

## Дифракция собственных волн диэлектрического слоя на периодической решетке из прямоугольных пластин

Г.Э. Карвицкий, С.Л. Просвирнин

Радиоастрономический институт НАН Украины  
310002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4

Статья поступила в редакцию 11 февраля 1997 г.

Рассмотрена в точной постановке трехмерная задача дифракции собственных волн диэлектрического слоя на решетке из прямоугольных металлических пластин. Пластины расположены периодически вдоль некоторой прямой на поверхности слоя. Задача решена методом моментов. Выбраны базисные функции, обеспечивающие хорошую сходимость численного алгоритма. Приведены и проанализированы результаты численного расчета частотных зависимостей коэффициентов прохождения и рассеяния в свободное пространство для решеток с различным коэффициентом заполнения.

Розглянуто у строгій постановці тривимірну задачу дифракції власних хвиль діелектричного шару на ґратці з прямокутних металевих пластин. Пластини розташовані періодично вздовж деякої прямої на межі діелектричного шару. Задачу вирішено методом моментів. Обрано базисні функції, які забезпечують хорошу збіжність алгоритму. Приведено та проаналізовано результати чисельного розрахунку частотної залежності коефіцієнта проходження і розсіювання у вільний простір для ґраток з різними коефіцієнтами заповнення.

### Введение

Пусть имеется слой диэлектрика  $S$  толщины  $h$  (с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостью  $\epsilon$  и  $\mu$ ), на поверхности которого находится периодическая решетка из бесконечно тонких металлических пластин (рис. 1). Пластины имеют форму прямоугольников со сторонами  $2D_x$  и  $2D_y$  и расположены вдоль оси  $Ox$  на одинаковом друг от друга расстоянии  $l$ . В слое диэлектрика распространяется собственная волна. Цель настоящей работы состоит в изучении дифракции собственных волн слоя на такой решетке.

ных элементов можно найти например в работах [1,2]. Трехмерные же задачи дифракции на периодических решетках, учитывающие конечность реальных элементов, исследованы недостаточно полно. Это объясняется большими теоретическими и вычислительными трудностями, связанными не только с увеличением размерности задачи, но и с отсутствием достаточно развитой математической теории. По этой причине большинство работ, посвященных исследованию трехмерных задач дифракции на периодических решетках основаны на так называемых эвристических предположениях [3]. Такой подход хотя и упрощает решение задачи, однако не позволяет оценить точность результатов и не дает полной картины дифракционных характеристик.

При рассмотрении трехмерных задач дифракции на открытых структурах в точной постановке применяют, как правило, два метода: проекционно-сеточный [4] и метод моментов [5]. Разработанная в теории микрополосковых устройств модификация метода моментов [6] позволила естественным образом учесть наличие волноведущих свойств планарной структуры, на которой располагается рассеивающее препятствие. Допускается перенесение этого метода и на рассматриваемую задачу, хотя и потребуются специальная доработка. Это связано с тем, что в отличие от высокодобротных микрополосковых структур пластина на слое незранированного диэлектрика имеет малую добротность, что дополнительно усложняет решение задачи.

Большой опыт решения задач дифракции на структурах с низкой добротностью накоплен в двумерной теории дифракции. В настоящее время

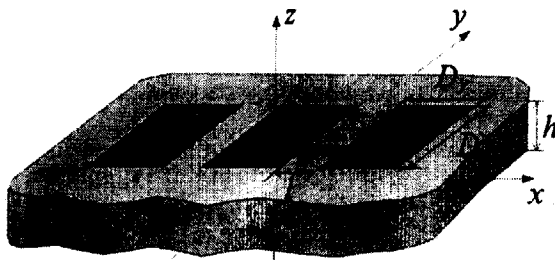


Рис. 1. Периодическая решетка на слое диэлектрика.

Дифракция электромагнитных волн на периодических решетках к настоящему времени подробно исследована в рамках более простой двумерной теории. Анализ дифракционных свойств периодических решеток из бесконечно протяжен-

существует ряд методов их решения, среди которых один из наиболее эффективных — метод полуобращения оператора [1]. В работе [2] был рассмотрен один из вариантов метода полуобращения, который, как было показано, эквивалентен методу моментов со специально выбранным базисом (так называемый базис ортогональной подстановки). И хотя метод полуобращения не удается перенести на трехмерные задачи, тем не менее, сам базис ортогональной подстановки не связан непосредственно с двумерностью и поэтому оказывается полезным для решения трехмерных задач. Как показано ниже, использование такого базиса позволило построить эффективный алгоритм и провести подробное численное исследование рассматриваемой задачи.

В работе приведены и проанализированы графики частотных зависимостей амплитуд дифракционных гармоник. Дан анализ поведения характеристик рассеянного поля вблизи точек скопления. Исследуется влияние коэффициента заполнения решетки на характеристики задачи. Анализируется характер взаимной трансформации различных собственных волн слоя.

### Метод решения

Как было уже сказано, решетка возбуждается собственными волнами диэлектрического слоя. В слое могут распространяться волны двух типов: ТМ и ТЕ, которые обе имеют нулевые критические частоты. В общем виде напряженность электрического поля собственной волны  $E^e$  представляется следующим образом

$$E^e = E_0^e(z) \cdot \exp\{i(k_x x + k_y y)\}, \quad (1)$$

где  $k_x, k_y$  - компоненты волнового вектора, удовлетворяющие соответствующему дисперсионному уравнению. Так как напряженность внешнего возбуждающего поля (1) является гармонической функцией  $x$ , а решетка периодическая в направлении оси  $Ox$ , то из соображений симметрии следует, что поля  $E_n$ , рассеянные отдельными пластинами ( $n$  — номер пластины), будут отличаться только фазовым сдвигом

$$E_n(x, y, z) = E(x - ln, y, z) \cdot \exp\{ik_x ln\}, \quad (2)$$

$$E^f(x, y, z) = \frac{1}{l} \int \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\chi_x^m, \chi_y, z) \cdot \tilde{I}(\chi_x^m, \chi_y) \cdot \exp\{i(\chi_x^m x + \chi_y y)\} d\chi_y +$$

$$+ \frac{\pi i}{l} \sum_{s=1}^N \operatorname{res}_{\chi_y = \chi_{m,s}} \hat{G}(\chi_x^m, \chi_y, z) \cdot I(\chi_x^m, \chi_{m,s}) \cdot \exp\{i(\chi_x^m x + \chi_{m,s} y)\} -$$

$$- \frac{\pi i}{l} \sum_{s=1}^N \operatorname{res}_{\chi_y = -\chi_{m,s}} \hat{G}(\chi_x^m, \chi_y, z) \cdot I(\chi_x^m, -\chi_{m,s}) \cdot \exp\{i(\chi_x^m x - \chi_{m,s} y)\}, \quad (7)$$

где  $E$  - поле рассеянное пластиной, расположенной в начале координат (нулевая пластина). В свою очередь поле, рассеянное нулевой пластиной, может быть однозначно выражено через распределение поверхностного тока  $I$ , индуцированного на ее поверхности. Используя спектральное представление тензорной функции Грина диэлектрического слоя  $\hat{G}$  [7], получаем

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\chi_x, \chi_y, z) \cdot \tilde{I}(\chi_x, \chi_y) \times \exp\{i(\chi_x x + \chi_y y)\} d\chi_x d\chi_y, \quad (3)$$

Поле  $E^f$ , рассеянное решеткой, является суперпозицией полей, рассеянных отдельными пластинами, и может быть получено из соотношений (2) и (3).

$$E^f(x, y, z) = \frac{1}{l} \int \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\chi_x^m, \chi_y, z) \cdot \tilde{I}(\chi_x^m, \chi_y) \cdot \exp\{i(\chi_x^m x + \chi_y y)\} d\chi_y, \quad (4)$$

где

$$\chi_x^m = 2\pi m / l + k_x, \quad (5)$$

$$\tilde{I}(\chi_x, \chi_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \times \exp\{-i(\chi_x x + \chi_y y)\} dx dy. \quad (6)$$

В формуле (4) интегрирование по  $\chi_x$  и суммирование по номеру пластины  $n$  при помощи формулы Пуассона [8] заменено на суммирование по собственным модам решетки  $m$ .

Функция Грина  $\hat{G}$ , входящая в подынтегральное выражение в (4), имеет особенности в точках, соответствующих постоянным распространения собственных волн диэлектрического слоя. В случае диэлектрика без потерь эти особенности лежат на вещественной оси, тем самым делая формулу (4) непригодной для нахождения рассеянного поля. В этом случае необходимо воспользоваться принципом предельного поглощения [9]. В итоге получаем следующее выражение для рассеянного поля

где  $\{\chi_s\}_{s=1}^N$  — постоянные распространения собственных волн диэлектрического слоя, а вычеты функции Грина берутся при таких вещественных значениях  $\chi_y = \pm \chi_{m,s}$ , когда постоянная распространения волнового вектора совпадает с  $\chi_s$ ,

$$(\chi_{m,s})^2 + (\chi_x^m)^2 = (\chi_s)^2.$$

Интеграл в (7) понимается в смысле главного значения, а дополнительные слагаемые, учитывающие влияние полюсов, представляют собой поля собственных волн диэлектрического слоя.

Как видно из выражений (4), (7), рассеянное поле однозначно определяется током, индуцированным на пластине. Следовательно, рассеянное поле можно рассматривать как интегральный оператор от функции поверхностного распределения тока  $I$ . Этот факт будем условно записывать как  $E^f\{I\}$ . Ток, который до сих пор был неизвестен, в свою очередь может быть найден из интегрального уравнения, выражающего условие равенства нулю касательной составляющей полного электрического поля на поверхности металлической пластины:

$$E^f\{I\} + E_t^e = 0, \text{ на пластине.} \quad (8)$$

Это уравнение будем решать методом моментов. Выберем некоторый базис  $\{I_x^p(x, y), I_y^p(x, y)\}_{p=0}^\infty$  из функций равных нулю вне пластины. Представим ток в виде разложения в ряд по этому базису

$$I_i(x, y) = \sum_{p=0}^\infty C_i^p \cdot I_i^p(x, y), \quad (9)$$

где  $i$  — либо  $x$ , либо  $y$ . Подставляя (9) в (8) и проектируя на те же базисные функции  $I_j^q(x, y)$ , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения  $C_i^p$

$$\sum_{p=0}^\infty A_{j,p}^{x,q} C_x^p + \sum_{p=0}^\infty A_{j,p}^{y,q} C_y^p = B_j^q, \quad (10)$$

где  $q = 0, 1, 2, \dots$ , а  $i, j$  — либо  $x$ , либо  $y$ .

Коэффициенты  $A_{j,p}^{i,q}$  в (10) определены следующим образом

$$A_{j,p}^{i,q} = \int_{\text{по пластине}} E_j^f\{I_i^p \vec{e}_i\} \cdot (I_j^q)^* ds, \quad (11)$$

где  $\vec{e}_i$  — орты декартовой системы координат,  $E_j^f\{I_i^p \vec{e}_i\}$  —  $j$ -ая компонента полного рассеянного поля, порожденного током с поверхностным распределением  $I_i^p \vec{e}_i$ , а знак (\*) обозначает комплексное сопряжение. Для вычисления этих коэффициентов удобно перейти в спектральную область  $(\chi_x, \chi_y)$ . В итоге с учетом (4) для диэлектрика с потерями получаем

$$A_{j,p}^{i,q} = \frac{2\pi}{l} \int_{-\infty}^\infty \sum_{m=-\infty}^\infty \tilde{E}_j\{I_i^p \vec{e}_i\}(\chi_x^m, \chi_y) \cdot (\tilde{I}_j^q(\chi_x^m, \chi_y))^* d\chi_y. \quad (12)$$

Выражение для  $A_{j,p}^{i,q}$  в случае диэлектрика без потерь получается из (7) аналогичным образом. Свободные члены системы уравнений (10) имеют следующий вид

$$B_j^q = \int_{\text{по пластине}} E_j^e \cdot (I_j^q)^* ds. \quad (13)$$

По смыслу коэффициенты  $A_{j,p}^{i,q}$  представляют собой взаимные сопротивления двух мод тока  $I_i^p$  и  $I_j^q$ , а свободные члены  $B_j^q$  — напряжение внешнего поля, действующее на  $I_j^q$  моду тока. Численное решение системы уравнений (10) осуществлялось методом редукции.

Эффективность описанного алгоритма, в первую очередь, определяется размером редуцированной системы, который в свою очередь при заданной требуемой точности решения зависит от выбора базисных функций. Мы использовали базисные функции из полиномов Чебышева с соответствующими весами

$$I_x^m(x, y) = \frac{\sqrt{1 - (x/D_x)^2}}{\sqrt{1 - (y/D_y)^2}} U_n(x/D_x) T_m(y/D_y),$$

$$I_y^m(x, y) = \frac{\sqrt{1 - (y/D_y)^2}}{\sqrt{1 - (x/D_x)^2}} T_n(x/D_x) U_m(y/D_y). \quad (14)$$

где индексы  $n, m$  при подстановке (14) в (9) и (11) в (12) нужно рассматривать как один мультииндекс. Этот базис был выбран из следующих соображений. Во-первых, веса полиномов Чебышева в (14) учитывают характер поведения тока на краях пластины. Для пластин небольшого размера (порядка половины длины волны) краевые эффекты играют определяющую роль в распределении тока. Поэтому эти базисные функции должны хорошо аппроксимировать точное решение. Во-

вторых, в работе [2] при исследовании двумерных задач дифракции волн, в частности, задач дифракции на металлической ленте, решетках из таких лент, была показана эквивалентность специального выбора базиса (так называемый базис ортогональной подстановки) использованию одного из вариантов метода полуобращения оператора. В результате были построены эффективные численные методы для длинноволнового и резонансного диапазонов. И хотя в трехмерной задаче рассеяния волн на прямоугольной пластине выполнить полуобращение оператора не удастся, нами было сделано предположение о целесообразности выбора аналогичных базисных функций.

**Анализ численных результатов**

Перейдем теперь к анализу численных результатов расчета конкретных электродинамических систем. В качестве объектов исследования рассматривались различные решетки, для задания геометрии которых использовались следующие параметры: форма пластины  $p1 = D_x / D_y$ , относительная толщина диэлектрического слоя  $p2 = h/l$  и коэффициент заполнения  $p3 = D_x / l$ . Для расчетов были выбраны три решетки лежащие на слое диэлектрика с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ , со следующими параметрами:  $p1 = 1$ ,  $p2 = 0,1$  и  $p3$  соответственно равным  $1/3$ ,  $1/5$  и  $1/7$ .

При всех вычислениях считалось, что допустимый уровень погрешности не должен превышать 1%. Исследования сходимости приближенных решений с ростом числа базисных функций показали, что для получения такой точности практически было достаточно использовать только базисные функции (14) со степенями полиномов Чебышева  $n, m$  такими, что  $n, m < 2k \max(D_x, D_y)$ .

Реально максимальный размер редуцированной системы уравнений не превосходил 72.

Поле, рассеянное решеткой, как показывает анализ выражения (4), состоит из дискретного набора конических пучков волн, распространяющихся под углами  $\alpha_m$  к оси  $Ox$ , где

$$\alpha_m = \arcsin\left(\frac{2\pi m / l + k_x}{k}\right). \quad (15)$$

При этом мнимые углы соответствуют пучкам, экспоненциально затухающим при удалении от решетки. В случае диэлектрика без поглощения влияние слоя на рассеянное поле (7) сказывается в появлении дифракционных гармоник, представляющих собой его собственные волны. Эти гармоники распространяются под углами  $\beta_{m,s}$  к оси  $Ox$

$$\beta_{m,s} = \arcsin\left(\frac{2\pi m / l + k_x}{\chi_s}\right), \quad (16)$$

где  $S$  — номер постоянной распространения ( $\chi_s$ ) собственной волны слоя, а  $m$  — номер гармоники этой волны.

Рассмотрим теперь нормальное возбуждение решетки (собственная волна распространяется вдоль оси  $Oy$ ). Одной из наиболее важных характеристик является отношение амплитуд прошедшей и возбуждающей собственных волн диэлектрического слоя - коэффициент прохождения  $T$ . Частотные зависимости коэффициента прохождения волн ТМ- и ТЕ-типов (соответственно  $T_{TM}$  и  $T_{TE}$ ) приведены на рис. 2 и рис. 3. В качестве безразмерного параметра задающего частоту, как и в двумерных задачах, используется  $\alpha = l/\lambda = lk/2\pi$ .

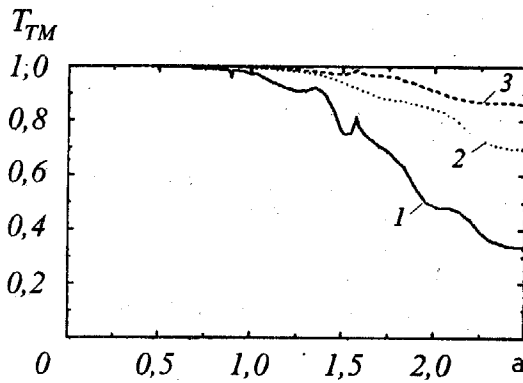


Рис. 2. Зависимость коэффициента прохождения ТМ-волны от  $\alpha$ : 1—  $p3 = 1/3$ ; 2—  $p3 = 1/5$ ; 3—  $p3 = 1/7$

На этих графиках хорошо видны изломы. Как известно [1], для периодических структур, составленных из бесконечно протяженных элементов и однородных в одном из направлений в пространстве, имеют место такие же аномалии в частотных зависимостях дифракционных характеристик в так называемых точках скольжения. Это связано с появлением новых распространяющихся гармоник на частотах, соответствующих этим точкам, что приводит к скачкообразному перераспределению энергии. В результате графики частотных зависимостей имеют в этих точках изломы. Поведение же дифракционных характеристик в трехмерных задачах дифракции волн на решетках из конечных элементов несколько иное. Такая решетка имеет аномалии только в точках скольжения гармоник собственных волн слоя и не имеет в точках скольжения гармоник волн, рассеиваемых в свободное пространство. Действительно, решетка рассеивает в свободное пространство не отдельные гармоники, а целый пучок распространяющихся вдоль конической поверхности волн. В момент появления конус волн бесконечно узок, и

поэтому составляющие его волны рассеивают бесконечно малую энергию. Следовательно, перераспределение энергии происходит постепенно. Иначе обстоит дело с гармониками из собственных волн диэлектрического слоя. Их поведение в этом отношении аналогично поведению гармоник в двумерных задачах, и поэтому в точках скольжения этих гармоник должны наблюдаться аномалии. Расчет показал, что для рассматриваемых решеток первым трем точкам скольжения собственных волн соответствуют следующие значения параметра  $\alpha$ :

$\alpha = 0,978; 1,832; 2,52$  — точки скольжения ТМ-волн,

$\alpha = 0,891; 1,57; 2,187$  — точки скольжения ТЕ-волн.

Как видно из графиков, в этих точках действительно происходит резкое изменение дифракционных параметров.

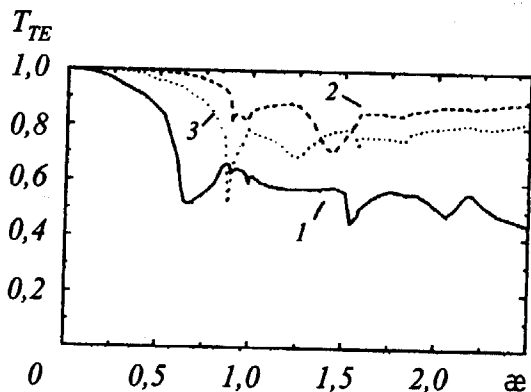


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения ТЕ-волны от  $\alpha$ : 1—  $p_3 = 1/3$ ; 2—  $p_3 = 1/5$ ; 3—  $p_3 = 1/7$ .

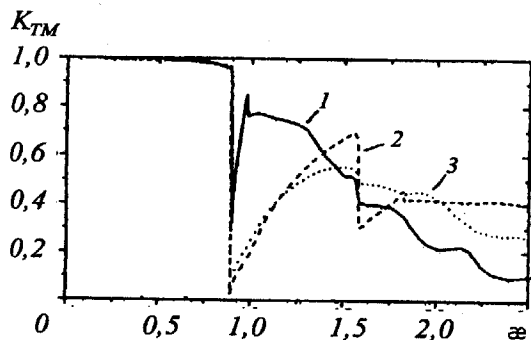


Рис. 4. Зависимость коэффициента рассеяния ТМ-волны в свободное пространство от  $\alpha$ :

1—  $p_3 = 1/3$ ; 2—  $p_3 = 1/5$ ; 3—  $p_3 = 1/7$ .

Другой важной характеристикой является коэффициент рассеяния собственной волны диэлектрического слоя в свободное пространство —  $K$ . На рис. 4 и рис. 5 приведены частотные зависимости коэффициента рассеяния волн ТМ- и ТЕ-типов. Как видно из графиков, при возбуждении

ТМ-волной почти вся энергия до появления вторичных распространяющихся гармоник рассеивается в свободное пространство. Это может быть объяснено следующим образом. Из свойств функции Грина диэлектрического слоя можно показать, что любой экран на слое диэлектрика существенно лучше рассеивает волны ТЕ-типа, чем ТМ-типа, и так как решетка до появления распространяющихся вторичных гармоник рассеивает только волну того же типа, что и возбуждающая, то при возбуждении ТМ-волной рассеивание в слой очень мало. Следовательно, коэффициент рассеяния в свободное пространство близок к единице.

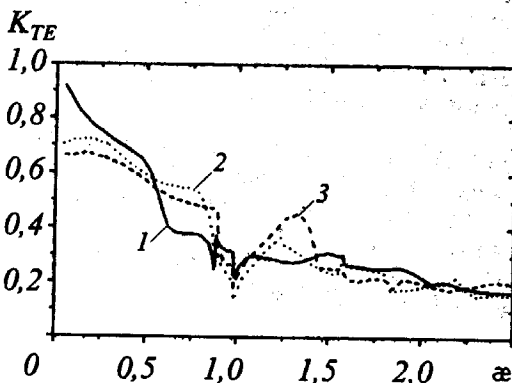


Рис. 5. Зависимость коэффициента рассеяния ТЕ-волны в свободное пространство от  $\alpha$ :

1—  $p_3 = 1/3$ ; 2—  $p_3 = 1/5$ ; 3—  $p_3 = 1/7$ .

### Выводы

В работе рассмотрена задача дифракции собственных волн диэлектрического слоя на периодической решетке из прямоугольных металлических пластин. Задача решена методом моментов. Предложен базис, учитывающий специфику задачи (низкую добротность элементов решетки), представляющий собой полиномы Чебышева с весами, соответствующими особенностям поведения тока на краях пластины. Проведенные численные исследования показали высокую эффективность алгоритма. Найдены частотные зависимости коэффициента прохождения собственных волн и коэффициента рассеяния в свободное пространство, прослежена зависимость этих характеристик от коэффициента заполнения решетки. Показано, что поведение частотных характеристик поля в трехмерных задачах дифракции волн на решетках имеет ряд отличий по сравнению с двумерными задачами. В частности, аномалии частотного поведения характеристик для рассматриваемых решеток наблюдаются только в точках скольжения дифракционных гармоник собственных волн. Для решеток на слое диэлектрика с по-

глюшением недифференцируемых особенностей в частотных зависимостях амплитуд дифракционных гармоник нет. Частотные зависимости во всех экстремумах становятся гладкими.

#### Литература

1. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. Харьков, Изд-во Харьк. ун-та, 1973, 288 с.
2. Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев, Наукова думка, 1984, 240 с.
3. Montgomery J.P. IEEE Trans. Antennas Propagat. 1975, v. AP-23, No.1, pp. 70-75.
4. Mahadevan K., Auda H.A., Glisson A.W. IEEE Trans. Antennas Propagat. 1986, v. AP-34, No.1, pp. 26-32.
5. Newman E.H., Tulyathan D. IEEE Trans. Antennas Propagat. 1981, v. AP-29, No.1, pp. 47-53.
6. Pozar D.M. IEEE Trans. Antennas Propagat. 1982, v. AP-30, No.11, pp. 1191-1196.
7. Jin J.M., Volakis J.L. IEEE Trans. Antennas Propagat. 1990, v. AP-38, No.4, pp. 556-563.
8. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Москва, Изд-во иностр. лит., 1958, т.1, 930 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва, Изд-во Наука, 1977, 736 с.

#### Dielectric Slab Eigen-Wave Diffraction by Periodic Grating of Rectangular Patches

G.E. Karvitsky, S.L. Prosvirnin

The 3-dimensional problem of dielectric slab eigen wave diffraction by a grating of thin rectangular metal patches placed on dielectric slab surface has been considered in rigorous statement. The grating is periodic in one direction on dielectric slab. The problem was solved by the moment method. The chosen base functions facilitate convergence of the algorithm. The numerical results of the propagation and the free space scattering coefficients versus frequency are given and analyzed for gratings with different ratio of period and patch size.