

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra31.03.166>
УДК 535.421

О.В. Букін, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-9986-3894>

Г.І. Кошовий, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7991-8591>

Ю.Ф. Логвінов, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6011-8823>

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України
(ROR: <https://ror.org/03v48ps49>), Харків, Україна

E-mail: al_bukin@ukr.net

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РОЗСІЮВАННЯ ПЛОСКОЇ Е-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ ДОФРАКТАЛЬНИМИ ПРОВІДНИМИ СТРІЧКОВИМИ ГРАТКАМИ

Предмет і мета роботи. Досліджується розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі дофрактальними провідними стрічковими ґратками з імпедансом. Для математичного впорядкування стрічкових систем використовується процес створення найпростішого класу самоподібних досконалих множин зі змінною дробовою розмірністю. Розглядається асимптотична модель слабонаповнених стрічкових ґраток, яка значно спрощує задачу розсіювання. Вона дає можливість ефективно досліджувати основні характеристики розсіювання Е-поляризованої хвилі провідними стрічковими ґратками.

Методи та методологія. Математичні моделі розсіювання плоскої Е-поляризованої хвилі стрічковими ґратками отримані класичними методами (техніка інтегральних рівнянь, підхід Лорда Релея) та певними їх модифікаціями. Основна математична модель процесу взаємодії Е-поляризованої електромагнітної хвилі з провідними стрічковими ґратками подана як система інтегральних рівнянь першого роду, до якої застосовують чисельні методи. На основі дослідження розсіяного електромагнітного поля у дальній зоні знайдені важливі інтегральні характеристики розсіювання стрічковими ґратками.

Результати. Отримано математичні моделі розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі дофрактальними слабонаповненими ґратками. Запропоновані асимптотичні моделі є придатними як для визначення вихідних змінних, так і у разі дослідження основних характеристик розсіювання. Знайдені важливі інтегральні характеристики, зокрема, діаграма розсіювання, дозволяють дослідити фрактальні властивості дофрактальних провідних стрічкових ґраток з імпедансом.

Висновки. Математичні моделі розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі дофрактальними стрічковими ґратками, презентовані у статті, виявились досить ефективними як для визначення вихідних змінних, так і для дослідження основної характеристики розсіювання — діаграми розсіювання. Вони складають основу для проведення широких досліджень фрактальних властивостей основних характеристик розсіювання плоскої Е-поляризованої хвилі дофрактальними провідними стрічковими ґратками з імпедансом.

Ключові слова: моделювання розсіювання хвиль, досконалі множини, дофрактальні ґратки, асимптотичні моделі.

Цитування: Букін О.В., Кошовий Г.І., Логвінов Ю.Ф. Математичні моделі розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі дофрактальними провідними стрічковими ґратками. *Радіофізика і радіоастрономія*. 2026. Т. 31. № 3. С. 166—178. <https://doi.org/10.15407/rpra31.03.166>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2026

 Це стаття відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.uk>)

Вступ

Системи абсолютно тонких та провідних плоских стрічок, які скорочено можна назвати стрічковими ґратками (СГ), є досить простими як у фізичному, так і математичному сенсі моделями для вивчення взаємодії провідних об'єктів з плоскими електромагнітними хвилями. Теорія розсіювання плоскої лінійно поляризованої електромагнітної хвилі дифракційними СГ свого часу була ґрунтовно розроблена харківськими радіофізиками, вважається класичною і знайшла широке практичне застосування у фізиці та техніці [1–4]. Зокрема, дифракційні ґратки застосовуються у антенній та вимірювальній техніці, електроніці, ядерній техніці, акустиці тощо. У розробці цієї теорії принципове значення має математична впорядкованість стрічок за періодичним законом та їх ідеальна провідність. Основним методом, що використовувався для отримання математичних моделей, був метод задачі Рімана–Гільберта [1]. Були також розвинуті теорії розсіювання хвиль СГ зі скінченною кількістю стрічок різної ширини, але ці теорії виявились досить громіздкими як за кількістю параметрів, так і за методом, що застосовувався для проведення числових експериментів [5, 6]. Значним досягненням на той час було отримання системи інтегральних рівнянь другого роду, яка виявилась недостатньо зручною для проведення великої кількості вичерпних числових експериментів.

З появою системного викладення застосувань незвичайних «фрактальних» множин у математичному моделюванні різних природних процесів та об'єктів [7, 8] почались певні спроби системного дослідження застосувань цих множин у радіофізиці та радіолокації. Теорія взаємодії електромагнітних хвиль з провідними структурами, що мають дофрактальну (*pre-fractal*, англ.) геометрію чи містять дофрактальні елементи, була створена недавно та швидко розвивається [7, 9]. Зазвичай у ній використовують тільки найпростішу досконалу множину, яку пов'язують з відомим математиком — засновником сучасної теорії множин Г. Кантором (1845–1918). Однак уперше вона була описана і використана англійським професором Г. Смітом у 1874 році як область визначення незвичайної функції, що не має

ріманового інтеграла [10]. На сьогодні її вважають класичною досконалою множиною, вона детально розглядається у кількох розділах вищої математики. Ця досконала множина є основою побудови низки класичних самоподібних множин (СПМ, або фракталів): кривої та «сніжинки» Хельге фон Коха, «килима» чи «серветки» польського математика Вацлава Серпінського [7, 8]. Оскільки ці множини не є класичними і викликають певну пересторогу у науковців, то виникла потреба у додатковому їх вивченні, систематизації та математичному обґрунтуванні їх властивостей [11]. Важливу роль класичні досконалі СПМ відіграли та продовжують відігравати при створенні різноманітних радіоелектронних пристроїв, де основою є дофрактальні антени [12–16].

Варто вказати, що існують два активних напрями розробки дофрактальних антен, де проводяться детальні дослідження з вдосконалення потрібних для практичних застосувань характеристик. Перший напрям має справу зі створенням різних видів геометричних конструкцій провідників (дофрактальних апертур) на основі вже класичних та нових двовимірних незвичайних «фрактальних» множин [14, 16]. Другий напрям базується на використанні певних стадій побудови ніде не щільної досконалої множини (фрактала) при розробці антенних ґраток. Удосконалення корисних для практичних застосувань характеристик досягається не через накопичення окремих провідних елементів (як у класичних ґратках), а через відповідне їх впорядкування [17, 18].

У цій статті пропонуються СГ у вигляді систем стрічок, що розташовані у відповідності з відрізками, які утворюють певну стадію побудови (дофрактал) ніде не щільної досконалої множини зі змінною дробовою розмірністю. Такі СГ доречно називати дофрактальними, або, скорочено, ДФСГ. Задача розсіювання плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі ДФСГ є математично строгою в рамках певних припущень [19, 20]. Метою цієї статті є використання математичних моделей, отриманих класичними методами (методом інтегральних рівнянь, асимптотичним методом Лорда Релея) та їх модифікаціями [21–23], для дослідження основних характеристик розсіювання електромагнітних хвиль СГ [20].

1. Постановка задачі та математичні моделі розсіювання

Задача розсіювання плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі системою абсолютно тонких та провідних плоских стрічок (рис. 1) полягає у визначенні відповідного розв'язку рівнянь Максвелла у тривимірному просторі [19–21].

Перехід від тривимірної фізичної моделі, де використовуються рівняння Максвелла з відповідними граничними умовами на провідних стрічках, до двовимірної математичної моделі ґрунтується на теорії диференціальних рівнянь математичної фізики. У результаті отримуємо зовнішні змішані граничні задачі для двовимірного хвильового рівняння з відповідною умовою випромінювання на нескінченності. За відомим методом інтегральних рівнянь (ІР) вказані двовимірні задачі переводяться до одновимірної задачі розв'язання систем змішаних інтегрально-диференціальних рівнянь (ІДР). Деталі цього безпосереднього застосування методу ІР можна знайти у кількох публікаціях, серед яких найсуттєвішими є статті [19, 22]. У них розглядаються основні математичні моделі та їх коректні перетворення до зручного для дослідження вигляду. Спочатку наведемо загальні математичні моделі розсіювання хвилі ДФСГ з імпедансом, в яких стрічки строго впорядковані у відповідності з відрізками, які утворюють певну стадію побудови найпростішого класу досконалих множин зі змінною дробовою розмірністю [23–26].

Коли імпедансом матеріалу, з якого виготовлені стрічки провідної СГ, не можна нехтувати, початкова математична модель розсіювання за методом ІР є некоректною. Це пов'язано з тим, що вона визначається змішаною системою ІДР і потребує обережного відокремлення інтегрального оператора від диференціального. Після вказаного відокремлення спершу досліджуються диференціальні рівняння на системі сегментів з метою виділення потрібного єдиного розв'язку задачі розсіювання, а потім завдяки інтегральному оператору отримуємо систему особливих ІР першого роду [19].

Варто зазначити, що основна шукана функція $\psi = \psi(x)$ визначає поздовжню складову густини поверхневого струму на стрічках і залежить

від безрозмірного параметра $\mu = (1+i) \cdot r/\chi$, де i є уявною одиницею. Цей безрозмірний параметр прямо пропорційний поверхневому опору r провідного матеріалу стрічок та обернено пропорційний опору навколишнього середовища χ . За наявними даними, поверхневий опір найбільш поширених провідних матеріалів, таких як срібло, мідь, алюміній, латунь, є досить малим порівняно з опором навколишнього середовища. Зважаючи на те, що безрозмірна величина $|\mu| = \sqrt{2} \cdot r/\chi$ значно менша від одиниці, та застосувавши метод малого параметра, приходимо до такої системи особливих ІР першого роду:

$$\int_S \psi(x') H_0^{(1)}(k|x-x'|) dx' = -4i(1-q_2\mu)^{-1} \exp(ikq_1x), \quad x \in S. \quad (1)$$

Тут інтегрування проводиться за системою сегментів, а $H_0^{(1)}(z)$ позначає функцію Ганкеля першого роду нульового порядку, k — хвильове число. У правій частині маємо дві складові напрямного вектора E -поляризованої хвилі, яка набігає знизу на стрічки. Тобто $q_1 = \sin \phi_0$, $q_2 = \sin \phi_0$, де ϕ_0 є кутом, під яким набігає зазначена хвиля. Це і є коректна математична модель розсіювання E -поляризованої хвилі плоскою стрічковою провідною ґраткою з імпедансом. Щоб мати більш зручну для проведення числових експериментів та практичних застосувань математичну модель, необхідно перетворення системи особливих ІР першого роду (1). Його можна здійснити стандартним способом, як це проведено для випадку двох провідних стрічок різної ширини у статті [19]. У цьому випадку виникає досить проста і більш конкретна система особливих ІР першого роду:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 j_\kappa(t) \ln|\tau-t| dt + \\ & + \sum_{m=1}^M \int_{-1}^1 j_m(t) R_{\kappa m}(\tau, t) dt = \\ & = f_\kappa(\mu) \exp(iq_1\alpha_\kappa\tau), \quad |\tau| < 1, \quad \kappa = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут нові невідомі функції $j_m(t) = a_m \psi(b_m + a_m t)$, a_m — півширина стрічки з номером $m = 1, \dots, M$, а функції двох змінних $R_{\kappa m}(\tau, t)$ вже не мають особливостей [19]. У правій частині функція, залежна від безрозмірного параметра μ , має такий вигляд: $f_\kappa(\mu) = -2\pi \exp(-iq_1x_\kappa(0)) / (1 - q_2\mu)$. Тут ще є важливі параметри: $x_\kappa(0)$, що закріплює

стрічки з номером k на осі абсцис і стане більш зрозумілим у наступному пункті при побудові СПМ, та параметр $\alpha_k = ka_k$. Для випадку систем провідних стрічок, впорядкованих за різними математичними законами, функції $R_{km}(\tau, t)$ залежатимуть від різниці $(\tau - t)$. Їх вирази, коли провідні стрічки впорядковані за законом, що відповідає розташуванню сегментів побудови найпростіших досконалих множин, можна знайти у статтях [19, 22].

Наведена математична модель розсіювання E -поляризованої хвилі плоскою СГ з імпедансом, яка зведена до системи особливих ІР першого роду (2), є досить загальною і неупорядкованою. Для того, щоб її пристосувати до розсіювання E -поляризованої хвилі ДФСГ з імпедансом, слід спочатку пригадати математичні закони дофрактального впорядкування стрічок ґратки. Це впорядкування спирається на процес побудови ніде не щільної досконалої множини зі змінною дробовою розмірністю.

2. Аналіз процесу побудови самоподібних досконалих множин

Найпростішим і найпоширенішим представником цього класу множин є досконала множина, яка пов'язана з іменами Г. Сміта та Г. Кантора і про яку згадувалось у вступі до цієї статті. Доречно зупинитись на процесі побудови найпростішого узагальнення цієї ніде не щільної досконалої множини. При цьому виникне клас ніде не щільних досконалих самоподібних множин зі змінною розмірністю Хаусдорфа (РХ), яка далі буде використовуватись. Побудову СПМ почнемо з певного симетричного сегмента, який ділимо на три частини. Дві крайні частини однакові і являють собою сегменти довжиною $2a$, середню частину (інтервал) — відкидаємо. Отримані два сегменти назвемо утворювачем даної множини, або першою стадією її побудови. На рис. 2 ці два сегменти першої стадії створення СПМ показано на першому рівні. Далі вводимо ще один геометричний параметр b для позначення координати центра правого сегмента утворювача. Друга стадія створення даної ніде не щільної досконалої СПМ полягає в заміщенні обох сегментів утворювача зменшеними його копіями у

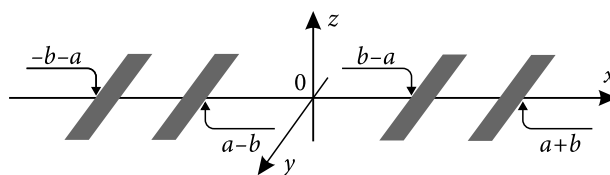


Рис. 1. Дофрактальна стрічкова ґратка з чотирьох провідних стрічок

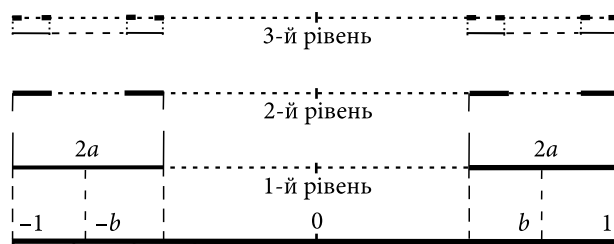


Рис. 2. Поперечні перерізи ДФСГ з двох, чотирьох та восьми стрічок, що відповідають СПМ з РХ = 0.5

$c = 1 + b/a > 2$ разів. Отже, результатом другої стадії побудови даної СПМ є четвірка сегментів, зображена на другому рівні рис. 2. Наступний крок — перехід до третьої стадії побудови досконалої множини — ще одне зменшення утворювача у c разів і заміщення сегментів другої стадії, що приводить до восьми сегментів, зображених на третьому рівні рис. 2. Якщо продовжувати цей процес необмежено, то утвориться досконала множина, яка дещо відмінна від класичної і є її частинним випадком. З огляду на це можна вести мову про цілий клас досконалих множин, які залежать від коефіцієнта самоподібності c , що визначає РХ за формулою $\ln 2 / \ln c$.

Сам процес побудови досконалої множини вказує на можливість строгого впорядкування елементів ґраток з метою покращення їх корисних властивостей при використанні в різних радіоелектронних пристроях [1–4]. Отже, можна зробити висновок про доцільність практичного застосування стадій побудови СПМ зі змінною РХ. Дуже важливим у математичному моделюванні буде подання стадій створення досконалої множини у вигляді звичайних лінійних функцій, що закріплюють сегменти на дійсній осі [23–25].

Утворювач СПМ можна досить просто формалізувати математично, використавши два геометричні параметри $\alpha = ka$ і $\beta = kb$ та дійсну змінну t , для якої $|t| \leq 1$. У цьому випадку це будуть дві лінійні функції $x_m(t) = (-1)^m \beta + \alpha t$, $m = 1, 2$. Вони впевнено закріплюють сегменти першої

стадії побудови СПМ на дійсній осі. Наступною, другою стадією побудови СПМ є четвірка сегментів, що формалізується лінійними функціями: $x_m(t) = (-1)^m(\beta + \beta/c) + \alpha t/c$ для $m = 1, 4$ та $x_m(t) = (-1)^m(-\beta + \beta/c) + \alpha t/c$ для $m = 2, 3$. Так само на основі самоподібності визначаються лінійні функції, що фіксують на дійсній осі сегменти наступних стадій. Для довільного натурального n , що визначає стадію побудови СПМ, маємо впорядковану послідовність функцій $x_m(t)$, де $m = 1, \dots, 2^n$. Таким чином, коректна математична модель розсіювання E -поляризованої хвилі ДФСГ з імпедансом, подана системою ІР першого роду (2), стає конкретнішою. Ядра цієї системи визначаються такими виразами:

$$R_{\ell m}(\tau - t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(|x_\ell(0) - x_m(0) + \alpha(\tau - t)|),$$

$$\ell \neq m, \quad (3)$$

$$R_{mm}(\tau - t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\alpha|\tau - t|) - \ln|\tau - t|.$$

Тепер є все для подальшого дослідження розсіювання плоскої E -поляризованої хвилі ДФСГ з імпедансом. У першу чергу розберемося з асимптотичною моделлю електрично вузьких стрічок, для якої існує аналітичний розв'язок для випадку розсіювання однією стрічкою [22].

3. Вузькострічкова слабонаповнена ДФСГ

У процесі побудови СПМ параметр α суттєво зменшується (не менше ніж удвічі) у результаті переходу від однієї стадії створення до наступної. Починаючи з певної стадії побудови СПМ, цей параметр можна вважати настільки малим, наскільки це потрібно. Таким чином, можна вважати, що асимптотична модель вузьких стрічок буде досить зручною для практичних застосувань. Другим важливим чинником є відстань між окремими стрічками ґратки: вона повинна бути не малою, тобто стрічкова система має бути слабонаповненою, або розрідженою СГ. Оскільки стадії побудови СПМ відбуваються шляхом заміщення сегментів суттєво зменшеними копіями утворювача, то достатньо накласти певну вимогу на відстань між сегментами початкового об'єкта: початковий геометричний параметр β має бути не малим, а коефіцієнт самоподібності $c > 4$. Кла-

сична досконала множина Сміта–Кантора, для якої коефіцієнт самоподібності $c = 3$, є за межами цього класу СПМ зі змінною РХ, що має бути меншою 0.5.

У даних припущеннях, застосовуючи асимптотичні вирази для ядрових функцій (3), віділимо їх головні доданки: $R_{mm0} = \ln(\gamma\alpha/2i)$, $R_{\kappa m0} = \pi H_0^{(1)}(|\beta_{\kappa m}|)/2i$, де $\beta_{\kappa m} = x_\kappa(0) - x_m(0)$, $\ln \gamma = C$ – стала Ейлера. Ураховуючи головне наближення правих частин системи особливих ІР (2), приходимо до найпростішої системи ІР з логарифмічною особливістю:

$$\int_{-1}^1 j_{\kappa 0}(t) \ln|\tau - t| dt + \sum_{m=1}^{2^n} j_{m0} R_{\kappa m0} = f_\kappa(\mu),$$

$$|\tau| < 1, \quad \kappa = 1, \dots, 2^n. \quad (4)$$

Тут маємо невідомий інтеграл $j_{m0} = \int_{-1}^1 j_{m0}(t) dt$, який знаходимо, користуючись формулою обернення Карлемана для особливого ІР з найпростішим логарифмічним різницеvim ядром, як це зроблено у випадку однієї стрічки [22]. У результаті отримаємо просту систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що має таку форму:

$$\sum_{m=1}^{2^n} j_{m0} R_{\ell m0} - j_{\ell 0} \ln 2 = f_\ell(\mu), \quad \ell = 1, \dots, 2^n. \quad (5)$$

Це нова коректна асимптотична модель розсіювання E -поляризованої хвилі плоскою слабонаповненою ДФСГ з імпедансом. Шукані функції, що є вихідними функціями цієї асимптотичної моделі вузьких стрічок, мають вигляд: $j_{m0}(x) = j_{m0}/(\pi\sqrt{1-x^2})$. Отже, маємо розв'язок задачі розсіювання плоскої E -поляризованої хвилі довільною провідною ДФСГ з імпедансом у явному вигляді, що є важливою перевагою асимптотичної моделі. Цей розв'язок задачі розсіювання дозволяє проводити досить широкі дослідження (у тому числі у резонансному частотному діапазоні) та здійснювати важливі числові експерименти. Основним недоліком довгохвильової математичної моделі розсіювання досить віддаленими вузькими стрічками є те, що частотний діапазон може суттєво звужитись. Щоб отримати розв'язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот, можна застосувати два відомих та добре обґрунтованих прямих чисельних методи – механічних квадратур та дискретних особливос-

тей, які детально описані у монографіях [27, 28]. Також можна скористатися іншими підходами та сучасними методами, як це було, зокрема, при дослідженні подібних задач розсіювання ґратками з графенових стрічок [29–33].

Якщо ДФСГ відповідає першій стадії створення ніде не щільної досконалої СПМ, то вузько-стрічкова модель може бути впевнено застосована у разі малої ширини стрічок відносно довжини хвилі, тобто перша умова є $2a \ll \lambda$. Другою важливою умовою є те, що відстань між стрічками повинна бути у кілька разів більшою за ширину кожної зі стрічок: початковий геометричний параметр β має бути не малим. Тоді розсіювання E -поляризованої хвилі слабонаповненою вузько-стрічковою ґраткою описується дуже простою системою двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} l\alpha & h(\beta) \\ h(\beta) & l\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{10} \\ j_{20} \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{q_2\mu - 1} \begin{pmatrix} \exp(iq_1\beta) \\ \exp(-iq_1\beta) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тут для скорочення записів введено позначення: $l\alpha = \ln \frac{\gamma\alpha}{4i}$, $h(\beta) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(2\beta)$. Очевидно, що отримана асимптотична модель розсіювання E -поляризованої хвилі слабонаповненою СГ у випадку двох електрично вузьких стрічок є простою.

Якщо ж ДФСГ відповідає другій стадії створення ніде не щільної досконалої СПМ зі змінною РХ, маємо чотири стрічки, кожна з яких визначається геометричним параметром a/c (тут коефіцієнт самоподібності $c = 1 + \beta/\alpha > 2$). Розсіювання E -поляризованої хвилі цією СГ описується системою чотирьох алгебраїчних рівнянь, матриця якої симетрична і має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} l\alpha & h(\beta/c) & h(\beta) & h(\beta(1+1/c)) \\ h(\beta/c) & l\alpha & h(\beta(1-1/c)) & h(\beta) \\ h(\beta) & h(\beta(1-1/c)) & l\alpha & h(\beta/c) \\ h(\beta(1+1/c)) & h(\beta) & h(\beta/c) & l\alpha \end{pmatrix}. \quad (7)$$

У правій частині системи — чотири функції, які залежні, зокрема, від безрозмірного параметра μ і мають подібний до системи (6) вигляд:

$$\frac{2\pi}{q_2\mu - 1} \begin{pmatrix} \exp(iq_1\beta(1+1/c)) \\ \exp(iq_1\beta(1-1/c)) \\ \exp(-iq_1\beta(1-1/c)) \\ \exp(-iq_1\beta(1+1/c)) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Це і буде найпростіша асимптотична модель розсіювання E -поляризованої хвилі слабонаповненою ДФСГ з чотирьох електрично вузьких стрічок. Вона визначається звичайною системою з чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею (7) та правою частиною (8), дуже подібною до системи (6).

Зрозуміло, що наведені вище умови слабонаповненості (розрідженості) СГ досить розпливчасті, тому потрібно проводити чисельні експерименти і підкріплювати їх певними дослідженнями інтегральних характеристик. Розглянемо розсіяне електромагнітне поле у дальній зоні, щоб знайти важливу інтегральну характеристику розсіювання СГ — діаграму розсіювання.

4. Діаграми розсіювання плоских СГ

Коли визначені вихідні змінні певної математичної моделі, пов'язані з розподілом густини поверхневих струмів на провідних стрічках, варто визначити важливі характеристики розсіювання хвилі ДФСГ. Основною інтегральною характеристикою розсіювання вважається діаграма розсіювання даного розсіювача, яка пов'язана з розсіяним електромагнітним полем досить далеко від нього. Якщо розсіюється E -поляризована хвиля, електромагнітне поле навколо розсіювача можна подати таким чином:

$$v^s(x, z) = \int_S \psi(x') \left(1 + \frac{i\mu}{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) H_0^{(1)}(kR) dx'. \quad (9)$$

Тут основною функцією є $\psi(x)$, яка визначає складову густини поверхневого електричного струму,

що протікає паралельно до країв стрічок. Розсіяне електромагнітне поле у дальній зоні зручно розглядати у полярній системі координат, тобто замість абсциси та аплікати використати вирази $x = r \cos \phi$ та $z = r \sin \phi$. На достатній відстані від системи провідних стрічок з імпедансом, тобто за умови $r = \sqrt{x^2 + z^2} \gg 1$ для розсіяного електромагнітного поля слід скористатись

асимптотичними зображеннями функції Ганкеля першого роду та її похідної [20]:

$$H_0^{(1)}(kR) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \exp(-ikx' \cos \phi),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(kR) \approx ik \sin \phi \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \exp(-ikx' \cos \phi). \quad (10)$$

Тоді на достатній відстані від ґратки, скориставшись формулами (9) та (10), отримаємо асимптотичний вираз

$$v^p(r, \phi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} (1 - \mu \sin \phi) \times \int_S \psi(x') \exp[-ikx' \cos \phi] dx', \quad (11)$$

який визначає розсіяне електромагнітне поле в дальній зоні. Основна функція $\psi(x)$ визначає густину поверхневого електричного струму на стрічках, який виник як результат взаємодії електромагнітної хвилі з вільними електронами провідних стрічок.

Якщо множник $e^{ikr}/\sqrt{kr}$, що залежить від відстані до розсіювача, відкинути, то залишиться вираз, який характеризує розподіл поля в дальній зоні в залежності від полярного кута. Позначимо його як $A(\phi)$, тоді з (11) отримаємо

$$A(\phi) = \frac{2}{\sqrt{i}} (1 - \mu \sin \phi) \sum_{m=1}^M \hat{\psi}_m(k \cos \phi), \quad (12)$$

де

$$\hat{\psi}_m(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_m} \psi(x') \exp(-ix'y) dx'. \quad (13)$$

Виділимо дробовий множник, що пов'язаний з імпеданс-параметром і залежний від нього та полярного кута, $g(\mu, \phi) = \frac{1 - \mu \sin \phi}{1 - q_2 \mu}$. Тоді мож-

на вираз (12) записати як $A(\phi) = g(\mu, \phi) A_0(\phi)$,

де $A_0(\phi) = \frac{2}{\sqrt{i}} \sum_{m=1}^M \hat{\psi}_{0m}(k \cos \phi)$, в якому згідно з (13) $\hat{\psi}_{0m}(y) = \hat{\psi}_m(y)|_{\mu=0}$. Це суттєво спрощує проведення чисельних експериментів, бо можна використовувати розрахункові алгоритми для випадку ідеальної провідності матеріалу стрічок. Потім, користуючись досить простою раціональною функцією $g(\mu)$, можна змінювати імпеданс-параметр і спростити проведення ек-

спериментів. У загальному випадку для визначення $A(\phi)$ потрібно розв'язати систему особливих ІР першого роду (1).

У випадку слабонаповненої СГ, що відповідає першій стадії побудови ніде не щільної досконалої СПМ зі змінною розмірністю, отримаємо зручний для проведення досліджень та чисельних експериментів вираз

$$|A_0(\phi)| = \sqrt{2/\pi} |j_{10} e^{i\beta \cos \phi} + j_{20} e^{-i\beta \cos \phi}|, \quad (14)$$

де сталі j_{m0} визначаються з системи (6).

Для випадку слабонаповненої СГ, що відповідає другій стадії побудови ніде не щільної досконалої СПМ зі змінною розмірністю, виникає дещо складніший вираз:

$$A_0(\phi) = \sqrt{2/\pi} \times |j_{10} e^{i(\beta+\beta/c) \cos \phi} + j_{20} e^{i(\beta-\beta/c) \cos \phi} + j_{30} e^{i(\beta/c-\beta) \cos \phi} + j_{40} e^{-i(\beta+\beta/c) \cos \phi}|. \quad (15)$$

Тут параметр c позначає введений вище коефіцієнт самоподібності, а j_{m0} є розв'язками системи рівнянь (5), що складається з чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь, головна матриця якої має вигляд виразу (7), а права частина — виразу (8).

Зрозуміло, що наведені вище умови слабонаповненості СГ та електричної вузькості її стрічок досить розпливчасті, тому проведемо чисельні експерименти. Вони, зокрема, мають продемонструвати фрактальні властивості діаграм розсіювання E -поляризованої хвилі різними типами ДФСГ зі слабим наповненням їх провідними стрічками з імпедансом.

5. Чисельні експерименти з вузькострічковими слабонаповненими ДФСГ

Графіки залежності функції $|A(\phi)|$ від полярного кута будуть далі досліджуватись у чисельному експерименті для двох різних значень безрозмірного імпеданс-параметра. Для випадку, коли цей імпеданс-параметр $\mu = 0$, графіки функції $|A(\phi)|$ будуть зображені пунктиром, а для $\mu = (1+i)/4$ — чорною та сірою суцільними лініями.

Для першого випадку ДФСГ маємо такі початкові геометричні параметри: $\alpha = \pi/16$ і $\beta = 7\pi/16$, які, згідно з $\alpha = ka$ та $\beta = kb$, цілком визначають поперечний переріз ДФСГ (див.

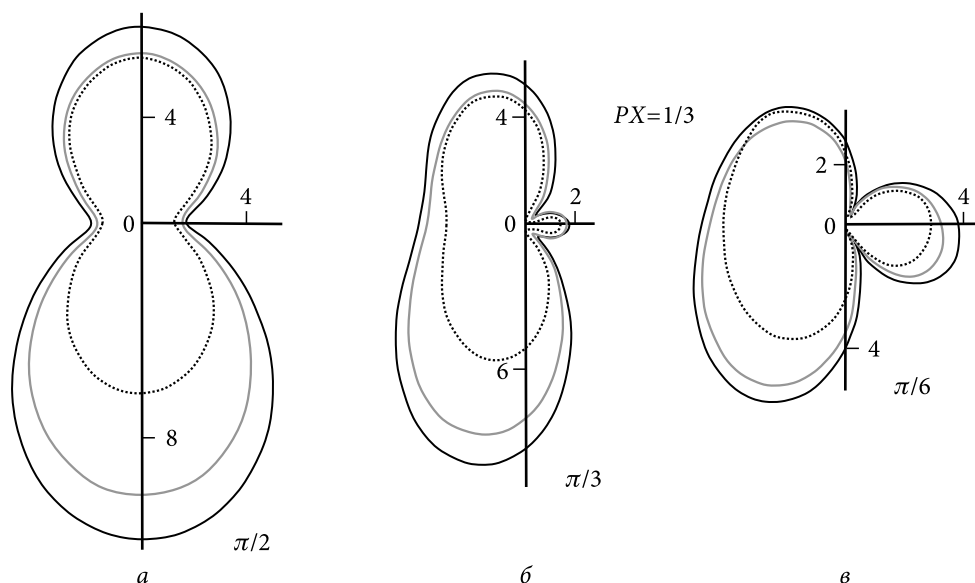


Рис. 3. Графіки функції $|A(\phi)|$ для ґратки з двох стрічок шириною $\lambda/16$ і відстанню між ними $\lambda/2$ для трьох значень кута набігання хвилі ($a - \pi/2$, $b - \pi/3$, $v - \pi/6$)

рис. 2). Вони свідчать про те, що поперечний переріз СГ дорівнює половині довжини плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі (λ), яка розсіюється системою провідних стрічок: $2(b + a) = \lambda/2$. Варто зазначити, що коли ДФСГ відповідає першій стадії створення ніде не щільної досконалої СПМ ($M = 2$), то вузькострічкова модель може бути впевнено застосована, бо ширина стрічок $2a = \lambda/16$, і вони рознесені майже на половину довжини хвилі. Графіки залежності функції $|A(\phi)|$ для трьох різних значень кута набігання хвилі ($\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$) та імпеданс-параметра $\mu = (1 + i)/4$ за умови $r/\chi = 0.25$ і $PX = 1/3$ зображено на рис. 3 чорною суцільною лінією. Розрахунок здійснювався за допомогою виразу (14) та вихідних змінних асимптотичної вузькострічкової моделі (6). Очевидне суттєве зростання величини функції $|A(\phi)|$ у напрямку, звідки набігає плоска електромагнітна хвиля, що не суперечить очікуванням, завдяки імпедансу.

Коли СГ відповідає другій стадії створення СПМ з розмірністю Хаусдорфа $PX = 1/3$, то вузькострічкова модель вже може бути застосована. У цьому випадку ДФСГ складається з чотирьох стрічок, кожна з яких має ширину $1/128$ від довжини хвилі. Ці достатньо вузькі стрічки утворюють дві пари ґраток з двох стрічок: дві підґратки, рознесені майже на половину довжини хвилі. У кожній з підґраток вузькі стрічки рознесені на

$3/32$ довжини хвилі: $3/32 \gg 1/128$. Тобто ДФСГ можна вважати слабонаповненою вузькострічковою системою з чотирьох провідних стрічок. Графіки залежності функції $|A(\phi)|$ для тих же трьох різних значень кута набігання хвилі та імпеданс-параметра $A(\phi)$ зображено на рис. 3 сірою суцільною лінією. Розрахунок здійснювався за допомогою виразу (15) та вихідних змінних асимптотичної вузькострічкової моделі, що є розв'язками системи з чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь, головна матриця якої має вигляд виразу (7), а права частина — виразу (8). Для значень імпеданс-параметра $\mu = 0$ (стрічки є ідеально провідними) графіки, що визначаються виразом (15), зображені пунктиром і є симетричними відносно полярної осі. Варто зазначити про повне узгодження за формою діаграм розсіювання для ДФСГ обох стадій створення СПМ ($M = 2$, $M = 4$). Це свідчить про певну фрактальну інваріантність даної характеристики розсіювання, що може знайти практичне застосування. Маємо суттєву залежність діаграми розсіювання електромагнітного поля від кута, під яким набігає хвиля. Також суттєва залежність її і від напрямку, звідки набігає E -поляризована хвиля. Якщо хвиля набігає знизу, то донизу, назустріч набіганню хвилі, розсіяне поле інтенсивніше.

Слід пояснити, чому сірі графіки за розміром є меншими, ніж чорні. Це пов'язано з тим, що

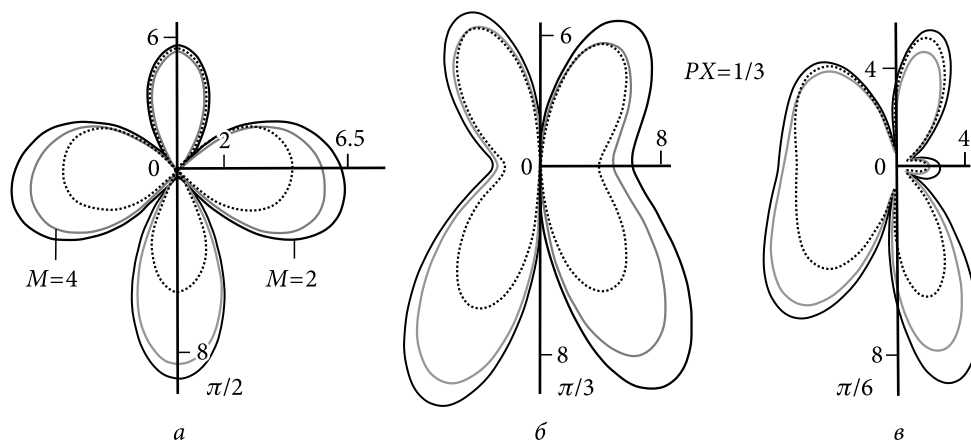


Рис. 4. Графіки функції $|A(\phi)|$ для ґратки з чотирьох стрічок ($M = 4$) шириною $\lambda/128$ і відстанню між ними $3\lambda/32$, які формують дві підґратки з відстанню між ними $\lambda/2$, для трьох значень кута набігання хвилі ($a - \pi/2$, $b - \pi/3$, $v - \pi/6$)

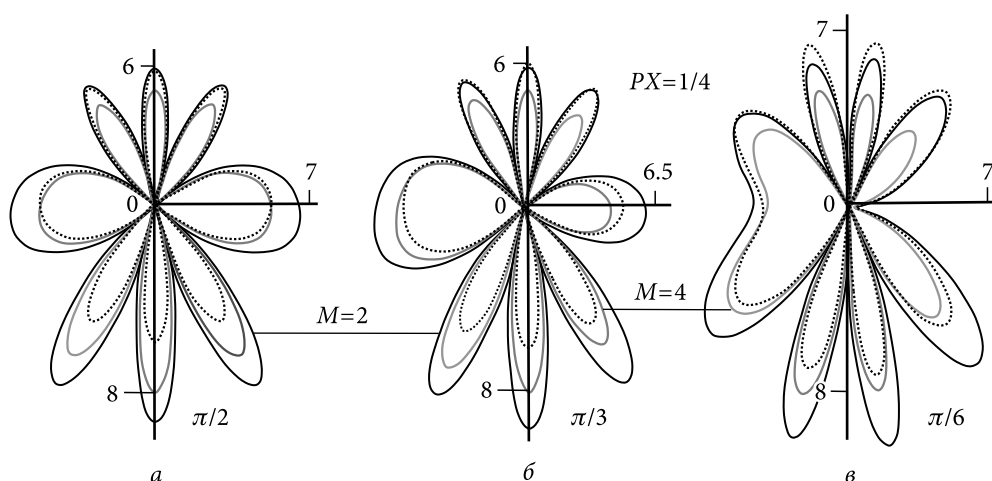


Рис. 5. Графіки функції $|A(\phi)|$ для ґраток з двох стрічок ($M = 2$) шириною $\lambda/8$ і відстанню між ними $7\lambda/4$ та чотирьох стрічок ($M = 4$) з шириною $\lambda/128$, які формують дві підґратки з відстанню між ними $7\lambda/4$, для трьох значень кута набігання хвилі ($a - \pi/2$, $б - \pi/3$, $в - \pi/6$)

чотири стрічки ДФСГ, яка відповідає другій стадії створення СПМ, за площею поверхні провідників значно менші, ніж дві стрічки ДФСГ, яка відповідає першій стадії. На більшій поверхні, де відбулася взаємодія хвилі з вільними електронами провідних стрічок, виник і більший поверхневий електричний струм, що зумовив розсіяне поле.

Для другого випадку ДФСГ початкові геометричні параметри ($\alpha = \pi/8$ і $\beta = 7\pi/8$) свідчать про те, що поперечний переріз СГ дорівнює довжині хвилі, яка розсіюється системою провідних стрічок: $2(b + a) = \lambda$. Якщо ДФСГ відповідає першій стадії створення СПМ, то вузькостріч-

кова модель може бути застосована з певним застереженням, бо ширина стрічок $2a = \lambda/8$. Ці недостатньо вузькі стрічки рознесені на три чверті довжини хвилі. Якщо ж СГ відповідає другій стадії створення СПМ, то вузькострічкова модель може застосовуватись цілком впевнено. У цьому випадку ДФСГ складається з чотирьох стрічок, кожна з яких має ширину $1/64$ від довжини хвилі. Ці достатньо електрично вузькі стрічки утворюють дві пари ґраток з двох стрічок: дві підґратки, рознесені на три чверті довжини хвилі. У кожній з підґраток вузькі стрічки рознесені на $3/32$ довжини хвилі, тобто ДФСГ можна вважати, хоч і не зовсім впевнено, слабонаповненою

вузькострічковою системою провідних стрічок. Графіки залежності функції $|A(\phi)|$ для трьох різних значень кута набігання хвилі ($\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$) та імпеданс-параметра $\mu = (1+i)/4$ зображені на рис. 4 чорною та сірою суцільними лініями, а для значень $\mu = 0$ — пунктиром. Як і у попередньому випадку, має місце цілкове узгодження діаграм розсіювання електромагнітного поля для обох стадій створення СПМ, що свідчить про фрактальну інваріантність даної характеристики розсіювання.

Щоб бути впевненим, що ДФСГ є слабонаповненою вузькострічковою системою провідних стрічок, збільшимо відстань між стрічками. Покладемо, що початкові геометричні параметри $\alpha = \pi/8$ і $\beta = 15\pi/8$. Це означає, що поперечний переріз СГ дорівнює двом довжинам плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі, яка розсіюється системою провідних стрічок. Як і у попередній ситуації, коли система провідних стрічок відповідає першій стадії створення СПМ ($M=2$), вузькострічкова модель може бути застосована з більшою впевненістю. Хоча, як і в попередньому випадку, ширина стрічок $2a = \lambda/8$ та стрічки рознесені на $7/4$ довжини хвилі. Якщо ж СГ відповідає другій стадії створення СПМ ($M=4$), то вузькострічкова модель може застосовуватись ще більш впевнено. У цьому випадку ДФСГ складається з чотирьох стрічок, кожна з яких має ширину $1/128$ від довжини хвилі. Ці достатньо мініатюрні стрічки утворюють дві пари з двох стрічок — дві підґратки, рознесені на $7/4$ довжини хвилі. Графіки залежності функції $|A(\phi)|$ для трьох різних значень кута набігання хвилі та імпеданс-параметра $\mu = (1+i)/4$ за умови $r/\chi = 0.25$ та $PX = 1/4$ зображені чорною та сірою суцільними лініями на рис. 5.

Як і у попередніх випадках, має місце цілкове узгодження діаграм розсіювання електромагнітного поля для обох стадій створення СПМ, що свідчить про певну фрактальну інваріантність даної характеристики розсіювання.

Висновки

На основі строгої теорії розсіювання плоских електромагнітних хвиль дофрактальними системами стрічок з імпедансом проведено дослідження діаграм розсіювання різних ґраток. Виконано детальний аналіз процесу створення самоподібних досконалих множин зі змінною дробовою розмірністю, які є основою математичного впорядкування стрічкових систем. Наведено основну математичну модель процесу взаємодії E -поляризованої електромагнітної хвилі з системою провідних стрічок з імпедансом у площині. Детально розглянуто асимптотичну модель слабонаповнених стрічкових ґраток, що значно спрощує задачу розсіювання E -поляризованої хвилі ДФСГ. Запропонована асимптотична модель є зручною, зокрема, при дослідженні основних характеристик розсіювання E -поляризованої хвилі ґратками. Проведено дослідження розсіяного електромагнітного поля у дальній зоні та знайдено важливі інтегральні характеристики розсіювання — діаграми розсіювання хвилі різними ґратками. Розроблено алгоритми обчислення основних характеристик розсіювання слабонаповнених стрічкових ґраток. Проведено чисельні експерименти порівняння діаграм розсіювання хвилі різними типами ДФСГ з метою виявлення специфічних особливостей розробленої асимптотичної моделі розсіювання E -поляризованої хвилі ДФСГ.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Шестопапов В.П. *Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн*. Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. 400 с.
2. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.М., Масалов С.О., Сологуб В.Г. *Дифракция волн на решетках*. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1973. 287 с.
3. Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. *Резонансное рассеяние волн*. В 2-х т. Т. 1. *Дифракционные решетки*. Киев: Наук. думка, 1986. 232 с.
4. Шестопапов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. *Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции*. Харьков: Основа, 1997. 283 с.
5. Сологуб В.Г. Про один метод дослідження задачі дифракції на обмеженій кількості стрічок, які розміщені в одній площині. *Доп. АН УРСР*. Сер. А. 1975. № 6. С. 549—552.

6. Квач Н.В., Сологуб В.Г. О рассеянии E -поляризованной плоской волны конечным числом лент, расположенных в одной плоскости. *Радиотехника и электроника*. 1982. Т. 27, № 10. С. 2031–2034.
7. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman and Company, 1983. P. 112–126.
8. Mandelbrot B.B. *Multifractals and $1/f$ noise: wild self-affinity in physics*. New York: Springer, 1999. 442 с.
9. Jaggard D.L. *On fractal electrodynamics. Recent advances in electromagnetic theory*. Ed. By H.N. Kritikos, D.L. Jaggard. New York: Springer, 1990. P. 183–223.
10. Smith H.J.S. On the integration of discontinuous functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* 1874. Vol. s1–6, Iss. 1. P. 140–153. DOI: 10.1112/plms/s1-6.1.140
11. Falconer K.J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. UK. Chichester: Wiley, 2003. P. 3–125.
12. Werner D.H., Werner P.L. On the synthesis of fractal radiation patterns. *Radio Sci.* 1995. Vol. 30, Iss. 4. P. 29–45. DOI: 10.1029/94RS02315
13. Jaggard A.D., Jaggard D.L. Scattering from fractal superlattices with variable lacunarity. *J. Opt. Soc. Am. A*. 1998. No. 6. P. 1626–1635. DOI: 10.1364/JOSAA.15.001626
14. Werner D.H., Ganguly S. An Overview of fractal antenna engineering research. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2003. Vol. 4, Iss. 1. P. 38–57. DOI: 10.1109/MAP.2003.1189650
15. Baliarda P.C., Romeu J., Pous R., Cordama A. On the behaviour of the Sierpinski multiband fractal antenna. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1998. Vol. 46, Iss. 4. P. 517–527. DOI: 10.1109/8.664115
16. Fractus S.A. New Fractal Antennas for Compact and Versatile Telecommunication Services. *Microw. J.* 2000. Vol. 43, Iss. 1. P. 196–204.
17. Werner D.H., Haupt R.L., Werner P.L. Fractal antenna engineering: The theory and design of fractal antenna arrays. *IEEE Antennas Propag. Mag.* 1999. Vol. 41, Iss. 5. P. 37–59. DOI: 10.1109/74.801513
18. Kravchenko V.F., Potapov A.A. Atomic-Fractal Antenna Arrays. *Proc. of the URSI Int. Symp. on Electromagnetic Theory*. Victoria, Canada, 13–17 May 2001. P. 660–662.
19. Koshovy G.I., Koshovy A.G. The Carleman regularization technique in Modelling of the Plane E -polarized EM Wave Scattering by Flat System of Impedance Strips. *IET Microw. Antennas Propag.* 2021. Vol. 15, Iss. 10, P. 1218–1224. DOI: 10.1049/mia2.12156
20. Hönl H., Maue A.W., and Westpfahl K. Theorie der Beugung. *Handbuch der Physik*. Springer, Berlin, 1961 (Mir, Moscow, 1964).
21. Colton D., Kress R. *The integral equation technique in scattering theory*. New York: John Wiley & Sons. 1983. P. 123–167.
22. Koshovy G.I. Asymptotic models of electromagnetic wave scattering from sparsely filled grating of electrically-narrow strips. *Phil. Trans. Royal Soc. A*. 2025. Vol. 383, Iss. 2303. 20240345. DOI: 10.1098/rsta.2024.0345
23. Koshovy G.I. Pre-fractal gratings of PEC strips. *2016 IEEE Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)*: proc. 2016. P. 89–95. DOI: 10.1109/MMET.2016.7544098
24. Koshovy G.I. Rigorous Asymptotic Models of Wave Scattering by Finite Flat Gratings of Electrically Narrow Impedance Strips. *2018 IEEE 17th Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)*: proc. 2018. P. 70–74. DOI: 10.1109/MMET.2018.8460275
25. Karpenko V.I., Koshovy G.I., Logvinov Y.F. Mathematical models of the plane sonic wave scattering by pre-fractal flat impedance strips system. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2020. Vol. 79, Iss. 15. P. 1301–1314. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v79.i15.10
26. Koshovy G.I. Wave's diffraction by pre-fractal system of slots in a plane screen. *J. Nano- Electron. Phys.* 2011. Vol. 3, Iss. 4. P. 66–72.
27. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наук. думка, 1989. 256 с.
28. Lifanov I.K. *Singular integral equations and discrete vortices*. Utrecht (the Netherlands): VSP VB, 1996. 475 p.
29. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Singular integral equations in diffraction by multilayer grating of graphene strips in the THz range. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* 2018. Vol. 82. 21301. DOI: 10.1051/epjap/ 2018170324
30. Vinogradova E., Kobayashi K., Eizawa T. Full wave analysis of plane wave diffraction by a finite sinusoidal grating: E-polarization case. *Wave Motion*. 2019. Vol. 86. P. 44–62. DOI: 10.1016/j.wavemoti 2018.12.006
31. Kaliberda M., Pogarsky C. Nystrom technique analysis of the terahertz and infrared range radar cross section of a circular dielectric cylinder with graphene strips inside. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2025. Vol. 383, Iss. 2303. 20240337. DOI: 10.1098/rsta.2024.0337.
32. Dushkin V. The Nyström scheme in modelling E -polarized wave scattering on a non-PEC strip system in the presence and absence of the screen. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2025. Vol. 383, Iss. 2303. 20240336. DOI: 10.1098/rsta.2024.0336
33. Lucido M. Regularizing Helmholtz–Galerkin technique in the plane wave scattering from a finite set of coplanar thin circular resistive discs. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2025. Vol. 383, Iss. 2303. 20240348. DOI: 10.1098/rsta.2024.0348

Стаття надійшла 19.02.2026

REFERENCES

1. Shestopalov, V.P., 1971. *Riemann–Hilbert problem in diffraction theory and electromagnetic wave's propagation*. Kharkov State Univ. Press, Kharkov.
2. Shestopalov, V.P., Litvinenko, L.M., Masalov, S.O., Sologub, V.G., 1973. *Diffraction of Waves by Gratings*. Kharkov State Univ. Press, Kharkov.
3. Shestopalov, V.P., Kyrylenko, A.O., Masalov, S.O., Sirenko, Yu.K., 1986. *Resonance wave's scattering*. In: *Diffraction gratings*. Vol. 1. Kiev, Naukova Dumka Publ.
4. Shestopalov, V.P., Tuchkin, Yu. A., Poedinchuk, A.Ye., Sirenko, Yu.K., 1997. *New methods for solving of direct and inverse diffraction theory problems*. Osnova Publ., Kharkov.
5. Sologub, V.G., 1975. On a method of diffraction problems' examination for a finite number of strips located within a single plane. *Rep. NAS of URSR. Ser. A*, 6, pp. 549–552 (in Ukrainian).
6. Kvach, N.V., Sologub, V.G., 1982. Scattering of the plane E-polarized wave by a finite number of strips located within a single plane. *Radio Eng. Electron. Phys.*, 27(10), pp. 2031–2034.
7. Mandelbrot, B.B., 1983. *The Fractal Geometry of Nature*. New York, W.H. Freeman and Company Publ., pp. 112–126.
8. Mandelbrot, B.B., 1999. *Multifractals and 1/f noise: wild self-affinity in physics*. New York: Springer.
9. Jaggard, D.L., Kriticos, H.N. (eds.), 1990. *On fractal electrodynamics. Recent advances in electromagnetic theory*. New York, Springer Publ., pp. 183–223.
10. Smith, H.J.S., 1874. On the integration of discontinuous functions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **s1-6**(1), pp. 140–153. DOI: 10.1112/plms/s1-6.1.140
11. Falconer, K.J., 2003. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Chichester, UK: Wiley Publ., pp. 3–125.
12. Werner, D.H., Werner, P.L., 1995. On the synthesis of fractal radiation patterns. *Radio Sci.*, **30**(4), pp. 29–45. DOI: 10.1029/94RS02315
13. Jaggard, A.D., Jaggard, D.L., 1998. Scattering from fractal superlattices with variable lacunarity. *J. Opt. Soc. Am. A*, 6, pp. 1626–1635. DOI: 10.1364/JOSAA.15.001626
14. Werner, D.H., Ganguly, S., 2003. An Overview of fractal antenna engineering research. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **45**(1), pp. 38–57. DOI: 10.1109/MAP.2003.1189650
15. Puente-Baliarda, C., Romeu, J., Pous, R., Cordama, A., 1998. On the behaviour of the Serpinski multiband fractal antenna. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **46**(4), pp. 517–527. DOI: 10.1109/8.664115
16. Fractus, S.A., 2000. New Fractal Antennas for Compact and Versatile Telecommunication Services. *Microw. J.*, **43**(1), pp. 196–204.
17. Werner, D.H., Haupt, R.L., Werner, P.L., 1999. Fractal antenna engineering: The theory and design of fractal antenna arrays. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, **41**(5), pp. 37–59. DOI: 10.1109/74.801513
18. Kravchenko, V.F., Potapov, A.A., 2001. Atomic-Fractal Antenna Arrays. In: *Proc. of the URSI Int. Symp. on Electromagnetic Theory*. Victoria, Canada, 13–17 May 2001, pp. 660–662.
19. Koshovy, G.I., Koshovy, A.G., 2021. The Carleman regularization technique in Modelling of the Plane E-polarized EM Wave Scattering by Flat System of Impedance Strips. *IET Microw. Antennas Propag.*, **15**(10), pp. 1218–1224. DOI: 10.1049/mia2.12156
20. Hönl, H., Maue, A.W., and Westpfahl, K., 1961. Theorie der Beugung. In: *Handbuch der Physik*. Springer, Berlin (Mir, Moscow, 1964).
21. Colton, D., Kress, R. 1983. *The integral equation technique in scattering theory*. New York: John Wiley & Sons., pp. 123–167.
22. Koshovy, G.I., 2025. Asymptotic models of electromagnetic wave scattering from sparsely filled grating of electrically-narrow strips. *Phil. Trans. R. Soc. A*, **383**(2303), 20240345. DOI: 10.1098/rsta.2024.0345
23. Koshovy, G.I., 2016. Pre-fractal gratings of PEC strips. In: *2016 IEEE International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)*: proc., pp. 89–95. DOI: 10.1109/MMET.2016.7544098
24. Koshovy, G.I., 2018. Rigorous Asymptotic Models of Wave Scattering by Finite Flat Gratings of Electrically Narrow Impedance Strips. In: *2018 IEEE 17th Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)*: proc., pp. 70–74. DOI: 10.1109/MMET.2018.8460275
25. Karpenko, V.I., Koshovy, G.I., Logvinov, Y.F., 2020. Mathematical models of the plane sonic wave scattering by pre-fractal flat impedance strips system. *Telecommunications and Radio Engineering*, **79**(15), pp. 1301–1314. DOI: 10.1615/Telecom-RadEng.v79.i15.10
26. Koshovy, G.I., 2011. Wave's diffraction by pre-fractal system of slots in a plane screen. *J. Nano- Electron. Phys.*, **3**(4), pp. 66–72.
27. Nazarchuk, Z.T., 1989. *Numerical investigation of wave diffraction on cylindrical structures*. Kyiv, Ukraine: Naukova Dumka Publ.
28. Lifanov, I.K., 1996. *Singular integral equations and discrete vortices*. Utrecht (the Netherlands): VSP VB.
29. Kaliberda, M., Lytvynenko, L., Pogarsky, S., 2018. Singular integral equations in diffraction by multilayer grating of graphene strips in the THz range. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, **82**(2), 21301. DOI: 10.1051/epjap/2018170324

30. Vinogradova, E., Kobayashi, K., Eizawa, T., 2019. Full wave analysis of plane wave diffraction by a finite sinusoidal grating: E-polarization case. *Wave Motion*, **86**, pp. 44–62. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2018.12.006
31. Kaliberda, M., Pogarsky, C., 2025. Nystrom technique analysis of the terahertz and infrared range radar cross section of a circular dielectric cylinder with graphene strips inside. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **383**(2303), 20240337. DOI: 10.1098/rsta.2024.0337
32. Dushkin, V., 2025. The Nyström scheme in modelling E-polarized wave scattering on a non-PEC strip system in the presence and absence of the screen. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **383**(2303), 20240336. DOI: 10.1098/rsta.2024.0336
33. Lucido, M., 2025. Regularizing Helmholtz–Galerkin technique in the plane wave scattering from a finite set of coplanar thin circular resistive discs. *Phil. Trans. R. Soc. A.* **383**: 20240348. DOI: 10.1098/rsta.2024.0348

Received 19.02.2026

O.V. Bukin, G.I. Koshovy, Yu.F. Logvinov

O.Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of the NAS of Ukraine

(ROR: <https://ror.org/03v48ps49>), Kharkiv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELS OF *E*-POLARIZED
ELECTROMAGNETIC PLANE WAVE SCATTERING
FROM PRE-FRACTAL CONDUCTING STRIP GRATINGS

Subject and Purpose. The scattering of an *E*-polarized electromagnetic plane wave by pre-fractal conducting impedance strip gratings is addressed. To order strip systems mathematically, the simplest class of self-similar perfect sets with variable fractional dimension is introduced. The considered asymptotic model of sparse-filling strip gratings considerably simplifies the scattering problem and enables effective investigation of basic characteristics of *E*-polarized wave scattering by conducting strip gratings, including radiation patterns.

Methods and Methodology. Mathematical models of the *E*-polarized plane wave scattering from conducting strip gratings are derived using classical approaches (the integral equation technique and Rayleigh's method) and their modifications. The basic full-wave mathematical model of *E*-polarized electromagnetic plane-wave scattering by conducting strip gratings reduces to a first-kind integral equation system that is solved numerically. The scattered far field is explored and yields essential integral characteristics of strip-grating scattering.

Results. Mathematical models have been developed to study the scattering of an *E*-polarized electromagnetic plane wave from pre-fractal sparse strip gratings. These asymptotic models have proven effective for both determining output variables and examining key scattering characteristics. Important integral characteristics, such as radiation patterns, have been obtained and permit examining the fractal attributes of pre-fractal conducting impedance strip gratings.

Conclusions. The presented mathematical models of the *E*-polarized electromagnetic plane wave scattering from pre-fractal strip gratings are efficient for determining output variables and examining fundamental scattering characteristics, such as radiation patterns, thereby laying the foundation for extensive investigation into the fractal attributes of key scattering characteristics of pre-fractal impedance strip gratings interrogated by a plane *E*-polarized wave.

Keywords: wave scattering modelling, perfect sets, pre-fractal gratings, asymptotic models.