

Статистический анализ радиофизических процессов со скрытой периодичностью

В.Ю. Михайлишин, И.Н. Яворский

Физико-механический институт им. Г.В. Карпенко НАН Украины
Украина, Львов, ул. Научная, 5

Статья поступила в редакцию 1 декабря 1995 г., после переработки 5 апреля 1996 г.

Проблема выявления скрытых периодичностей формулируется как задача оценивания периода и вероятностных характеристик периодически нестационарного случайного процесса. Рассматриваются методы определения оценок периода и первых двух моментных функций по реализации нестационарного случайного сигнала. Приводится пример анализа структуры скрытой периодичности в стохастическом модулированном колебании.

Проблема виявлення прихованих періодичностей формулюється як задача оцінювання періоду та ймовірнісних характеристик періодично нестационарного випадкового процесу. Розглядаються методи визначення оцінок періоду і перших двох моментних функцій по реалізації нестационарного випадкового сигналу. Дається приклад аналізу структури прихованої періодичності в стохастично модульованому коливанні.

1. Введение

Для решения задач, связанных с изучением структуры колебаний и закономерностей распространения волн, широко используются вероятностные методы описания и анализа сигналов. В основе их разработки и применения лежат вероятностные модели скрытой периодичности. Являясь полезной и очевидной математической абстракцией повторяющегося хода физических процессов, периодическая функция отражает его в детерминистической форме. Предположение о проявлении периодичности в "чистом" виде - достаточно сильная идеализация. Реально периодичность маскируется случайными флуктуациями, и необходимость их учета требует использования определенных вероятностных представлений. Поэтому логично отнести свойство периодичности не к конкретным реализациям физического процесса, а к вероятностным характеристикам надлежащим образом обоснованной вероятностной модели в виде случайного процесса. Тогда в рамках теории второго порядка структуру скрытой периодичности адекватно отображают периодические по времени моментные функции: математическое ожидание $m(t) = E\xi(t)$, корреляционная функция $b(t,u) = E\xi(t+u)\xi(t)$, $\xi(t) = \xi(t) - m(t)$ и ее преобразование Фурье - переменная спектральная плотность

$$f(\omega, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} b(t, u) \exp(-i\omega u) du.$$

Предполагая функции $m(t)$, $b(t, u)$, $f(\omega, t)$ абсолютно интегрируемыми на интервале $[0, T]$, можем представить их в виде рядов Фурье

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k \exp(ik\omega_0 t),$$

$$b(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) \exp(ik\omega_0 t),$$

$$f(\omega, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(\omega) \exp(ik\omega_0 t),$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Случайные процессы, математиче-

ское ожидание и корреляционные функции которых периодически изменяются во времени, называют периодически коррелированными случайными процессами (ПКСП) [1-3].

Как следует из представления ПКСП через стационарно связанные компоненты

$$\xi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(t) \exp(ik\omega_0 t), \quad (1)$$

в такой модели предполагается возможность существования как амплитудной, так и фазовой стохастической модуляции гармоник, что позволяет рассматривать и описывать нестационарные проявления случайности и периодичности в радиофизических процессах. Из представления (1) следуют как частные случаи известные модели скрытой периодичности: аддитивная модель

$$\xi(t) = f(t) + \eta(t), \quad (2)$$

где $\eta(t)$ - стационарный случайный процесс, а $f(t)$ - периодическая функция; мультипликативная модель $\xi(t) = \eta(t)f(t)$; аддитивномultiпликативная, полигармоническая, а также их комбинации.

Модель в виде ПКСП, по-видимому, впервые была физически обоснована Л.И. Гудзенко для анализа флуктуаций в автогенераторе [4]. При этом на основании решения уравнений существенно нелинейной автоколебательной системы им были получены явные выражения для корреляционных и спектральных характеристик такого ПКСП. Свойством периодической нестационарности обладают магнитные шумы при циклическом перемагничивании ферромагнетика и дробовой ток в электронной лампе [5]. Системы такого типа возникают в сканерах, кодирующих устройствах, аналого-цифровых преобразователях. Периодическое изменение во времени вероятностных характеристик модулированных сигналов обусловлено тем, что их несущая является либо непрерывной периодической функцией времени, либо периодическим потоком импульсов. Модуляция такой несущей может быть искусственной (системы связи, телеметрии) или естественной, возникающей при распространении волн через неоднородную изменяющуюся во времени среду [6], например, ионосферу, а также при отражении волн от неровной поверхности [7]. Изучение стохастических колебаний на базе ПКСП позволяет создать универсальные методы статистического анализа скрытых периодичностей и на их основании с использованием реальных данных исследовать и описать корреляционную и спектральную структуру периодической нестационарности. Знание такой структуры необходимо при решении задач преобразования сигналов, их моделирования, прогнозирования, создания метрологического обеспечения их статистической обработки. С характером временной изменчивости вероятностных характеристик сигналов связаны принципиально новые сведения о свойствах объектов, которые их порождают или через которые они распространяются. И эти сведения весьма полезны при изучении физической природы явлений, а также диагностики объектов.

Изучение колебаний на базе ПКСП позволяет создать универсальные методы статистического анализа скрытых периодичностей и в единых терминах провести интерпретацию результатов обработки реальных данных. Вопросам статистического анализа стохастических колебаний посвящен ряд работ авторов и их коллег (см., например, [8-13]). Следует выделить задачу о статистическом анализе ПКСП при априори неизвестном периоде коррелированности T . Сформулируем ее, используя исторически сложившуюся терминологию, как задачу выявления скрытых периодичностей. Как следует из вышеизложенно-

го, вероятностная модель скрытой периодичности в виде ПКСП является естественным обобщением уже существующих моделей, и поэтому логично предположить, что на этой основе можно развить более эффективные методы ее выявления. В данной работе дается анализ разработанных авторами методов оценивания периода коррелированности ПКСП, рассматривается применение развитой методологии для исследования вероятностной структуры модулированных колебаний.

2. Выявление скрытых периодичностей

Возникнув из запросов астрономии и геофизики в конце XVIII века, задача о выявлении скрытых периодичностей в значительной степени стимулировала развитие методов анализа временных рядов наблюдений разнообразных физических явлений. Эволюция методов ее решения прежде всего связана с развитием математических моделей, в терминах которых описывались периодичность и случайность хода процессов. Первые исследования скрытой периодичности базировались на использовании селективных преобразований, выделяющих периодические компоненты [14]. Среди них схема Бью-Балло, основанная на усреднении значений через пробный период, преобразование Фурье, в котором вместо неизвестного периода также используется некоторая пробная величина, различные модификации таких преобразований. При таком подходе предполагалось, что наблюдаемый ряд является последовательностью значений периодической функции, незначительно "испорченной" стохастическими флуктуациями. Однако такая ситуация редко имеет место. Первый шаг к учету таких флуктуаций - аддитивная модель (2). Начало развитию методов анализа процессов, описывающихся моделью (2), было положено работами А. Шустера [15,16]. Впоследствии его исследования оказали глубокое влияние на формирование идей и методов классического спектрального оценивания. Для выявления периодичностей А. Шустер предложил использовать периодограмму

$$I_N(\omega) = \frac{2}{N} \left| \sum_{n=1}^N \xi(t_n) \exp(ik\omega t_n) \right|^2, \quad (3)$$

где $t_n = n\Delta t$, Δt - интервал дискретизации. Поиск периодичностей в анализируемых рядах основывается на выявлении статистически значимых локальных максимумов статистики (3) по параметру ω . Однако уже сам А. Шустер указывал на значительные трудности, возникающие при таком подходе. Им было показано, что мощность флуктуационных изменений периодограммы не уменьшается при увеличении выборки данных. Е.Е. Слуцкий [17], показавший, что осцилляторный характер процессов может порождаться взаимодействием случайных факторов, вообще

поставил под сомнение саму идею выявления скрытых периодичностей на основе анализа периодограмм.

Принципиально новый подход к задаче был предложен Дж. Юлом [18]. Он отказался от аддитивной модели (2) и рассматривал данные измерений как реакцию некоторой линейной системы на случайное возмущение. Для описания временного ряда Дж. Юлом была по сути использована модель затухающей косинусоиды. Работы Дж. Юла заложили основу для параметрического спектрального анализа. Применение статистических методов спектрального анализа стационарных случайных процессов для решения задачи о выявлении скрытых периодичностей теоретически обосновано Н. Винером и А.Я. Хинчиным, а Дж. Тьюки разработал практические методы оценивания спектральной мощности по экспериментальным данным. Они основывались на использовании преобразования Фурье сглаженной оценки корреляционной функции. Отсутствием такого сглаживания были объяснены и "плохие" асимптотические свойства периодограммы (3). С тех пор задача выявления скрытых периодичностей обычно формулируется и решается в рамках представлений спектрального оценивания стационарных случайных процессов (ССП) [14,19-21].

Современные методы спектрального анализа СПП подробно рассмотрены, например, в книге С.Л. Марпла [22]. Здесь обратим внимание на постановку задачи о поиске скрытых периодичностей в рамках модели в виде СПП. Ее выявление сводится к обнаружению достоверных пиков оценок спектральной плотности мощности [21]. При таком подходе для интерпретации локально максимальных значений оценок спектральной плотности мощности необходимы априорные сведения о структуре временного ряда. Если предположить, что ряд описывается моделью (2), то такие пики должны обязательно иметь место в точках, соответствующих частотам гармонических составляющих. Однако использование в данном случае метода спектрального анализа СПП некорректно, ибо процесс (2) не является стационарным. Пиковые значения оценки спектральной плотности на частотах гармонических составляющих функции $f(t)$ вовсе не характеризуют мощности последних, а лишь свидетельствуют об их возможном присутствии. Трудности интерпретации результатов спектрального оценивания возникают также из-за того, что выявленные пики могут быть результатом узкополосности самого случайного процесса $\eta(t)$. Поэтому появляется идея задачу анализа составляющих $f(t)$ и $\eta(t)$ формулировать и решать раздельно [23]. И здесь логично возникает вопрос о том, почему поиск скрытых периодичностей всегда ограничивался простейшей моделью (2), т.е. всего лишь частным случаем представления ПКСП (1). Необходимость решения задачи

выявления скрытых периодичностей в предлагаемой новой постановке становится еще более очевидной, если принять во внимание результаты статистической обработки методами ПКСП многочисленных временных рядов измерений процессов. Эти результаты показали, что многие процессы обладают существенной периодической нестационарностью как первого, так и второго порядков [3,9,11,12,24]. При этом оказывается, что нестационарная структура скрытой периодичности процессов не всегда проявляется в оценках спектральных характеристик, полученных с помощью методов статистической обработки стационарных временных рядов. Постановка задачи выявления скрытых периодичностей в терминах статистического оценивания вероятностных характеристик ПКСП с неизвестным периодом коррелированности позволяет устранить существующие противоречия традиционных подходов, разделяя поиск детерминированных периодических колебаний и периодических закономерностей временной изменчивости флуктуационных свойств процессов. Именно в такой постановке задача выявления периодичностей была сформулирована в работах [25-28]. Рассмотрим возможные методы ее решения.

3. Метод максимального правдоподобия

На основе представления (1) задача определения периода коррелированности T может решаться как задача параметрического оценивания. Если ПКСП гауссовский, то можно воспользоваться методом максимального правдоподобия. Предположим, что процесс наблюдается на интервале времени $[0, \theta]$ на фоне гауссовского белого шума $\eta(t)$ со спектральной плотностью мощности N_0 : $x(t) = \xi(t) + \eta(t)$. Логарифм функционала отношения правдоподобия в этом случае запишется в форме

$$M(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\theta \int_0^\theta x(t)x(s)g(t,s,\tau)dsdt - \frac{1}{2}H(\tau),$$

при этом функция $g(t,s,\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{N_0}{2}g(t,s,\tau) + \int_0^\theta r_\xi(t,t,\tau)g(t,s,\tau)dt = \frac{2}{N_0}r_\xi(t,s,\tau), \quad (4)$$

где $r_\xi(t,s,\tau) = E\xi(t,\tau)\xi(s,\tau)$, а $H(\tau)$ определяется выражением

$$H(\tau) = \int_0^1 \int_0^\theta d\chi \int_0^\theta \tilde{g}(t,t,\tau,\chi)dt, \text{ где } \tilde{g}(t,t,\tau,\chi)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{N_0}{2} \tilde{g}(t, s, \tau, \chi) + \chi \int_0^\theta r_\xi(t, t_1, \tau) \times \tilde{g}(t_1, s, \tau, \chi) dt_1 = r_\xi(t, s, \tau), \quad (5)$$

где χ - некоторая вспомогательная переменная и $r_\xi(t, s) = E\xi(t)\xi(s)$,

$$r_\eta(t, s) = E\eta(t)\eta(s) = \frac{N_0}{2} \delta(t-s).$$

Решения интегральных уравнений ищутся в виде

$$g(t, s, \tau) = \sum_{nk} g_{nk}(t-s) \exp\left[i \frac{2\pi}{\tau} (nt - ks)\right],$$

$$\tilde{g}(t, s, \tau, \chi) = \sum_{nk} \tilde{g}_{nk}(t-s, \chi) \exp\left[i \frac{2\pi}{\tau} (nt - ks)\right].$$

Предполагая, что интервалы корреляции и взаимной корреляции компонент $\xi_k(t)$ удовлетворяют условию $\tau \ll u_{nk} \ll \theta$ и, применяя к обеим частям уравнений (4)-(5) преобразование Фурье, получаем

$$\frac{N_0}{2} G_{nk}(\omega) + \sum_p D_{np}(\omega) G_{pk}(\omega) = \frac{2}{N_0} D_{nk}(\omega),$$

$$\frac{N_0}{2} \tilde{G}_{nk}(\omega) + \chi \sum_p D_{np}(\omega) \tilde{G}_{pk}(\omega) = D_{nk}(\omega),$$

где $D_{nk}(\omega)$, $G_{nk}(\omega)$, $\tilde{G}_{nk}(\omega)$ - Фурье-образы корреляционных функций

$$r_{nk}(t-s) = E\xi_n(t) \times \xi_k(s),$$

(черта сверху обозначает комплексное сопряжение), и функций $g_{nk}(t-s)$, $\tilde{g}_{nk}(t-s, \chi)$. Решение данных систем уравнений и вычисление обратных преобразований Фурье этих решений позволяет найти искомые функции $g(t, s, \tau)$, и $\tilde{g}(t, s, \tau, \chi)$.

Оценка периода коррелированности \hat{T} определяется положением абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия. Дифференцируя функционал правдоподобия по параметру τ и приравняв производную нулю, получим нелинейное уравнение правдоподобия. Его решение ищется в виде ряда по степеням малого параметра ε

$$\hat{T} = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots \quad (6)$$

Величина ε определяется отношением помеховой сигнальной составляющей логарифма отношения правдоподобия:

$$\varepsilon = \frac{[EN^2(T)]^2}{EM(T)}, \quad N(T) = M(T) - EM(T).$$

При $\theta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и при больших θ параметр ε будет достаточно малым. В линейном приближении по параметру ε оценка (6) является несмещенной, а ее дисперсия совпадает с дисперсией эффективной оценки. Эта эффективность достигается за счет априорных данных о вероятностной структуре ПКСП. Однако на начальном этапе исследований данные о структуре процесса, как правило, отсутствуют. Это приводит к необходимости использовать методы, которые хотя и менее эффективны, но таких знаний не требуют. В основу разработки этих методов могут быть положены идеи когерентного и компонентного оценивания вероятностных характеристик ПКСП.

4. Когерентный метод

Когерентные оценки математического ожидания и корреляционной функции ПКСП формируются на основании отсчетов через период коррелированности T . Если в формуле для когерентной оценки математического ожидания неизвестный период рассматривать как параметр τ , то выражение для такой оценки

$$\hat{m}(t, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+n\tau), \quad (7)$$

где $2N+1$ - количество обрабатываемых периодов колебания, обобщает на случай ПКСП известную схему Бью-Балло. Регулярная составляющая функционала (7) имеет вид

$$\tilde{S}(\tau) = E\hat{m}(t, \tau) = \sum_{l \in Z} h_l(\tau) \exp(il\omega_0 t),$$

где

$$h_l(\tau) = \frac{\sin\left[l\omega_0\left(N + \frac{1}{2}\right)\tau\right]}{(2N+1)\sin(l\omega_0\tau)} = h_l(\tau + kT), \quad k \in Z.$$

Функция $h_l(\tau)$ периодическая с периодом T . При $\tau = kT$, $k \in Z$, она принимает максимальные значения, которые равны единице. Боковые максимумы при больших N незначительны и стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что функционал (7) при $\tilde{N}(\tau) = \hat{m}(t, \tau) - \tilde{S}(\tau) \equiv 0$ в точках, где пробный период равен целому числу периодов коррелированности ПКСП, достигает абсолютно экстремальных значений. Характер этих экстремумов определяется знаком второй производной регулярного компонента

$$\frac{d^2 \tilde{S}}{d\tau^2} = \frac{m''(t)}{3} N(N+1),$$

где $m''(t)$ - вторая производная математического ожидания. Для определенности будем полагать,

что $m''(t) < 0$. Точки $\tau = kT$ тогда будут точками абсолютных максимумов.

Введем в рассмотрение отношение

$$\varepsilon = \frac{[E\tilde{N}^2(T)]^{1/2}}{\tilde{S}(T)} \text{ и нормированные компоненты}$$

$$S(\tau) = \frac{\tilde{S}(\tau)}{\tilde{S}(T)}, \quad N(\tau) = \frac{\tilde{N}(\tau)}{[E\tilde{N}^2(T)]^{1/2}}. \quad \text{Оценка}$$

периода коррелированности определяется положением абсолютного максимума функционала

$$\tilde{m}(t, \tau) = \tilde{S}(T)[S(\tau) + \varepsilon N(\tau)]. \text{ Ее находим путем}$$

решения уравнения

$$\left[\frac{dS(\tau)}{d\tau} + \varepsilon \frac{dN(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}} = 0. \quad (8)$$

Параметр ε в данном случае равен

$$\varepsilon = \frac{1}{\tilde{S}(T)(2N+1)} \left[\sum_{n=-2N}^{2N} (1-|n|) b(t, nT) \right]^{1/2},$$

где $b(t, u)$ определена выше. Если корреляционная функция ПКСП удовлетворяет условию

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} b(t, u) = 0, \quad (9)$$

то при достаточно большом количестве обрабатываемых периодов процесса отношение ε будет мало. Это дает возможность при решении уравнения (8) воспользоваться методом малого параметра, представляя его в виде (6). Ограничиваясь первым приближением, имеем $E\hat{T} = T$. Дисперсия же оценки определяется выражением

$$D[\hat{T}] = 9[N(N+1)(2N+1)m''(t)]^{-2} \times \sum_{k, l=-N}^N \left[\frac{\partial b(t+nx, ky-nx)}{\partial x \partial y} \right]_{x, y=T}$$

Легко видеть, что $D[\hat{T}] \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Более точная формула для смещения и дисперсии получается при использовании высших приближений T_2, T_3 , и т. д. Так, во втором приближении оценка \hat{T} будет уже асимптотически несмещенной. Однако чем продолжительнее обрабатывается реализация, тем погрешность оценок, найденных в первом приближении, будет меньше. Отсюда следует, что величина \hat{T} , при которой функционал (7) принимает абсолютно максимальное значение, является асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой периода коррелированности ПКСП. Формула (7) становится непригодной для оценки периода, когда

$m(t) = 0$. В этом случае для оценки периода может быть использован корреляционный функционал

$$\hat{b}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t+n\tau) \xi(t+u+n\tau). \quad (10)$$

Его регулярная составляющая при $\tau = kT$ и заданных t и u принимает абсолютно максимальное значение. Наличие флуктуационной составляющей сдвигает положение максимума, однако при больших длинах обрабатываемой реализации такое отклонение будет незначительным. Вводя, как и ранее, параметр ε , который теперь определяется выражением (ПКСП предполагаем гауссовским)

$$\varepsilon = \frac{1}{\tilde{S}(T)(2N+1)} \left[\sum_{n=-2N}^{2N} (1-|n|) \times \right. \\ \left. \times [b(t, nT)b(t+u, nT) + b(t, u+nT)b(t, u-nT)] \right]^2$$

для нормированных компонентов функционала получаем уравнение, аналогичное (8). Величина ε при выполнении условия (9) стремится к нулю, если $N \rightarrow \infty$, а для достаточно больших N будет малой величиной. Поэтому решение этого уравнения можно находить методом малого параметра. Получаемые решения дают приближения для оценки периода в данном случае. Эта оценка также асимптотически несмещенная и состоятельная.

5. Компонентный метод

Для определения периода коррелированности ПКСП могут применяться и интегральные преобразования [26, 28], например,

$$\left\{ \hat{m}_i^c(\tau) \right\} = (2\theta)^{-1} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \tilde{\Lambda}_i t dt, \quad (11)$$

$$\left\{ \hat{B}_i^c(u, \tau) \right\} = (2\theta)^{-1} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) \xi(t+u) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \tilde{\Lambda}_i t dt,$$

$$\tilde{\Lambda}_i = l \frac{2\pi}{\tau}, \quad (12)$$

где θ - длина обрабатываемого участка реализации, и формируемые на их основании частные суммы

$$\hat{m}(t, \tau) = \sum_{l=-N_1}^{N_1} \hat{m}_l(\tau) \exp\left(il \frac{2\pi}{\tau} t \right), \quad (13)$$

$$\hat{b}(t, u, \tau) = \sum_{l=-N_2}^{N_2} \hat{B}_l(u, \tau) \exp\left(il \frac{2\pi}{\tau} t\right), \quad (14)$$

где N_1 и N_2 - номера наивысших компонентов математического ожидания и корреляционной функции. Регулярные компоненты функционалов (11)-(14) достигают экстремумов при значениях пробного периода τ , которые при больших θ мало отличаются от периода коррелированности ПКСП, и при этом с увеличением θ разница между ними уменьшается. Положение максимумов при наличии шумовых компонентов случайным образом сдвигается в окрестности неизвестного истинного значения периода коррелированности, однако, как показывает анализ, такой сдвиг при увеличении θ также неограниченно убывает. Для получения формул, определяющих статистическую точность оценивания периода, можно, как и ранее, ввести параметр ϵ , который определяется отношением помеховой и сигнальной составляющей функционалов (11)-(14), которые при выполнении условия (9) и больших θ будут достаточно малыми величинами. Такой малый параметр для функционала (13) имеет вид:

$$\epsilon = S^{-1}(T) \left[\frac{1}{4\theta^2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} \exp(i(l-n)\omega_0 t) \times \int_{-9}^0 \int b(s_1, s_2 - s_1) \exp(i\omega_0(ns_2 - ls_1)) ds_1 ds_2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Смещение оценки в линейном по ϵ приближении равно $\epsilon_1[\hat{T}] = -S_1 / S_2$, где

$$S_1 = \hat{S}^{-1}(T) \left[\frac{i}{2\theta T} \sum_{l=-N_1}^{N_1} l\omega_0 \times \int_{-9}^0 (s-t)m(s) \exp(il\omega_0(t-s)) ds \right], \quad (15)$$

$$S_2 = -\hat{S}^{-1}(T) \left[\frac{i}{\theta T^2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} l\omega_0 \times \int_{-9}^0 (s-t)m(s) \exp(il\omega_0(t-s)) ds + \frac{i}{2\theta T^2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} (l\omega_0)^2 \times \int_{-9}^0 (s-t)^2 m(s) \exp(il\omega_0(t-s)) ds \right]. \quad (16)$$

Дисперсия этой оценки имеет вид

$$D[\hat{T}] = \frac{i}{4\theta^2 T^2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} l n \omega_0^2 \exp(i(l-n)\omega_0 t) \times \int_{-9}^0 \int (t_1 - t)(t - t_2) b_1(t_1, t_2 - t_1) \times \exp(i\omega_0(nt_2 - lt_1)) dt_1 dt_2 \left[\frac{i}{\theta T^2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} l\omega_0 \times \int_{-9}^0 (t_1 - t)m(t_1) \exp(il\omega_0(t - t_1)) dt_1 + \frac{i}{2\theta T^2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} (l\omega_0)^2 \int_{-9}^0 (t_1 - t)^2 m(t_1) \exp(il\omega_0(t - t_1)) dt_1 \right]^2. \quad (17)$$

Анализ соотношений (15-16) показывает, что смещение $\epsilon_1[\hat{T}] \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$. Таким же свойством обладает и дисперсия $D[\hat{T}]$, если выполняется предельное соотношение (9). Так как с увеличением θ увеличивается и точность первого приближения, то отсюда следует, что оценка периода, определяемая как точка абсолютного экстремума функционала (13), асимптотически несмещенная и состоятельная.

Положительным свойством статистик (11)-(14), как и (7) и (10), является то, что позволяя определять период коррелированности ПКСП, они одновременно дают оценки и самих характеристик.

Предварительное оценивание периода коррелированности, естественно, вносит дополнительные ошибки при вычислении вероятностных характеристик ПКСП. Так оценка математического ожидания при конечном θ уже обладает смещением, которое при когерентном оценивании периода в первом приближении по ϵ имеет вид:

$$E[\hat{m}(t)] = -\frac{1}{2\theta S_2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} l\omega_0 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-9}^0 (t_1 - t) \times \left[\frac{\partial b(t_1, t - t_1 + nx)}{\partial x} \right]_{x=T} \exp(il\omega_0(t - t_1)) dt_1,$$

а при компонентном

$$E[\hat{m}(t)] = \frac{i}{4\theta^2 T^2 S_2} \sum_{l=-N_1}^{N_1} l n \omega_0^2 \times \exp(i(l+n)\omega_0 t) \int_{-9}^0 \int (t_1 - t)(t_2 - t) \times \exp(-i\omega_0(nt_2 + lt_1)) b_1(t_1, t_2 - t_1) dt_1 dt_2,$$

где $S_2 = \left[\frac{d^2 N(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=T}$. Если выполняется усло-

$$\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)], \quad (18)$$

вие (9), то смещение неограниченно уменьшается. С ростом длины реализации θ предварительное определение периода все меньше будет влиять и на величину дисперсий оценок математического ожидания, и на величины показателей качества оценивания корреляционных характеристик. Это позволяет сделать вывод о том, что в данной ситуации свойства оценок не претерпевают принципиальных изменений.

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ - стационарные случайные процессы, вероятностная структура которых задается при решении конкретных задач. Модель колебания, модулированного шумом, получила широкое распространение в радиофизике. Ею описываются свойства радиосигналов [29], собственные шумы радиоприемника [30], автоколебания в генераторе [4,31,32], волновые процессы в статистически неоднородных средах [6,30] и многие другие явления. Однако, если не считать работы [4] и некоторых замечаний [6,30], исследования, в основе которых лежит модель (18), выполнены только в рамках ее стационарного приближения. Мы будем рассматривать модулированное колебание (18) как ПКСП.

Естественным способом построения статистик для определения периода коррелированности по дискретным данным является замена соответствующих интегральных преобразований на интегральные суммы. Дискретные аналоги функционалов (11)-(12) тогда имеют вид

Представим процесс (18) в виде суммы квадратурной и синфазной составляющей

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_0 t + \xi_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (19)$$

$$\begin{cases} \hat{m}_1^c(\tau) \\ \hat{m}_1^s(\tau) \end{cases} = (2K+1)^{-1} \sum_{n=K}^K \xi(nh) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \tilde{\Lambda}_1 nh,$$

$$\begin{cases} \hat{B}_1^c(u, \tau) \\ \hat{B}_1^s(u, \tau) \end{cases} = (2K+1)^{-1} \sum_{n=K}^0 \xi(nh) \xi^0(nh+u) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \tilde{\Lambda}_1 nh,$$

где $\xi_c(t) = A(t) \cos \varphi(t)$, $\xi_s(t) = A(t) \sin \varphi(t)$. Модель (19) следует из общего представления ПКСП (1), если в последнем отличны от нуля только первые компоненты $\xi_1(t)$ и $\xi_{-1}(t)$ и при этом

где $\theta = (2K+1)h$, h - интервал дискретизации. Интервал h должен выбираться таким образом, чтобы смещение и дисперсия соответствующих оценок при дискретной и непрерывной обработке мало отличались. Конкретные рекомендации по выбору необходимого шага дискретизации и длины обрабатываемой реализации для обеспечения заданной достоверности оценок могут быть сформулированы на основании анализа приведенных выше соотношений для ПКСП с типовыми вероятностными характеристиками. Сравнительный анализ когерентного и компонентного методов оценивания периода показывает, что последний будет иметь преимущество по достоверности при быстром ослаблении корреляционных связей на отрезке реализации процесса, равном периоду коррелированности.

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2} [\xi_c(t) - i \xi_s(t)], \quad \xi_{-1}(t) = \frac{1}{2} [\xi_c(t) + i \xi_s(t)].$$

Математическое ожидание ПКСП (19) имеет только первый косинусный $m_c = E \xi_c(t)$ и синусный $m_s = E \xi_s(t)$ компоненты, а корреляционная функция

6. Анализ модулированных колебаний

Разработанные методы выявления и анализа скрытых периодичностей уже использовались для изучения свойств ультранизкочастотных волновых явлений в магнитосфере, ветрового волнения и зыби, годовых и межгодовых ритмов геофизических процессов, ряда чисел Вольфа, виброакустических сигналов и др. На их основании были получены новые результаты в изучении вероятностной структуры этих процессов. Ниже рассмотрим применение такого подхода для анализа случайно модулированного по амплитуде и фазе сигнала

$$B_0(u) = \frac{1}{2} [D_{cc}(u) + D_{ss}(u)] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} [D_{cs}(u) - D_{sc}(u)] \sin \omega_0 u$$

и вторые корреляционные компоненты

$$B_2^c(u) = \frac{1}{2} [D_{cc}(u) - D_{ss}(u)] \cos \omega_0 u + \frac{1}{2} [D_{cs}(u) + D_{sc}(u)] \sin \omega_0 u,$$

$$B_2^s(u) = \frac{1}{2} [D_{ss}(u) - D_{cc}(u)] \sin \omega_0 u - \frac{1}{2} [D_{cs}(u) + D_{sc}(u)] \cos \omega_0 u,$$

нулевой.

Взаимную корреляционную функцию квадратурных составляющих $D_{cs}(u)$ представим в виде суммы четной и нечетной функций

$$D_{cs}(u) = D_{cs}^{(e)}(u) + D_{cs}^{(o)}(u).$$

Тогда

$$D_{sc}(u) = D_{cs}^{(e)}(u) - D_{cs}^{(o)}(u) \text{ и}$$

$$D_{cs}(u) - D_{sc}(u) = 2D_{cs}^{(o)}(u),$$

$$D_{cs}(u) + D_{sc}(u) = 2D_{cs}^{(e)}(u).$$

Нулевой корреляционный компонент, как видно, зависит от суммы автокорреляционных функций квадратур и нечетной части их взаимной корреляционной функции, а вторые компоненты - от четной части последней и разности автокорреляций. Таким образом, случайный процесс (19) может быть стационарным тогда и только тогда, когда $D_{cc}(u) = D_{ss}(u)$ и $D_{cs}^{(e)} \equiv 0$.

Для спектральных компонентов процесса (19) находим

$$f_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta [D_{cc}(u) + D_{ss}(u)] \cos \omega_0 u + 2D_{cs}^{(o)}(u) \sin \omega_0 u \cos \omega u du, \quad (20)$$

$$D_{cc}(u) = D_c \exp(-\alpha_c |u|),$$

$$D_{cs}^{(e)}(u) = D_{cs}^{(e)} \exp(-\alpha_{cs}^{(e)} |u|), \quad D_{cs}^{(o)}(u) = D_{cs}^{(o)} u \exp(-\alpha_{cs}^{(o)} |u|).$$

Спектральные компоненты (20) - (22) для такого процесса тогда принимают вид

$$f_0(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{D_c \alpha_c}{\alpha_c^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{D_c \alpha_c}{\alpha_c^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right] + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{D_s \alpha_s}{\alpha_s^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{D_s \alpha_s}{\alpha_s^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right] + \frac{D_{cs}^{(o)} \alpha_{cs}^{(o)}}{\pi} \left[\frac{\omega + \omega_0}{[(\alpha_{cs}^{(o)})^2 + (\omega + \omega_0)^2]^2} + \frac{\omega_0 - \omega}{[(\alpha_{cs}^{(o)})^2 + (\omega_0 - \omega)^2]^2} \right], \quad (23)$$

$$\operatorname{Re} f_2(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{D_c \alpha_c}{\alpha_c^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{D_s \alpha_s}{\alpha_s^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right], \quad (24)$$

$$\operatorname{Im} f_2(\omega) = \frac{D_{cs}^{(e)} \alpha_{cs}^{(e)}}{2\pi [(\alpha_{cs}^{(e)})^2 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (25)$$

Нулевой спектральный компонент - четная функция частоты $f_0(-\omega) = f_0(\omega)$, а характеристики (24) и (25) удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Re} f_2(-\omega) = \operatorname{Re} f_2(\omega + 2\omega_0),$$

$$\operatorname{Im} f_2(-\omega) = \operatorname{Im} f_2(\omega + 2\omega_0).$$

Если декременты затухания $\alpha_c, \alpha_s, \alpha_{cs}^{(n)}$ больше, чем $\omega_0 \sqrt{3}$, то нулевой спектральный компонент (23) монотонно убывает с ростом $|\omega|$. При выполнении обратного неравенства эта функция уже будет иметь максимум, положение которого не совпадает с $\pm \omega_0$. И тогда, когда декременты α в

$$\operatorname{Re} f_2(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\theta [D_{cc}(u) - D_{ss}(u)] \cos(\omega - \omega_0) u du, \quad (21)$$

$$\operatorname{Im} f_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta D_{cs}^{(e)}(u) \cos(\omega - \omega_0) u du. \quad (22)$$

Каждая из спектральных характеристик (20)-(22) отражает разные свойства квадратурных составляющих. Нулевой спектральный компонент, определяя распределение по частотам средней мощности, зависит от суммы их автокорреляций и нечетной части их взаимных корреляций. Действительная часть второго спектрального компонента определяется только разностью автокорреляций, а мнимая - только четной частью их взаимной корреляции. Очевидно, что характеристики сигнала, содержащиеся во вторых спектральных компонентах, принципиально не могут быть получены при анализе только нулевого спектрального компонента, т. е. в рамках стационарного приближения.

Предположим, что

$$D_{ss}(u) = D_s \exp(-\alpha_s |u|),$$

$$D_{cs}^{(o)}(u) = D_{cs}^{(o)} u \exp(-\alpha_{cs}^{(o)} |u|).$$

(23) значительно меньше $\omega_0 \sqrt{3}$, точки этих максимумов будут практически совпадать с частотами $\pm \omega_0$.

Также размываются и исчезают с ростом декрементов максимумы действительной (24) и мнимой (25) частей второго спектрального компонента. Если при этом из процесса (18) не исключена регулярная периодическая составляющая, обусловленная ненулевыми математическими ожиданиями квадратурных компонентов, то спектральные характеристики будут обладать дополнительными δ -скачками на частотах $\omega = \pm \omega_0$.

Отсутствие же локальных максимумов вовсе не дает основания для заключения об отсутствии скрытой периодичности

Для верификации разработанного нами подхода было проведено компьютерное моделирование процесса (19) при разных соотношениях параметров аппроксимации $b(t,u)$. Обработка полученных реализаций состояла в вычислении функционалов математического ожидания, корреляционной функции, суммы модулей их Фурье-компонентов, а также оценивания самих вероятностных характеристик процесса.

При определении периода коррелированности на основании функционалов $\hat{m}(t,\tau)$ и $\hat{b}(t,u,\tau)$ исследован характер их зависимости от τ и от значения момента времени оценивания t . Если вторые производные характеристик по времени меньше нуля, то точки \hat{T} будут точками максимумов, а при $m''(t), b''(t,u) > 0$ - точками минимумов. В точках перегиба, где вторые производные равны нулю, дисперсия оценок периода неограниченно увеличивается, поэтому эти моменты времени непригодны для определения периода. Значительной будет дисперсия и при малых

значениях второй производной. Поэтому следует определять период в окрестности точек экстремальных значений вторых производных по t . Для таких моментов времени и представлены на рис. 1 графики вычисленных функционалов. Все они имеют абсолютный максимум при значениях пробного периода, близких к периоду несущей. Ширина главного максимума и уровень его боковых лепестков зависят от длительности реализации и соотношения между мощностями периодических и случайных колебаний в данном сигнале. Применение функционалов математического ожидания оправдано в случае, когда мощность регулярных колебаний превосходит мощность флуктуаций. С ростом относительного уровня периодической нестационарности второго порядка дисперсия случайных отклонений положения главного максимума от истинного значения периода будет увеличиваться и более мощными становятся его боковые лепестки. Вместе с тем, рост колебательной мощности флуктуационных изменений, определяющийся для модели (19) величинами вторых корреляционных компонентов, положительно влияет на точность оценки периода по корреляционному функционалу.

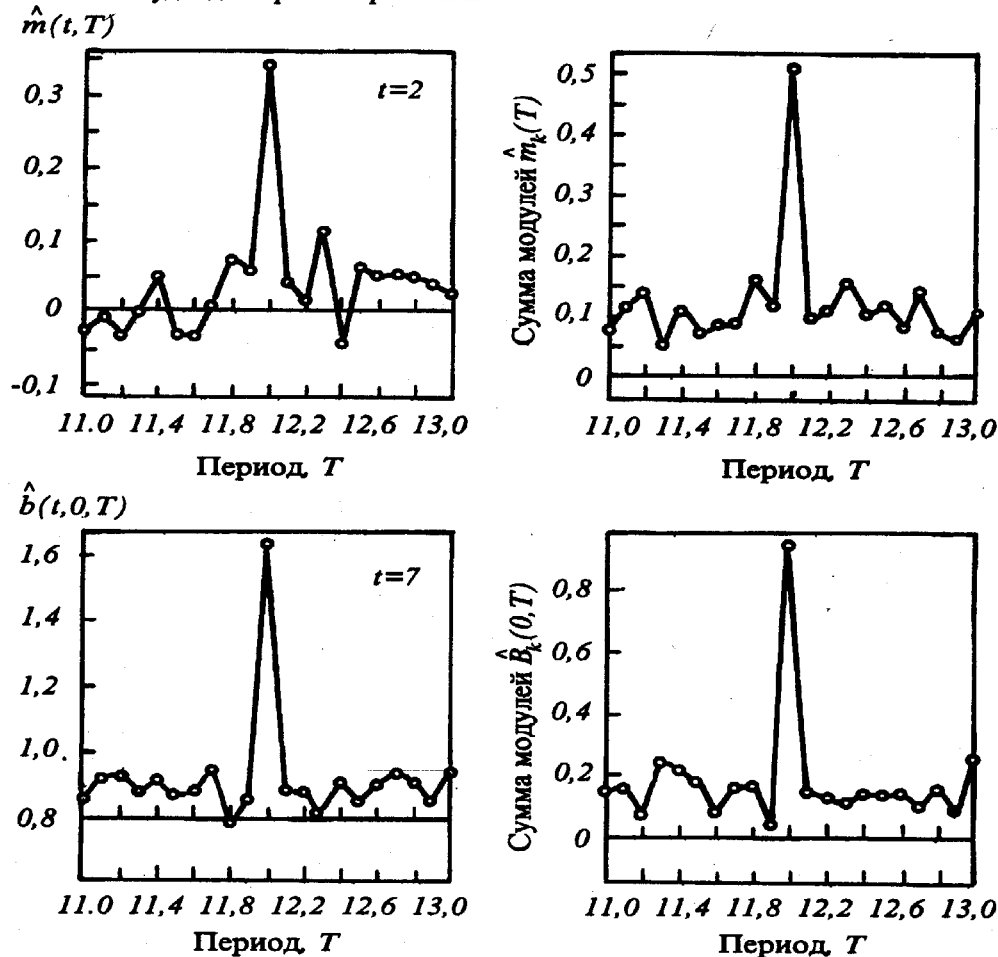
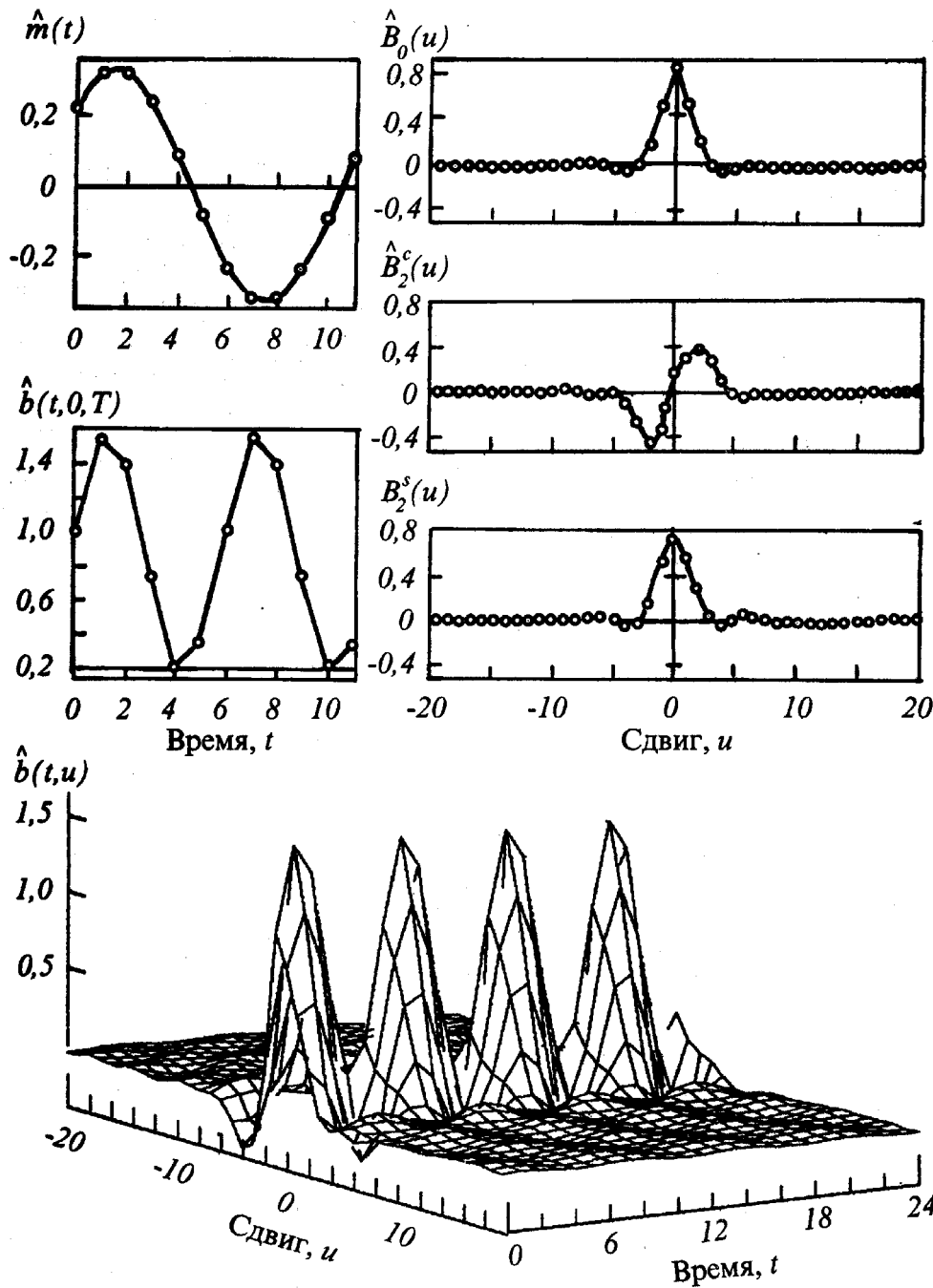


Рис. 1. Графики функционалов математического ожидания, дисперсии и суммы модулей их Фурье-компонентов, полученных по реализации случайного процесса в виде (19)



(19) **Рис. 2.** Графики оценок вероятностных характеристик стохастически модулированного по амплитуде и фазе колебания (19)

Процедуры определения периода коррелированности с использованием функционалов математического ожидания, с одной стороны, и корреляционных, с другой, независимы друг от друга. При хорошей избирательности статистики $\hat{m}(t, \tau)$ функционал $\hat{b}(t, u, \tau)$ вообще может и не проявлять таковой, что имеет место в аддитивной модели. Если скрытая периодичность выражена только периодическими изменениями корреляционной

функции, то, наоборот, экстремальными значениями при $\tau = \hat{T}$ будут обладать только $\hat{b}(t, u, \tau)$. Выявление скрытой периодичности в реальных радиофизических процессах должно производиться как на уровне первых, так и вторых моментных характеристик. При этом функционалы математического ожидания и корреляционной функции могут использоваться как тестовые: наличие в их зависимостях от пробного

периода достоверных главных максимумов будет свидетельствовать о присутствии скрытой периодичности в структуре исследуемых сигналов. Представление о вероятностной структуре стохастически модулированного по амплитуде и фазе колебания дают оценки вероятностных характеристик, полученные на основании обработки реализации смоделированного процесса и приведенные на рис. 2. Оценка математического ожидания ПКСП в данном случае имеет вид гармонического колебания. График оценки дисперсии показывает, что стохастические отклонения от периодического хода имеют максимальные значения вблизи экстремумов оценки математического ожидания. В верхнем правом углу рисунка приведены оценки корреляционных компонентов модельного ПКСП. Оценка корреляционной функции изображена в нижней части рис. 2. Здесь можно наблюдать быстрое ослабление корреляционных связей со сдвигом u и периодичность их вариации по времени t .

7. Заключение

Таким образом, выявление скрытых периодичностей в рамках модели в виде ПКСП сводится к задачам поиска периодических регулярных изменений. Такой подход является как более общим, так и более корректным по сравнению со стационарным приближением, поскольку не сводит существование периодичности к наличию определенных свойств в усредненных спектральных характеристиках, а основан на периодичности вероятностных характеристик нестационарных случайных процессов. Разработанные методы выявления скрытых периодичностей нашли применение в создании общего подхода к оценке вероятностных характеристик периодически нестационарных модулированных сигналов. На их основе осуществлена параметризация стохастических колебаний, являющаяся важным моментом в постановке и проведении экспериментальных исследований в статистической радиофизике, в моделировании и прогнозе процессов, при решении задач обработки сигналов в радиолокации, радиоастрономии и связи.

Литература

1. Гладышев Е.Г. Теория вероятностей и ее применения. 1963, 8, вып. 2, с. 184-189.
2. Драган Я.П. Отбор и передача информации. 1969, вып. №22, с. 27-33.
3. Драган Я.П., Яворский И.Н. Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы. Киев, Наукова думка, 1982, 246 с.
4. Гудзенко Л.И. ДАН СССР. 1959, т. 125, №1, с. 62-65.
5. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику, ч. I. Москва, Наука, 1976, 494 с.

6. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику, ч. II. Москва, Наука, 1978, 463 с.
7. Зубкович С.Г. Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности. Москва, Сов. радио, 1963, 223 с.
8. Яворский И.Н. Автоматика. 1985, №4, с. 44-48.
9. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики гидрометеорологических процессов. Ленинград, Гидрометеониздат, 1987, 347 с.
10. Мезенцев В.П., Яворский И.Н. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988, т. 31, №8, с. 67-70.
11. Михайлишин В.Ю., Флигель Д.С., Яворский И.Н. Геомагнетизм и аэрономия. 1990, т. 30, №5, с. 757-764.
12. Михайлишин В.Ю., Яворский И.Н. Метеорология и гидрология. 1994, №2, с. 20-35.
13. Панасюк О.Н., Яворский И.Н. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1994, №12, с. 47-58.
14. Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. Москва, Наука, 1965, 244 с.
15. Shuster A. J. Geophys. Res. 1898, 3, p. 13-41.
16. Shuster A. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 1906, 206, p. 69-100.
17. Слуцкий Е.Е. Избранные труды. Теория вероятностей. Мат. статистика. Москва, изд-во АН СССР, 1970, 292 с.
18. Jule G. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 1927, p. 267-298.
19. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Ленинград, Гидрометеониздат, 1981, 280 с.
20. Хеннан Э. Анализ временных рядов. Москва, Мир, 1964, 215 с.
21. Newton H.J., Pagano M. J. American Statist. Association. 1983, v. 78, №381, p. 152-157.
22. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. Москва, Мир, 1990, 584 с.
23. MacDonald G.J. Rev. of Geophys. 1989, v. 27, №4, p. 449-469.
24. Мезенцев В.П., Яворский И.Н. В сб.: Тез. докл. III Всесоюзной конференции "Прием и анализ СНЧ колебаний естественного происхождения". Львов, Изд-во Физ.-мат. ин-та АН УССР, 1990, с. 49-50.
25. Яворский И.Н. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1984, т. 27, №11, с. 31-37.
26. Яворский И.Н. Радиотехника и электроника. 1985, №6, с. 1096-1104.
27. Яворский И.Н. Отбор и передача информации. 1986, №74, с. 6-13.
28. Михайлишин В.Ю., Яворский И.Н. Автоматика. 1993, №4, с. 44-48.
29. Тихонов В.И. Нелинейные преобразования случайных процессов. Москва, Радио и связь, 1986, 295 с.

30. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. Москва, Наука, 1981, 640 с.
31. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. Москва, Наука, 1968, 660 с.
32. Багдади Е. Дж., Линкольн Р.Н., Нелин Б. Д. ТИИЭР, 1985, т. 53, №7, с. 811-831.

Statistical Analysis of Radiophysical Processes with Hidden Periodicities

V. Yu. Mykhajlyshyn and I. M. Yavors'kyj

The problem of discovering of hidden periodicities is formulated as an estimation problem of a period and probability characteristics of periodically nonstationary random process. The estimation methods of a period and the first moment functions by realization of nonstationary random signal are considered. The example of analysis of the hidden periodicity structure in stochastic modulated oscillation is given.