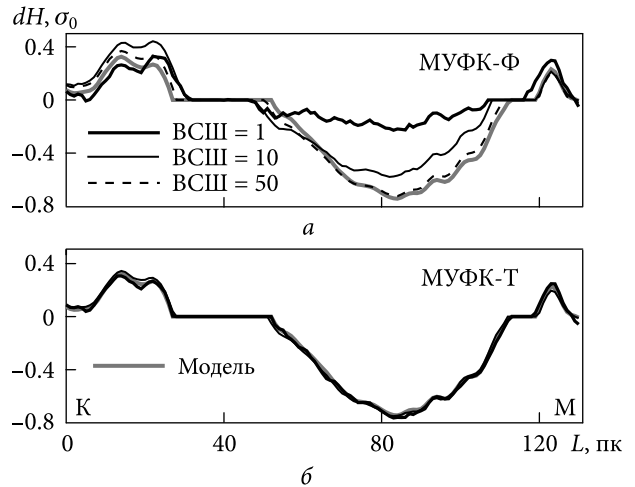


Рис. 2. Переріз дрібномасштабного рельєфу  $dH$  уздовж профілю К-М (рис. 1, а). Товстною сірою лінією показано висоту дрібномасштабного рельєфу моделі А. Рельєф, відновлений з використанням МУФК-Ф (а) та МУФК-Т (б) за зображеннями з ВСШ = 1, 10 та 50, позначено товстною, тонкою та переривчастою чорними лініями відповідно.  $L$  — довжина вздовж профілю К-М

новлені деталі будуть дрібнішими:  $W \geq 5$  пк та  $W \geq 4$  пк відповідно. Це більше від розміру найменших деталей (2 пк), які можна розрізнити на зображеннях згідно з теоремою Котельникова [48]. Дані у табл. 1, що відповідають надійному відтворенню топографічних форм, виділено сірим кольором.

Як було зазначено вище, ми вважаємо, що роздільна здатність приймальної апаратури  $G$  дорівнювала 1 пк ( $G_{im}$ ) початкових зображень. При обробці реальних зображень у випадках, коли  $G$  та  $G_{im}$  не збігаються, для оцінок треба використовувати більший просторовий розмір.

Переріз дрібномасштабного рельєфу у величинах  $\sigma_0$  (тут і далі за текстом — середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу) уздовж профілю К-М (рис. 1, а) показано на рис. 2. Під дрібномасштабним рельєфом ми маємо на увазі відхилення висот деталей поверхні  $dH$  відносно великомасштабної топографії. Для того, щоб визначити великомасштабний розподіл висоти, рельєф (як модельний, так і відновлений за вихідними зображеннями з ВСШ = 1, 10 та 50) згладжувався у плаваючому вікні розміром  $61 \times 61$  пк. Значення  $dH$  (рис. 2) обчислювались як різниця між самим рельєфом та цим попередньо обчисленим «великомасштабним» ва-

ріантом. За варіантом реалізації МУФК–Т, як це видно на рис. 2, б, для всіх заданих значень ВСШ дрібномасштабний рельєф відновлюється точніше, ніж з використанням МУФК–Ф.

Для вивчення рівня похибок обчислення висот дрібних топографічних об'єктів на поверхні було застосовано два підходи. Один із них (за моделлю рельєфу А) — це обчислення похибок у рамках обмежених ділянок. Так, за результатами відновлення модельного рельєфу обчислювалася середня похибка для ділянок, розмір  $W$  яких змінювався від 4 до 128 пк. Було використано метод плаваючого вікна. На рис. 3 показано залежність отриманої у такий спосіб похибки висот  $\varepsilon_H$  та градієнта висоти  $\varepsilon_\xi$  від розміру локальної ділянки поверхні  $W$ . Результати, що відповідають відновленню рельєфу з використанням МУФК–Ф, позначено суцільними кривими, а за МУФК–Т — переривчастими.

Видно, що  $\varepsilon_H$  (рис. 3, а) монотонно зростає зі збільшенням розміру локальної ділянки. У разі використання МУФК–Т похибка  $\varepsilon_H$  для найбільших локальних ділянок, що вивчалися, набувала близьких за значеннями величин для всіх ВСШ початкових зображень, проте її значення

виходили істотно різними для різних ВСШ на маленьких локальних ділянках. У разі використання МУФК–Ф лінії залежності  $\varepsilon_H$  від  $W$  майже паралельні, тобто різниця між значеннями  $\varepsilon_H$  для різних ВСШ практично не залежить від  $W$ . Значення похибок обчислення градієнта висот  $\varepsilon_\xi$  у разі використання МУФК–Т залишаються практично однаковими для ділянок розміром від 8 до 128 пк.

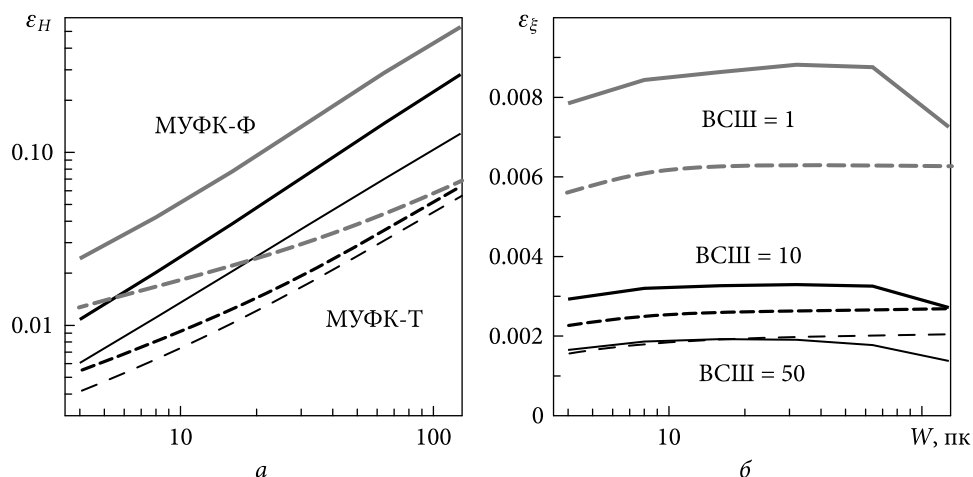
Інший підхід до визначення локальних похибок — відновлення штучного рельєфу моделі Б (рис. 1, б), діаметр  $D$  деталей якого змінювався від 4 до 256 пк. Обчислення виконувалось за МУФК–Т.

На рис. 4 показано залежність  $\varepsilon_H$  від розміру об'єкта  $D$  моделі рельєфу Б для ВСШ = 1 (рис. 4, а) і ВСШ = 50 (рис. 4, б) та для варіантів виразності  $t$ , що дорівнюють 0.025, 0.224 та 0.432. Рівніша поверхня, з  $t = 0.025$  (рис. 4), характеризується точнішим відновленням форм топографічних об'єктів.

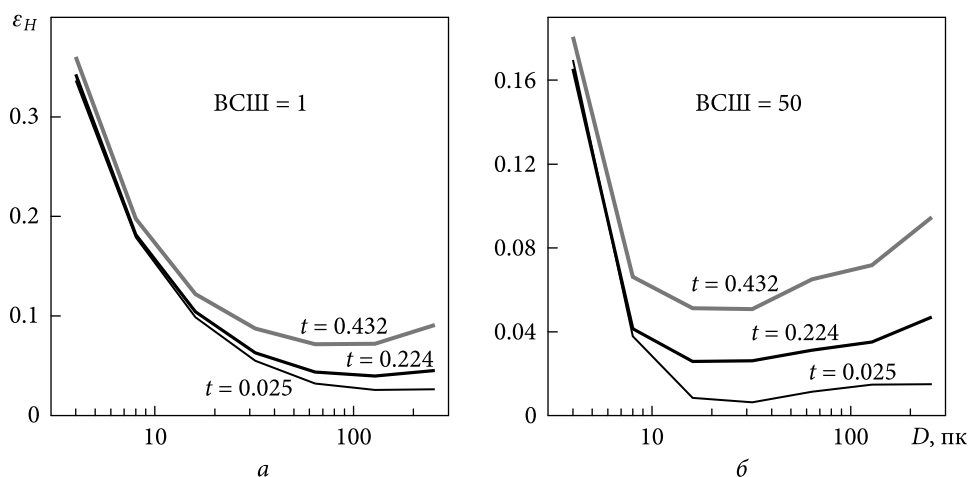
Характер зміни  $\varepsilon_H$  зі збільшенням розміру деталі  $D$  (рис. 4) відрізняється від монотонного збільшення  $\varepsilon_H$  зі збільшенням розміру ділянки  $W$  (рис. 3, а). Найнижчі значення  $\varepsilon_H$  виходять для деталей розміром від 64 до 128 пк (для ВСШ = 1,

Таблиця 1. Відносна площа поверхні, %, що відповідає наявності додатної ( $\rho > 0$ ), від'ємної ( $\rho < 0$ ) кореляції та її відсутності ( $\rho \approx 0$ ) між відновленим з використанням МУФК рельєфом та базовою моделлю А (рис. 1, а) з імовірністю 0.95, для локальних ділянок поверхні діаметром  $W$  та для різних ВСШ початкових зображень

W, пк	$\rho$	Варіант реалізації МУФК-Ф				Варіант реалізації МУФК-Т			
		ВСШ				ВСШ			
		1	10	50	100	1	10	50	100
3	$\rho > 0$	70.1	95.2	98.9	99.1	88.8	98.9	99.7	99.8
	$\rho < 0$	0.6	-	-	-	0.1	-	-	-
	$\rho \approx 0$	29.3	4.8	1.1	0.9	11.1	1.1	0.3	0.2
4	$\rho > 0$	84.0	98.3	99.7	99.7	96.3	99.8	100.0	100.0
	$\rho < 0$	0.8	-	-	-	-	-	-	-
	$\rho \approx 0$	15.2	1.6	0.3	0.3	3.7	0.2	-	-
5	$\rho > 0$	89.8	99.2	99.8	99.8	98.8	100.0	100.0	100.0
	$\rho < 0$	0.9	-	-	-	-	-	-	-
	$\rho \approx 0$	9.4	0.8	0.2	0.2	1.2	-	-	-
7	$\rho > 0$	94.1	99.7	99.9	99.9	99.9	100.0	100.0	100.0
	$\rho < 0$	1.0	-	-	-	-	-	-	-
	$\rho \approx 0$	4.9	0.3	0.1	0.1	0.1	-	-	-
9	$\rho > 0$	95.5	99.8	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
	$\rho < 0$	1.2	-	-	-	-	-	-	-
	$\rho \approx 0$	3.4	0.2	-	-	-	-	-	-



**Рис. 3.** Залежність похибки відновлення рельєфу (модель А, рис. 1, *a*) від розміру локальної ділянки  $W$ : *a* — похибка обчислення висот  $\varepsilon_H$  (у величинах  $\sigma_0$ ); *b* — похибка обчислення нахилів поверхні  $\varepsilon_\xi$ . ВСШ початкових зображень дорівнюють: 1 (товста сіра лінія), 10 (товста чорна лінія) та 50 (тонка чорна лінія). Суцільні лінії — обчислення з використанням МУФК-Ф, переривчасті — МУФК-Т



**Рис. 4.** Варіант МУФК-Т (модель рельєфу Б, рис. 1, *b*) — залежність похибки обчислення висот  $\varepsilon_H$  (у величинах  $\sigma_0$ ) від розміру об'єкта  $D$ . Початкові зображення містять шум: *a* — ВСШ = 1; *b* — ВСШ = 50

рис. 4, *a*) та від 16 до 32 пк (для ВСШ = 50, рис. 4, *b*). Деталі діаметром  $\geq 128$  пк (ВСШ = 1, рис. 4, *a*) та  $\geq 32$  пк (ВСШ = 50, рис. 4, *b*) характеризуються дещо більшими  $\varepsilon_H$ . Для найдрібніших деталей, у свою чергу, виходить досить неточне відновлення висот:  $\varepsilon_H \approx 0.35$  (ВСШ = 1, рис. 4, *a*) та  $\varepsilon_H \approx 0.175$  (ВСШ = 50, рис. 4, *b*). У цьому разі локальна похибка обчислення висоти  $\varepsilon_H$  набуває близьких значень для всіх  $t$  моделі рельєфу Б, як для ВСШ = 1, так і для ВСШ = 50 (рис. 4). Такі значення похибок значно перевищують похибки для малих локальних ділянок моделі по-

верхні А (рис. 3, *a*), що пов'язано з особливостями цього рельєфу. Якщо оцінити «виразність» поверхні моделі А як відношення середньоквадратичних відхилень висот у межах локальних ділянок до розміру цих ділянок  $W$ , її значення дорівнюють 0.01...0.003 і є суттєво меншими за виразність  $t$ , показану на рис. 4. Значення  $\varepsilon_H$  для об'єктів розміром  $D$  від 4 до 256 пк і для варіантів виразності рельєфу  $t = 0.025, 0.224$  та 0.432 (модель рельєфу Б), отримані з використанням початкових зображень із ВСШ = 1, 10, 50 та 100, наведено у табл. 2.



Ми також досліджували залежність значення похибки  $\varepsilon_H$  від нахилів поверхні  $\xi$  (рис. 5). Видно, що найбільші значення  $\varepsilon_H$  на рис. 5 пов'язані з великими нахилами поверхні як для МУФК-Ф, так і МУФК-Т. Для МУФК-Ф також спостерігається збільшення значень похибки обчислення висоти  $\varepsilon_H$  на досить плоских ділянках. Це може бути результатом того, що найбільш плоскі ділянки моделі рельєфу поверхні знаходяться на днищах великих кратерів, глибина яких у разі МУФК-Ф відновлюється неточно, особливо для менших значень ВСШ (див. рис. 2, а). Досить низькі  $\varepsilon_H$  для найкрутіших схилів пов'язані, швидше за все, з особливостями моделі рельєфу А: найкрутіші схили спостерігаються поблизу валу найбільшого кратера. Висота цього валу суттєво менша за абсолютною величиною від його глибини.

На рис. 5, в, г також показано залежність похибки  $\varepsilon_H$  від лапласіана висоти модельного рельєфу  $\Delta H$ . Значення  $\Delta H$  визначають характер форм рельєфу: від'ємні значення відповідають опуклій, а додатні — увігнутій поверхні. Видно, що найбільші значення  $\varepsilon_H$  виникають на опуклих поверхнях. На моделі рельєфу такими об'єктами

можна вважати вали кратерів. Дещо підвищені значення  $\varepsilon_H$  також спостерігаються для увігнутих об'єктів, власне, самих кратерів.

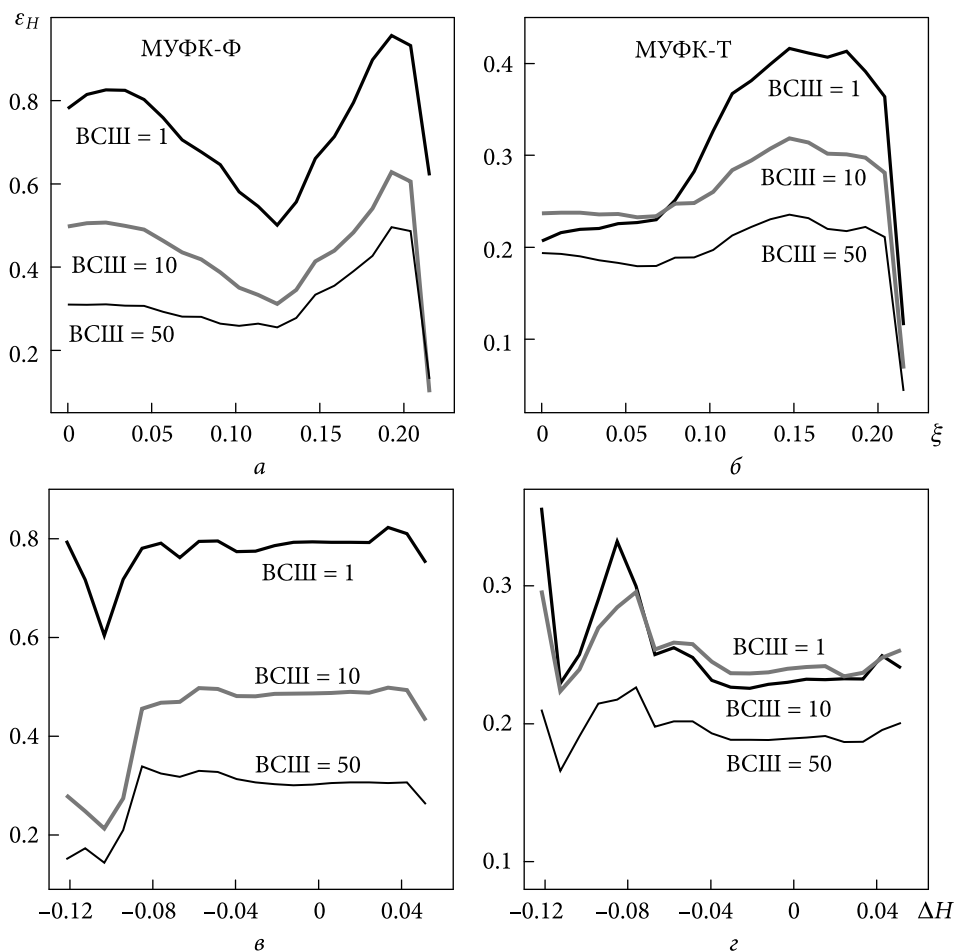
#### 4. Залежність похибки від умов спостереження

Різні умови спостережень та реєстрації зображень можуть обумовлювати різний рівень похибки висот, відновлених з використанням МУФК. Декілька прикладів, що ілюструють залежність похибки обчислення висот  $\varepsilon_H$  від кута освітлення  $\theta$ , показано на рис. 6. Обчислення виконувались з використанням МУФКТ за моделями рельєфу Б (рис. 1, б) та А (рис. 1, а) у припущенні, що ВСШ початкових зображень дорівнює 10. Було використано розміри деталей  $D$ , що дорівнюють 16 пк (рис. 6, а) та 128 пк (рис. 6, б); виразність рельєфу  $t = 0.025, 0.224$  та  $0.432$ . Для моделі А середнє значення похибки  $\varepsilon_H$  локальних ділянок поверхні розміром  $W \times W$  наведено на рис. 6, в. Значення  $W$  дорівнювало 8, 16, 32, 64 та 128 пк. Середня виразність рельєфу моделі А на ділянках, що мають указані розміри, має значення 0.116, 0.096, 0.073, 0.051 та 0.033 відповідно.

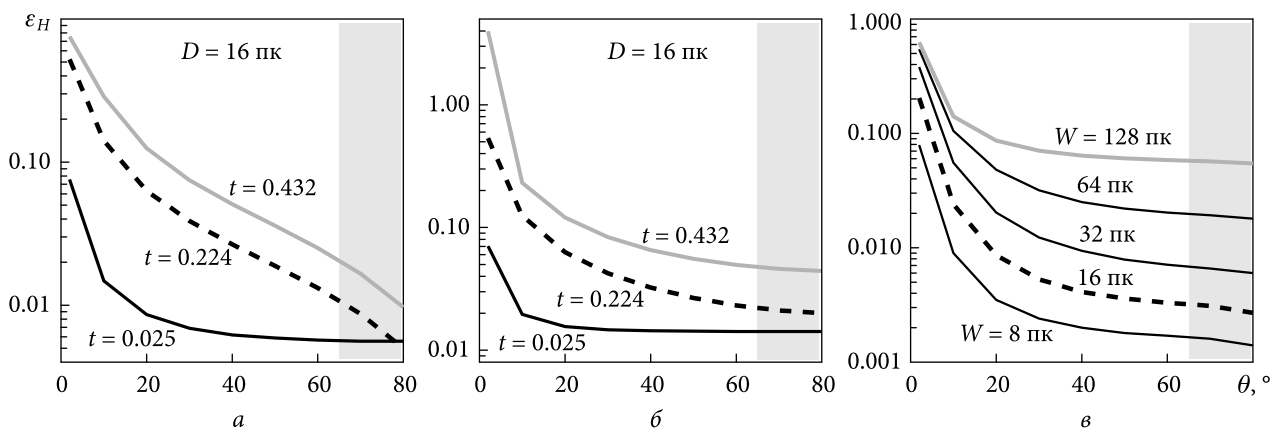
Таблиця 2. Похибки обчислення висот  $\varepsilon_H$  (у величинах  $\sigma_0$ ) для моделі поверхні Б (рис. 1, б), рельєф якої відновлено з використанням МУФК-Т, для деяких значень ВСШ початкових зображень, діаметрів об'єкта  $D$  та виразності цього об'єкта  $t$

ВСШ	$D$ , пк						
	4	8	16	32	64	128	256
$t = 0.025$							
1	0.3366	0.1791	0.0987	0.0550	0.0322	0.0257	0.0264
10	0.1672	0.0354	0.0062	0.0050	0.0144	0.0162	0.0166
50	0.1697	0.0378	0.0084	0.0063	0.0114	0.0148	0.0149
100	0.1703	0.0384	0.0089	0.0067	0.0110	0.0145	0.0146
$t = 0.224$							
1	0.3428	0.1818	0.1042	0.0631	0.0436	0.0396	0.0396
10	0.1424	0.0271	0.0266	0.0271	0.0324	0.0353	0.0353
50	0.1655	0.0414	0.0258	0.0262	0.0312	0.0350	0.0350
100	0.1704	0.0453	0.0269	0.0266	0.0310	0.0350	0.0350
$t = 0.432$							
1	0.3603	0.1976	0.1220	0.0875	0.0718	0.0722	0.0909
10	0.1366	0.0475	0.0508	0.0520	0.0656	0.0715	0.0938
50	0.1807	0.0662	0.0512	0.0508	0.0650	0.0717	0.0947
100	0.1896	0.0726	0.0548	0.0538	0.0650	0.0718	0.0949

Примітки:  $\sigma_0$  – середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу;  $t$  – відношення максимальної абсолютної висоти/глибини об'єкта (пагорба/поглиблення) до його діаметра.



**Рис. 5.** Залежність похибки обчислення висот  $\varepsilon_H$  (у величинах  $\sigma_0$ ):  $a, б$  – від нахилів  $\xi$ ;  $в, з$  – від лапласіана  $\Delta H$  модельного рельєфу (модель А, рис. 1,  $a$ ). Відновлення виконувалося за зображеннями з ВСШ = 1, 10 та 50 з використанням МУФК- $\Phi$  ( $a, в$ ) і МУФК- $T$  ( $б, з$ )



**Рис. 6.** Залежність похибки обчислених висот  $\varepsilon_H$  (у величинах  $\sigma_0$ ) від кута падіння освітлення  $\theta$ :  $a, б$  – для моделі рельєфу Б (рис. 1,  $б$ ) з розмірами об'єктів  $D = 16$  пк ( $a$ ) та  $D = 128$  пк ( $б$ ), з різною виразністю рельєфу  $t$ ;  $в$  – для моделі рельєфу А (рис. 1,  $a$ ), за умови  $W = 8, 16, 32, 64$  та  $128$  пк. Відновлення виконувалося із використанням МУФК- $T$ , початкові зображення мали ВСШ = 10;  $\sigma_0$  – середньоквадратичне відхилення висот відповідної моделі рельєфу

но. Ця виразність обчислювалась як відношення розмаху висот на ділянці до її розміру  $W$ . Видно, що на більших просторових масштабах модельна поверхня А виглядає гладкішою.

Найбільші значення  $\varepsilon_H$  спостерігаються для кутів освітлення  $<20^\circ$ . Зображення, зроблені за таких умов, найменш придатні для відновлення рельєфу методом МУФК. З іншого боку, коли  $\theta$  набуває великих значень, виникає небезпека затінення деяких ділянок поверхні на зображеннях. Діапазон  $\theta$ , який цьому сприяє, позначено на рис. 6 сірими прямокутниками. Тіні на зобра-

женнях — це ділянки зображень, де інформація про поверхню відсутня, тобто мають місце розриви функції освітленості (1).

Як і раніше, для моделі рельєфу Б менші значення  $\varepsilon_H$  характерні для рівніших поверхонь. Оцінки  $\varepsilon_H$  для деталей різних розмірів (модель Б, рис. 1, б), коли кут освітлення початкових зображень  $\theta$  змінювався від  $10^\circ$  до  $80^\circ$ , наведено у табл. 3. Більші значення  $\varepsilon_H$  відповідають більшим розмірам об'єктів (рис. 6, а, б), так само як і більшим розмірам  $W$  локальних ділянок моделі поверхні А (рис. 6, в).

Таблиця 3. Похибка обчислення висот  $\varepsilon_H$  (у величинах  $\sigma_0$ ) відновленого за зображеннями рельєфу моделі поверхні Б (рис. 1, б) з ВСШ = 10 за варіантом МУФК-Т для об'єктів діаметром  $D$ , з різною виразністю рельєфу  $t$  залежно від кута освітлення  $\theta$

$\theta, ^\circ$	$D, \text{пк}$						
	4	8	16	32	64	128	256
$t = 0.025$							
10	0.1675	0.0377	0.0148	0.0232	0.0196	0.0212	0.025
20	0.1672	0.0359	0.0086	0.0078	0.0156	0.0172	0.018
30	0.1672	0.0355	0.0069	0.0059	0.0147	0.0164	0.0168
40	0.1672	0.0354	0.0062	0.005	0.0144	0.0162	0.0166
50	0.1671	0.0354	0.0059	0.0046	0.0143	0.0161	0.0167
60	0.1671	0.0353	0.0057	0.0043	0.0142	0.0161	0.0168
70	0.1671	0.0353	0.0056	0.0042	0.0142	0.0161	0.0169
80	0.1671	0.0353	0.0056	0.0041	0.0142	0.0162	0.017
$t = 0.224$							
10	0.1756	0.1324	0.1412	0.1439	0.1244	0.1362	0.1831
20	0.1483	0.0598	0.063	0.0644	0.0629	0.0692	0.0944
30	0.1438	0.0378	0.0388	0.0396	0.0424	0.0465	0.0629
40	0.1424	0.0271	0.0266	0.0271	0.0324	0.0353	0.0462
50	0.1417	0.0206	0.0188	0.0191	0.0267	0.0289	0.0359
60	0.1414	0.0163	0.0132	0.0133	0.0232	0.0251	0.0291
70	0.1412	0.0135	0.0087	0.0086	0.0211	0.0229	0.0249
80	0.1411	0.0093	0.005	0.0046	0.02	0.0219	0.0232
$t = 0.432$							
10	0.2513	0.27	0.2879	0.295	0.2309	0.2525	0.3335
20	0.1595	0.1169	0.1253	0.129	0.1205	0.1331	0.1789
30	0.1422	0.0699	0.0748	0.0766	0.0835	0.092	0.1232
40	0.1366	0.0475	0.0508	0.052	0.0656	0.0715	0.0938
50	0.1341	0.0336	0.0359	0.0367	0.0556	0.0594	0.0753
60	0.1328	0.0235	0.0251	0.0255	0.0496	0.052	0.0628
70	0.1321	0.0156	0.0166	0.0167	0.046	0.0475	0.0544
80	0.1318	0.0093	0.0097	0.0094	0.0442	0.0453	0.0497

Примітки:  $\sigma_0$  – середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу;  $t$  – відношення максимальної висоти/глибини об'єкта (пагорба/поглиблення) до його діаметра.

## Висновки

Тестові експерименти показали, що збереження форми дрібномасштабних деталей рельєфу, відновленого за зображеннями МУФК, істотно залежить від ВСШ початкових зображень. У разі використання варіанта реалізації МУФК–Т (розв'язання рівняння Пуассона методом скінченних різниць) розмір найменших деталей, форма яких буде обчислена правильно, для  $ВСШ \geq 50$  дорівнює  $4G$ , де  $G$  — роздільна здатність початкових зображень. Якщо  $ВСШ = 10$  або  $ВСШ = 1$ , форма деталей буде надійно відтворюватися на просторових масштабах  $\geq 5G$  та  $\geq 9G$  відповідно. У разі реалізації обчислень з використанням МУФК–Ф (розв'язання методом Фур'є) форми рельєфу відтворюються надійно тільки починаючи з просторових масштабів  $9G$  ( $ВСШ \geq 50$ ),  $17G$  ( $ВСШ = 10$ ) та  $128G$  ( $ВСШ = 1$ ). З метою дослідження дрібних об'єктів для відновлення рельєфу краще використовувати варіант МУФК–Т.

Простежується стійка тенденція: у межах оброблюваної поверхні локальна похибка визначення висот для ділянок меншого розміру виявляється меншою, ніж для ділянок більшого розміру. Наприклад, для  $ВСШ = 50$  у разі використання

МУФК–Т локальна похибка відновлення висот для ділянок діаметром  $4G$  становила  $0.004\sigma_0$ , а ділянок діаметром  $128G$  —  $0.05\sigma_0$ , де  $\sigma_0$  — середньоквадратичне відхилення висот моделі рельєфу. Подібне відбувалося і для МУФК–Ф: для ділянок діаметром  $9G$  похибка досягла значення  $0.01\sigma_0$ , а ділянок діаметром  $128G$  —  $0.08\sigma_0$ .

Локальна похибка відновлення висот окремих об'єктів за МУФК–Т залежить від їх просторових розмірів. Найбільша похибка є характерною для найменших об'єктів, які тільки можна розрізнити на зображеннях. У цьому разі вона може досягати значень від  $0.17\sigma_0$  ( $ВСШ = 50$ ) до  $0.35\sigma_0$  ( $ВСШ = 1$ ). Для деталей поверхні, що мають розміри  $(16...32)G$ , локальні похибки обчислення висот набувають значень не більших за  $0.05\sigma_0$  (для  $ВСШ = 50$ ). Рівніша поверхня характеризується точнішим відновленням топографічних об'єктів. Загалом, більші похибки відновлення висот пов'язані з великими нахилами поверхні, незалежно від того, який із двох варіантів реалізації методу застосовувався.

Отримані у цій роботі оцінки похибок висот окремих об'єктів та ділянок важливі для практичного застосування відновленого за МУФК рельєфу реальних планетних поверхонь.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Ford P.G., and Pettengill G.H. Venus topography and kilometer-scale slopes. *J. Geophys. Res.* 1992. Vol. 97, Iss. E8. P. 13103–13114. DOI: 10.1029/92JE01085
2. Smith D.E., Zuber M.T., Frey H.V., Garvin J.B., Head J.W., Muhleman D.O., Pettengill G.H., Phillips R.J., Solomon S.C., Zwally H.J., Banerdt W.B., Duxbury T.C., Golombek M.P., Lemoine F.G., Neumann G.A., Rowlands D.D., Aharonson O., Ford P.G., Ivanov A.B., and Johnson C.L. Mars Orbiter Laser Altimeter: Experiment summary after the first year of global mapping of Mars. *J. Geophys. Res.* 2001. Vol. 106, Iss. E10. P. 23689–23722. DOI: 10.1029/2000JE001364
3. Smith D.E., Zuber M.T., Neumann G.A., Lemoine F.G., Mazarico E., Torrence M.H., McGarry J.F., Rowlands D.D., Head J.W., Duxbury T.H., Aharonson O., Lucey P.G., Robinson M.S., Barnouin O.S., Cavanaugh J. F., Sun X., Liiva P., Mao Dan-dan, Smith J.C., and Bartels A.E. Initial observations from the Lunar Orbiter Laser Altimeter (LOLA). *Geophys. Res. Lett.* 2010. Vol. 37, Iss. 18. Id. L18204. DOI: 10.1029/2010GL043751
4. Araki H., Tazawa S., Noda H., Ishihara Y., Goossens S., Sasaki S., Kawano N., Kamiya I., Otake H., Oberst J., and Shum C. Lunar global shape and polar topography derived from Kaguya-LALT Laser Altimetry. *Science*. 2009. Vol. 323, Iss. 5916. P. 897–900. DOI: 10.1126/science.1164146
5. Scholten F., Oberst J., Matz K.D., Roatsch T., Wählisch M., Speyerer E.J., and Robinson M.S. GLD100: The near-global lunar 100 m raster DTM from LROC WAC stereo image data. *J. Geophys. Res.: Planet.* 2012. Vol. 117, Iss. E12. DOI: 10.1029/2011JE003926
6. Henriksen M.R., Manheim M.R., Burns K.N., Seymour P., Speyerer E.J., Deran A., Boyd A.K., Howington-Kraus E., Rosiek M.R., Archinal B.A., and Robinson M.S. Extracting accurate and precise topography from LROC narrow angle camera stereo observations. *Icarus*. 2017. Vol. 283. P. 122–137. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.05.012
7. Van Diggelen J. A photometric investigation of the slopes and the heights of the ranges of hills in the Maria of the Moon. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*. 1951. Vol. 11. P. 283–289.
8. Howard A.D., Blasius K.R., and Cutts J.A. Photoclinometric determination of the topography of the Martian north polar cap. *Icarus*. 1982. Vol. 50, Iss. 2–3. P. 245–258. DOI: 10.1016/0019-1035(82)90125-7

9. Barnes J.W., Brown R.H., Soderblom L., Sotin C., Le Mouèlic S., Rodriguez S., Jaumann R., Beyer R.A., Buratti B.J., Pitman K., Baines K.H., Clark R., and Nicholson P. Spectroscopy, morphometry, and photoclinometry of Titan's dunefields from Cassini/VIMS. *Icarus*. 2008. Vol. 195, Iss. 1. P. 400–414. DOI: 10.1016/j.icarus.2007.12.006
10. Squyres S.W. The topography of Ganymede's grooved terrain. *Icarus*. 1981. Vol. 46, Iss. 2. P. 156–168. DOI: 10.1016/0019-1035(81)90204-9
11. Goldspiel J.M., Squyres S.W., and Jankowski D.G. Topography of small Martian valleys. *Icarus*. 1993. Vol. 105, Iss. 2. P. 479–500. DOI: 10.1006/icar.1993.1143
12. Nyquist H. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.* 1928. Vol. 32. P. 110–113. DOI: 10.1103/PhysRev.32.110
13. Huang T.S. *Advances in computer vision and image processing*. USA: JAI Press, 1986. 344 p.
14. Efford N.D. Sources of error in the photoclinometric determination of planetary topography: A reappraisal. *Earth Moon Planets*. 1991. Vol. 54. P. 19–58. DOI: 10.1007/BF00055046
15. Lohse V., Heipke C., and Kirk R.L. Derivation of planetary topography using multi-image shape-from shading. *Planet. Space Sci.* 2006. Vol. 54, Iss. 7. P. 661–674. DOI: 10.1016/j.pss.2006.03.002
16. Schenk P.M., and Moore J.M. Volcanic constructs on Ganymede and Enceladus: Topographic evidence from stereo images and photoclinometry. *J. Geophys. Res.* 1995. Vol. 100, Iss. E9. P. 19009–19022. DOI: 10.1029/95JE01854
17. Korokhin V., Velikodsky Yu., Shkuratov Yu., Kaydash V., Mall U., and Videen G. Using LROC WAC data for Lunar surface photoclinometry. *Planet. Space Sci.* 2018. Vol. 160. P. 120–135. DOI: 10.1016/j.pss.2018.05.020
18. Velichko S., Korokhin V., Velikodsky Yu., Kaydash V., Shkuratov Yu., Videen G., Kwiatkowski T., and Surkov Ye. Multiphase photoclinometry as applied to the lunar photometry with LROC NAC data. *Planet. Space Sci.* 2024. Vol. 246. Id. 105914. DOI: 10.1016/j.pss.2024.105914
19. Palmer E.E., Gaskell R., Daly M.G., Barnouin O.S., Adam C.D., and Lauretta D.S. Practical Stereophotoclinometry for Modeling Shape and Topography on Planetary Missions. *Planet. Sci. J.* 2022. Vol. 3, Iss. 5. Id. 102. DOI: 10.3847/PSJ/ac460f
20. Ernst C.M., Daly R.T., Gaskell R.W., Barnouin O.S., Nair H., Hyatt B.A., Al Asad M.M., and Hoch K.K.W. High-resolution shape models of Phobos and Deimos from stereophotoclinometry. *Earth Planets Space*. 2023. Vol. 75, Iss. 1. Id. 103. DOI: 10.1186/s40623-023-01814-7
21. Park R.S., Vaughan A.T., Konopliv A.S., Ermakov A.I., Mastrodemos N., Castillo-Rogez J.C., Joy S.P., Nathues A., Polanskey C.A., Rayman M.D., Riedel J.E., Raymond C.A., Russell C.T., and Zuber M.T. High-resolution shape model of Ceres from stereophotoclinometry using Dawn Imaging Data. *Icarus*. 2019. Vol. 319. P. 812–827. DOI: 10.1016/j.icarus.2018.10.024
22. Kornienko Yu.V., Akimov L.A., Dulova I.A., Nguyen Xuan Anh, and Uvarov V.N. Problem of maximal extraction of information about an astronomical object from observational data. *Кінематика і фізика небесних тіл*. 1994. Т. 10, № 1. С. 71–76. URL: <https://www.mao.kiev.ua/index.php/ua/pdf-opener?1994-10/kfnt-1994-10-1-19.pdf> (дата звернення: 23.01.2025).
23. Kornienko Yu.V. Statistical approach to filtration and the image informativity. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2006. Vol. 65, Iss. 1–5. P. 121–170. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v65.i2.30
24. Nguen Suan An, and Kornienko Yu.V. Determination of the relief and radiooptical parameters of a surface area by means of a synthetic aperture radar. *Telecommunications and Radio Engineering*. 1998. Vol. 52, Iss. 5. P. 29–33. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v52.i5.40
25. Dulova I.A., Kornienko Yu.V., and Skuratovskiy S.I. A clinometric technique for relief derivation from redundant or deficient input data. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2008. Vol. 67, Iss. 18. P. 1605–1620. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v67.i18.10
26. Kornienko Yu.V., Dulova I.A., and Bondarenko N.V. Optimal surface relief retrieval from the set of photometric and altimeter data. *50th Lunar and Planetary Science Conf.*, 2019. LPI Contribution No. 2132, id. 1125. URL: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2019/pdf/1125.pdf> (Last accessed: 24.01.2025).
27. Корнієнко Ю.В., Дулова І.О., Бондаренко Н.В. Урахування альтиметричної інформації при визначенні рельєфу поверхні планети методом поліпшеної фотоклінометрії за полем нахилів. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2021. Т. 26, № 2. С. 173–188. DOI: 10.15407/rpra26.02.173
28. Dulova I.A., Skuratovsky S.I., Bondarenko N.V., and Kornienko Yu.V. Reconstruction of the surface topography from single images with the photometric method. *Sol. Sys. Res.* 2008. Vol. 42, Iss. 6. P. 522–535. DOI: 10.1134/S0038094608060051
29. Bondarenko N.V., Dulova I.A., and Kornienko Yu.V. Topography of polygonal structures at the Phoenix landing site on Mars through the relief retrieval from the HiRISE images with the improved photoclinometry method. *Sol. Syst. Res.* 2014. Vol. 48, Iss. 4. P. 243–258. DOI: 10.1134/S0038094614040030
30. Bondarenko N.V., Dulova I.A., and Kornienko Yu.V. Photometric functions and the improved photoclinometry method: mature Lunar mare surfaces. *51st Lunar and Planetary Science Conference*, 2020. Abstract No. 1845. URL: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2020/eposter/1845.pdf> (Last accessed: 24.01.2025).
31. Wildey R.L. Radarclinometry of the Earth and Venus from Space-Shuttle and Venera-15 imagery. *Earth Moon Planets*. 1990. Vol. 48. P. 197–231. DOI: 10.1007/BF00113857

32. Watters T.R., and Robinson M.S. Radar and photoclinometric studies of wrinkle ridges on Mars. *J. Geophys. Res.* 1997. Vol. 102. Is. E5. P. 10889–10903. DOI: 10.1029/97JE00411
33. Дулова І.О., Бондаренко Н.В. Метод удосконаленої фотоклинометрії для відновлення рельєфу поверхні за зображеннями: похибки обчислення висоти та нахилів. *Радіофізика і радіоастрономія.* 2023. Т. 28, № 4. С. 304–317. DOI: 10.15407/rpra28.04. 304
34. Bayes T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 1763. Vol. 53. P. 360–418.
35. Strauss W.A. *Partial Differential Equations: An Introduction.* USA: John Wiley & Sons, 2008. 464 p.
36. Smith G.D. *Numerical Solution of Partial Difference Equation.* 2nd ed. London, Oxford University Press, 1965. 351 p.
37. Guo P. The numerical solution of Poisson equation with Dirichlet boundary conditions. *J. Appl. Math. Phys.* 2021. Vol. 9, Iss. 12, P. 3007–3018. DOI: 10.4236/jamp.2021.912194
38. Zhou L., and Yu H. Error estimate of a high accuracy difference scheme for Poisson equation with two integral boundary conditions. *Adv. Differ. Equ.* 2018. Id. 225. DOI: 10.1186/s13662-018-1682-z
39. Jomaa Z., and Macaskill C. The embedded finite difference method for the Poisson equation in a domain with an irregular boundary and Dirichlet boundary conditions. *J. Comput. Phys.* 2005. Vol. 202, Iss. 2. P. 488–506. DOI: 10.1016/j.jcp.2004.07.011
40. Pang K., and Hord C.W. Mariner 7 ultraviolet spectrometer experiment: photometric function and roughness of Mars' polar cap surface. *Icarus.* 1971. Vol. 15, Iss. 3. P. 443–453. DOI: 10.1016/0019-1035(71)90121-7
41. Jehl A., Pinet P., Baratoux D., Daydou Y., Chevrel S., Heuripeau F., Manaud N., Cord A., Rosemberg C., Neukum G., Gwinner K., Scholten F., Hoffman H., Roatsch T., and HRSC Team. Gusev photometric variability as seen from orbit by HRSC/Mars-express. *Icarus,* 2008. Vol. 197, Iss. 2. P. 403–428. DOI: 10.1016/j.icarus.2008.05.022
42. McEwen A.S. Photometric Functions for Photoclinometry and Other Applications. *Icarus.* 1991. Vol. 92, Iss. 2. P. 298–311. DOI: 10.1016/0019-1035(91)90053-V
43. Shkuratov Yu., Kaydash V., Korokhin V., Velikodsky Yu., Opanasenko N., and Videen G. Optical measurements of the Moon as a tool to study its surface. *Planet. Space Sci.* 2011. Vol. 59, Iss. 13. P. 1326–1371. DOI: 10.1016/j.pss.2011.06.011
44. Hapke B. Bidirectional reflectance spectroscopy. 1. Theory. *J. Geophys. Res.* 1981. Vol. 86. P. 3039–3054. DOI: 10.1029/JB086iB04p03039
45. Born M., and Wolf E. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light.* 1st ed. London, New York, Paris: Pergamon Press, 1959. 852 p. OCLC 489691506
46. Wiener N. *Cybernetics: or control and communication in the animal and the machine.* 1948. Cambridge, Massachusetts, USA: MIT Press. Publication date: 2019. DOI: 10.7551/mitpress/11810.001.0001
47. Korn G., and Korn T. *Mathematical handbook for scientists and engineers.* USA: Dover Publ., 2000. Revised ed.
48. Kotelnikov V.A. On the transmission capacity of the "ether" and wire in electric communications, 1933. *Adv. in Phys. Sci.* 2006. Vol. 49. P. 744–748 (reprint of the article).

Стаття надійшла 13.09.2024

## REFERENCES

1. Ford, P.G., and Pettengill, G.H., 1992. Venus topography and kilometer-scale slopes. *J. Geophys. Res.*, **97**(E8), pp. 13103–13114. DOI: 10.1029/92JE01085
2. Smith, D.E., Zuber, M.T., Frey, H.V., Garvin, J.B., Head, J.W., Muhleman, D.O., Pettengill, G.H., Phillips, R.J., Solomon, S.C., Zwally, H.J., Banerdt, W.B., Duxbury, T.C., Golombek, M.P., Lemoine, F.G., Neumann, G.A., Rowlands, D.D., Aharonson, O., Ford, P.G., Ivanov, A.B., and Johnson, C.L., 2001. Mars Orbiter Laser Altimeter: Experiment summary after the first year of global mapping of Mars. *J. Geophys. Res.* **106**(E10), pp. 23689–23722. DOI: 10.1029/2000JE001364
3. Smith, D.E., Zuber, M.T., Neumann, G.A., Lemoine, F.G., Mazarico, E., Torrence, M.H., McGarry, J.F., Rowlands, D.D., Head, J.W., Duxbury, T.H., Aharonson, O., Lucey, P.G., Robinson, M.S., Barnouin, O.S., Cavanaugh, J.F., Sun, X., Liiva, P., Mao, Dan-dan, Smith, J.C., and Bartels, A.E., 2010. Initial observations from the Lunar Orbiter Laser Altimeter (LOLA). *Geophys. Res. Lett.*, **37**(18), id. L18204. DOI: 10.1029/2010GL043751
4. Araki, H., Tazawa, S., Noda, H., Ishihara, Y., Goossens, S., Sasaki, S., Kawano, N., Kamiya, I., Otake, H., Oberst, J., and Shum, C., 2009. Lunar global shape and polar topography derived from Kaguya-LALT Laser Altimetry. *Science*, **323**(5916), pp. 897–900. DOI: 10.1126/science.1164146
5. Scholten, F., Oberst, J., Matz, K.D., Roatsch, T., Wählisch, M., Speyerer, E.J., and Robinson, M.S., 2012. GLD100: The near-global lunar 100 m raster DTM from LROC WAC stereo image data. *J. Geophys. Res.: Planet*, **117**(E12). DOI: 10.1029/2011JE003926
6. Henriksen, M.R., Manheim, M.R., Burns, K.N., Seymour, P., Speyerer, E.J., Deran, A., Boyd, A.K., Howington-Kraus, E., Rosiek, M.R., Archinal, B.A., and Robinson, M.S., 2017. Extracting accurate and precise topography from LROC narrow angle camera stereo observations. *Icarus*, **283**, pp. 122–137. DOI: 10.1016/j.icarus.2016.05.012

7. Van Diggelen, J., 1951. A photometric investigation of the slopes and the heights of the ranges of hills in the Maria of the Moon. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, **11**, pp. 283–289.
8. Howard, A.D., Blasius, K.R., and Cutts, J.A., 1982. Photoclinometric determination of the topography of the Martian north polar cap. *Icarus*, **50**(2–3), pp. 245–258. DOI: 10.1016/0019-1035(82)90125-7
9. Barnes, J.W., Brown, R.H., Soderblom, L., Sotin, C., Le Mouëlic, S., Rodriguez, S., Jaumann, R., Beyer, R.A., Buratti, B.J., Pitman, K., Baines, K.H., Clark, R., and Nicholson, P., 2008. Spectroscopy, morphometry, and photoclinometry of Titan's dunefields from Cassini/VIMS. *Icarus*, **195**(1), pp. 400–414. DOI:10.1016/j.icarus.2007.12.006
10. Squyres, S.W., 1981. The topography of Ganymede's grooved terrain. *Icarus*, **46**(2), pp. 156–168. DOI: 10.1016/0019-1035(81)90204-9
11. Goldspiel, J.M., Squyres, S.W., and Jankowski, D.G., 1993. Topography of small Martian valleys. *Icarus*, **105**(2), pp. 479–500. DOI: 10.1006/icar.1993.1143
12. Nyquist, H., 1928. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, **32**, pp. 110–113. DOI: 10.1103/PhysRev.32.110
13. Huang, T.S., 1986. *Advances in computer vision and image processing*. USA: JAI Press.
14. Efford, N.D., 1991. Sources of error in the photoclinometric determination of planetary topography: A reappraisal. *Earth Moon Planets*, **54**, pp. 19–58. DOI: 10.1007/BF00055046
15. Lohse, V., Heipke, C., and Kirk, R.L., 2006. Derivation of planetary topography using multi-image shape-from shading. *Planet. Space Sci.* **54**(7), pp. 661–674. DOI: 10.1016/j.pss.2006.03.002
16. Schenk, P.M., and Moore, J.M., 1995. Volcanic constructs on Ganymede and Enceladus: Topographic evidence from stereo images and photoclinometry. *J. Geophys. Res.*, **100**(E9), pp. 19009–19022. DOI: 10.1029/95JE01854
17. Korokhin, V., Velikodsky, Yu., Shkuratov, Yu., Kaydash, V., Mall, U., and Videen, G., 2018. Using LROC WAC data for lunar surface photoclinometry. *Planet. Space Sci.*, **160**, pp. 120–135. DOI: 10.1016/j.pss.2018.05.020
18. Velichko, S., Korokhin, V., Velikodsky, Yu., Kaydash, V., Shkuratov, Yu., Videen, G., Kwiatkowski, T., and Surkov, Ye., 2024. Multiphase photoclinometry as applied to the lunar photometry with LROC NAC data. *Planet. Space Sci.* **246**, id. 105914. DOI: 10.1016/j.pss.2024.105914
19. Palmer, E.E., Gaskell, R., Daly, M.G., Barnouin, O.S., Adam, C.D., and Lauretta, D.S., 2022. Practical Stereophotoclinometry for Modeling Shape and Topography on Planetary Missions. *Planet. Sci. J.* **3**(5), id. 102. DOI: 10.3847/PSJ/ac460f
20. Ernst, C.M., Daly, R.T., Gaskell, R.W., Barnouin, O.S., Nair, H., Hyatt, B.A., Al Asad, M.M., and Hoch, K.K.W., 2023. High-resolution shape models of Phobos and Deimos from stereophotoclinometry. *Earth Planets Space*, **75**(1), id. 103. DOI: 10.1186/s40623-023-01814-7
21. Park, R.S., Vaughan, A.T., Konopliv, A.S., Ermakov, A.I., Mastrodemos, N., Castillo-Rogez, J.C., Joy, S.P., Nathues, A., Polansky, C.A., Rayman, M.D., Riedel, J.E., Raymond, C.A., Russell, C.T., and Zuber, M.T., 2019. High-resolution shape model of Ceres from stereophotoclinometry using Dawn Imaging Data. *Icarus*, **319**, pp. 812–827. DOI: 10.1016/j.icarus.2018.10.024
22. Kornienko, Yu.V., Akimov, L.A., Dulova, I.A., Nguyen, Xuan Anh, and Uvarov, V.N., 1994. Problem of maximal extraction of information about an astronomical object from observational data. *Kinematika i fizika nebesnykh tel*, **10**(1), pp. 71–76. Available from: <https://www.mao.kiev.ua/index.php/ua/pdf-opener?1994-10/kfnt-1994-10-1-19.pdf> [viewed 23 January 2025].
23. Kornienko, Yu.V., 2006. Statistical Approach to Filtration and the Image Informativity. *Telecommunications and Radio Engineering*, **65**(1–5), pp. 121–170. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v65.i2.30.
24. Nguen, Suan An, and Kornienko, Yu.V., 1998. Determination of the relief and radiooptical parameters of a surface area by means of a synthetic aperture radar. *Telecommunications and Radio Engineering*, **52**(5), pp. 29–33. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v52.i5.40
25. Dulova, I.A., Kornienko, Yu.V., and Skuratovskiy, S.I., 2008. A clinometric technique for relief derivation from redundant or deficient input data. *Telecommunications and Radio Engineering*, **67**(18), pp. 1605–1620. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v67.i18.10
26. Kornienko, Yu.V., Dulova, I.A., and Bondarenko, N.V., 2019. Optimal surface relief retrieval from the set of photometric and altimeter data. In: *50th Lunar and Planetary Science Conf.*, LPI Contrib. No. 2132, id 1125 [online]. [viewed 24 January 2025]. Available from: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2019/pdf/1125.pdf>
27. Kornienko, Yu.V., Dulova, I.A., and Bondarenko, N.V., 2021. Involvement of altimetry information into the improved photoclinometry method for relief retrieval from a slope field. *Radio Phys. Radio Astron.*, **26**(2), pp. 173–188 (in Ukrainian). DOI: 10.15407/rpra26.02.173
28. Dulova, I.A., Skuratovskiy, S.I., Bondarenko, N.V., and Kornienko, Yu.V., 2008. Reconstruction of the surface topography from single images with the photometric method. *Sol. Sys. Res.*, **42**(6), pp. 522–535. DOI: 10.1134/S0038094608060051
29. Bondarenko, N.V., Dulova, I.A., and Kornienko, Yu.V., 2014. Topography of polygonal structures at the Phoenix landing site on Mars through the relief retrieval from the HiRISE images with the improved photoclinometry method. *Sol. Syst. Res.*, **48**(4), pp. 243–258. DOI: 10.1134/S0038094614040030

30. Bondarenko, N.V., Dulova, I.A., and Kornienko, Yu.V., 2020. Photometric functions and the improved photoclinometry method: mature Lunar mare surfaces. In: *51th Lunar and Planetary Science Conference*. Abstract No. 1845 [online]. [viewed 24 January 2025]. Available from: <https://www.hou.usra.edu/meetings/lpsc2020/eposter/1845.pdf>
31. Wildey, R.L., 1990. Radarclinometry of the earth and Venus from Space-Shuttle and Venera-15 imagery. *Earth Moon Planets*, **48**, pp. 197–231. DOI: 10.1007/BF00113857
32. Watters, T.R., and Robinson, M.S., 1997. Radar and photoclinometric studies of wrinkle ridges on Mars. *J. Geophys. Res.*, **102**(E5), pp. 10889–10903. DOI: 10.1029/97JE00411
33. Dulova, I.O., and Bondarenko, N.V., 2023. An improved photoclinometry technique for surface relief retrieval from images: error levels for height and slope estimates. *Radio Phys. Radio Astron.*, **28**(4), pp. 304–317 (in Ukrainian). DOI: 10.15407/rpra28.04.304
34. Bayes, T., 1763. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **53**, pp. 360–418.
35. Strauss, W.A., 2008. *Partial Differential Equations: An Introduction*. 2nd ed. USA: John Wiley & Sons.
36. Smith, G.D., 1965. *Numerical Solution of Partial Difference Equation*. London: Oxford University Press.
37. Guo, P., 2021. The numerical solution of Poisson equation with Dirichlet boundary conditions. *J. Appl. Math. Phys.*, **9**(12), pp. 3007–3018. DOI: 10.4236/jamp.2021.912194
38. Zhou, L., and Yu, H., 2018. Error estimate of a high accuracy difference scheme for Poisson equation with two integral boundary conditions. *Adv. Differ. Equ.*, id. 225. DOI: 10.1186/s13662-018-1682-z
39. Jomaa, Z., and Macaskill, C., 2005. The embedded finite difference method for the Poisson equation in a domain with an irregular boundary and Dirichlet boundary conditions. *J. Comput. Phys.* **202**(2). pp. 488–506. DOI: 10.1016/j.jcp.2004.07.011
40. Pang, K., and Hord, C.W., 1971. Mariner 7 ultraviolet spectrometer experiment: photometric function and roughness of Mars' polar cap surface. *Icarus*, **15**(3), pp. 443–453. DOI: 10.1016/0019-1035(71)90121-7
41. Jehl, A., Pinet, P., Baratoux, D., Daydou, Y., Chevrel, S., Heuripeau, F., Manaud, N., Cord, A., Rosemberg, C., Neukum, G., Gwinner, K., Scholten, F., Hoffman, H., Roatsch, T., and HRSC Team, 2008. Gusev photometric variability as seen from orbit by HRSC/Mars-express. *Icarus*, **197**(2), pp. 403–428. DOI: 10.1016/j.icarus.2008.05.022
42. McEwen, A.S., 1991. Photometric Functions for Photoclinometry and Other Applications. *Icarus*, **92**(2), pp. 298–311. DOI: 10.1016/0019-1035(91)90053-V
43. Shkuratov, Yu., Kaydash, V., Korokhin, V., Velikodsky, Yu., Opanasenko, N., and Videen, G., 2011. Optical measurements of the Moon as a tool to study its surface. *Planet. Space Sci.* **59**(13), pp. 1326–1371. DOI: 10.1016/j.pss.2011.06.011
44. Hapke, B., 1981. Bidirectional reflectance spectroscopy. 1. Theory. *J. Geophys. Res.*, **86**, pp. 3039–3054. DOI: 10.1029/JB086iB04p03039
45. Born, M., and Wolf, E., 1959. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 1st ed. London, New York, Paris: Pergamon Press, OCLC 489691506
46. Wiener, N., 1948. *Cybernetics: or control and communication in the animal and the machine*. Cambridge, Massachusetts, USA: MIT Press. Publication date: 2019. DOI: 10.7551/mitpress/11810.001.0001
47. Korn, G., and Korn, T., 2000. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. Dover Publ., Revised ed.
48. Kotelnikov, V.A., 2006. On the transmission capacity of the "ether" and wire in electric communications, 1933. *Adv. in Phys. Sci.* **49**, pp. 744–748 (reprint of the article).

Received 13.09.2024

I.A. Dulova<sup>1</sup> and N.V. Bondarenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics NAS of Ukraine  
12, Acad. Proskury St., Kharkiv, 61085, Ukraine

<sup>2</sup>University of California – Santa Cruz, Santa Cruz, 95064, USA

#### LOCAL HEIGHT CALCULATION ERRORS IN THE PLANET SURFACE RELIEF RETRIEVED FROM IMAGES BY THE IMPROVED PHOTOCLINOMETRY METHOD

**Subject and Purpose.** In this work, the planet surface area relief is calculated using the Improved Photoclinometry Method (IPCM) and starting from a set of source images. Height deviations from the true relief altitudes are studied by computer simulation at small spatial scales (smaller than a quarter of the area's size). We seek to estimate these "local" errors in surface heights and slopes using source images with different signal-to-noise ratios (SNRs).

**Methods and Methodology.** The improved photoclinometry method calculates the most probable relief of a planet surface area from its images. Two optional techniques implement this method. The IPCM-F technique employs the optimum Fourier-transform-based filtering in the spatial frequency domain. The IPCM-T uses the finite difference method to solve the Poisson equation.



**Results.** Computer experiments on retrieving the surface topography from the source images have shown that the higher the signal-to-noise ratio (SNR) of the initial image, the smaller the size of small-scale features that are reliably reproduced in shape. In the calculations by the IPCM-T technique, the smallest reliably reproduced features are four times the initial image resolution  $G$  at  $\text{SNR} \geq 50$  and five times at  $\text{SNR} = 10$ . With the IPCM-F, the relief features are reliably reproduced starting from spatial scales  $9G$  ( $\text{SNR} \geq 50$ ) and  $17G$  ( $\text{SNR} \geq 10$ ). With the IPCM-T, the worst local height error characterizing the smallest reliably reproduced surface features is  $0.35\sigma_0$  ( $\text{SNR} = 1$ ) and  $0.17\sigma_0$  ( $\text{SNR} = 50$ ), where  $\sigma_0$  is the root-mean-square deviation of the modeled relief height. For both IPCM implementations, larger topographic objects are characterized by local height errors  $0.01\sigma_0$  to  $0.08\sigma_0$  ( $\text{SNR} = 50$ ).

**Conclusions.** It has been shown that the surface topography retrieval by the improved photogrammetry method from a set of images with  $\text{SNR} \geq 50$  reliably reproduces shapes of size features  $\geq 4G$  (IPCM-T) and  $\geq 9G$  (IPCM-F). For  $8G$  to  $64G$  size features, the retrieved height local errors are  $0.004\sigma_0$  to  $0.07\sigma_0$  (IPCM-T) and  $0.01\sigma_0$  to  $0.08\sigma_0$  (IPCM-F). To study smaller,  $4G$  to  $8G$  size features, the topography relief should be reconstructed using the IPCM-F upon the finite difference method.

**Keywords:** *optimal filtering, height calculation error, planetary surface relief, photometry.*