

Математическое моделирование и синтез вычислительных устройств для оценок параметров случайных процессов на основе неоднородных разностных уравнений

П. П. Драбич

*Физико-механический институт им. Г. В. Карпенко Национальной Академии наук Украины,
Украина, 290601, Львов, ул. Научная, 5*

Статья поступила в редакцию 28 июля 1995 г., после переработки 5 апреля 1996 г.

Рассмотрены алгоритмы синтеза электронных средств для статистической обработки случайных импульсных процессов на основе неоднородных линейных разностных уравнений первого порядка. Приведен пример технической реализации алгоритмов, определены динамические и статистические характеристики описанных технических решений.

Розглянуто алгоритми синтезу електронних засобів для статистичної обробки випадкових імпульсних процесів на основі неоднорідних лінійних різницевих рівнянь першого порядку. Наведено приклад технічної реалізації алгоритмів, визначені динамічні і статистичні характеристики описаних технічних рішень.

При изучении свойств сред, объектов и материалов с помощью различных физических зондирующих полей, например акустических, оптических, электромагнитных и т. п., информация об исследуемом веществе содержится в числовых характеристиках сигналов-откликов.

Примерами таких сигналов могут быть отраженные от земной поверхности радиосигналы, сигналы летательных аппаратов, электромагнитные сигналы небесных тел, сигналы, регистрируемые при космических исследованиях, потоки элементарных частиц (нейтронов, электронов, α -частиц, квантов электромагнитной энергии, γ -излучений, световых излучений и т. п.), излучаемых атомами и молекулами исследуемых объектов и материалов и т. д.

В силу случайного характера взаимодействия полей излучения с веществом, а также из-за влияния сторонних факторов, измерительные сигналы, как правило, являются стохастическими. Поэтому, параметры этих сигналов не могут быть реально определены с высокой точностью и оцениваются статистическими методами.

Для задач статистической обработки удобно представить сигнал совокупностью процессов типа

$$\{\xi_i, i \in A\}, \quad (1)$$

где ξ_i - i -е значение информационного элемента сигнала, $A = 0, 1, 2, 3 \dots$. В качестве ξ_i могут выступать последовательности амплитудных, временных либо интегральных значений сигналов.

Так, например, при импульсных акустических исследованиях информационными элементами являются интервалы времени между моментом излучения и началом видеосигнала на приемном элементе, период и амплитуда i -го колебания видеосигнала, его длительность, энергия, число колебаний и ряд других элементов.

При импульсных электромагнитных методах исследования информационными элементами являются значения i -го затухающего импульса в заданный момент времени, скорость его затухания и длительность. При представлении импульсных измерительных сигналов процессами типа (1) очевиден алгоритм оценки их информационных параметров, состоящий в том, что вначале из сигнала посредством помехоустойчивых селекторов выделяют его информативные элементы, а затем производят их статистическую обработку.

Поскольку последовательности типа (1) являются случайными процессами, то при их обработке необходимо иметь априорные сведения о законе распределения случайных величин ξ_i либо хотя бы о дисперсии и корреляционной функции. Оценка информативных параметров измерительных сигналов осуществляется, как правило, по одной реализации, что при проведении исследования материалов и объектов в процессе движения требует выполнения условия локальной стационарности процесса (1):

$$|\hat{m}_i - \hat{m}_j| < \varepsilon, \quad i, j \in (r, r + R) \subset A \quad (2)$$

В (2) величины \hat{m}_i и \hat{m}_j являются оценками математических ожиданий величин ξ_{in} , ξ_{jn} , полу-

ченные усреднением по статистическому ансамблю реализаций, n - номер реализации, $(t, t+R)$ -интервал локальной стационарности, $R = \text{const}$, причем

$$\hat{m}_i = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \xi_{in}, \quad \hat{m}_j = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \xi_{jn}, \quad (3)$$

N_0 - число реализаций, ε - допустимая погрешность измерения.

В реальной ситуации задача статистической обработки случайных процессов сводится в основном к оценке первого и второго моментов и их требуемого функционального преобразования.

Существуют различные методы аппаратного вычисления указанных параметров [1-4]. Однако наиболее широкое распространение в информационно-измерительной технике, в частности в геофизических информационно-измерительных системах, нашло весовое усреднение, реализуемое на основе рекуррентного соотношения, описываемого неоднородным разностным уравнением первого порядка

$$\Delta Q_{1i} = a_1 F(\xi_i, \dots, \zeta_i) - b_1 \Phi(\xi_i, \dots, \zeta_i) Q_1(i-1), \quad (4)$$

где $\Delta Q_{1i} = Q_1(i) - Q_1(i-1)$ - изменение выходного параметра вычислительного устройства после регистрации i -го значения входных величин (ξ_i, \dots, ζ_i) ; a_1 и b_1 - константы, $F(\xi_i, \dots, \zeta_i)$ и $\Phi(\xi_i, \dots, \zeta_i)$ - функции преобразования случайных величин ξ_i, \dots, ζ_i .

Широкое использование в практике весового усреднения объясняется простотой его технической реализации, а также возможностью производить одновременно со статистической обработкой требуемое функциональное преобразование оценок [4-8].

Найдем решение уравнения (4) для средних значений величин $\bar{\xi}, \dots, \bar{\zeta}$ и $\bar{Q}_1(i)$ при начальном условии $Q_1(0) = Q_0$:

$$\bar{Q}_1(i) = K_{01} G(\bar{\xi}, \dots, \bar{\zeta}) [1 - w_1(i)] + Q_0 w_1(i). \quad (5)$$

В формуле (5)

$$K_{01} = \frac{a_1}{b_1} = \text{const},$$

$$G(\bar{\xi}, \dots, \bar{\zeta}) = G(\cdot) = \frac{F(\bar{\xi}, \dots, \bar{\zeta})}{\Phi(\bar{\xi}, \dots, \bar{\zeta})}$$

требуемая функция преобразования средних значений $\bar{\xi}, \dots, \bar{\zeta}$, полученных усреднением по участку реализации конечной длины,

$w_1(i) = [1 - b_1 \Phi(\cdot)]^i$ - весовая функция, характеризующая инерционность вычислительных устройств в координатах $\{Q_1(i), i\}$. Зависимость $w_1(t)$ от времени t с учетом того, что $i = \text{Ent}(ft)$, ($\text{Ent}(\cdot)$ - целая часть числа ft , f - частота следования информационных элементов), имеет вид

$$w_1(t) = [1 - b_1 \Phi(\cdot)]^{ft}, \quad (6)$$

а при $b_1 \Phi(\cdot) \ll 1$ --

$$w_1(t) \cong \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (7)$$

где $\tau = [b_1 \Phi(\cdot) f]^{-1}$ - параметр переходного процесса вычислительного устройства во времени.

При выполнении условия устойчивости решения уравнения (4)

$$|1 - b_1 \Phi(\cdot)| < 1 \quad (8)$$

выходной параметр вычислительного устройства в установившемся режиме

$$Q_1(\infty) = K_{01} G(\cdot), \quad (9)$$

то есть линейно зависит от $G(\cdot)$.

Устройства, реализующие алгоритм (4), из-за задержки на такт в цепи импульсной обратной связи имеют ограниченный диапазон устойчивой работы при изменении $b_1 \Phi(\cdot)$, так как должно выполняться условие (8).

При исключении этой задержки алгоритм работы вычислительных устройств описывается рекуррентным соотношением

$$\Delta Q_{2i} = a_2 F(\cdot) - b_2 \Phi(\cdot) Q_2(i), \quad (10)$$

где $\Delta Q_{2i} = Q_2(i) - Q_2(i-1)$, a_2 и b_2 - постоянные коэффициенты.

Найдем решение уравнения (10) для средних значений $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ и $\bar{Q}_2(i)$ при начальном условии $Q_2(0) = Q_0$.

С этой целью определим ΔQ_{2i} для $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{При } i = 0 \quad \Delta Q_{20} = 0; \quad (11)$$

$$i = 1$$

$$\Delta Q_{21} = a_2 F(\cdot) - b_2 \Phi(\cdot) (Q_0 + \Delta Q_{21}), \quad (12)$$

то есть $\Delta Q_{21} [1 + b_2 \Phi(\cdot)] = a_2 F(\cdot) - b_2 \Phi(\cdot) Q_0$;

$$i = 2$$

$$\Delta Q_{22} [1 + b_2 \Phi(\cdot)]^2 = a_2 F(\cdot) - b_2 \Phi(\cdot) Q_0; \quad (13)$$

следовательно,

$$\Delta Q_{2i} = [I + b_2 \Phi(\cdot)]^{-i} [a_2 F(\cdot) - b_2 \Phi(\cdot) Q_0]. \quad (14)$$

Приравняв правые части уравнений (10) и (14), получим

$$a_2 F(\cdot) - b_2 \Phi(\cdot) \overline{Q_2}(i) = [a_2 F(\cdot) - b_2 \Phi(\cdot) Q_0] [1 + b_2 \Phi(\cdot)]^{-i}. \quad (15)$$

Выразив из (15) $\overline{Q_2}(i)$, найдем

$$\overline{Q_2}(i) = K_{02} G(\cdot) [1 - w_2(i)] + Q_0 w_2(i). \quad (16)$$

Здесь $K_{02} = \frac{a_2}{b_2} = const$, $w_2(i) = [1 + b_2 \Phi(\cdot)]^{-i}$.

После окончания переходного процесса

$$Q_2(\infty) = K_{02} G(\cdot), \quad (17)$$

то есть $Q_2(\infty)$ тоже является линейной функцией от $G(\cdot)$.

Анализ весовой функции $w_2(i)$ показывает, что выходной параметр $\overline{Q_2}(\infty)$ в установившемся режиме определяется соотношением (17) при любом значении $b_2 \Phi(\cdot) \in (0, \infty)$.

Известные устройства, синтезированные на основе рекуррентных соотношений (4) либо (10), просты в технической реализации. Однако большинство из них имеют существенный недостаток: их выходной параметр содержит пульсации, вызванные неодинаковой формой и неодновременным поступлением на накопительный элемент сигналов $q = aF(\cdot)$ и $q^* = b\Phi(\cdot)Q(\infty)$. При малом интервале усреднения эти пульсации могут составлять десятки процентов относительно среднего значения $Q(\infty)$. Это приводит к снижению инструментальной точности обработки случайных импульсных процессов.

Указанные недостатки можно устранить следующими способами:

обеспечением одинаковой формы и одновременной подачей на накопительный элемент сигналов q и q^* ;

вычитанием сигналов q и q^* на буферном элементе с последующей подачей результата вычитания на накопительный элемент;

перезаписью выходного сигнала устройства на дополнительный запоминающий элемент каждый раз после выполнения операции вычитания сигнала q из сигнала q^* .

На основе вышеизложенного был разработан новый тип специализированных преобразователей, обеспечивающих высокую инструментальную точность оценки и требуемого функционального преобразования параметров импульсных стохастических сигналов [9-15].

Для наглядности рассмотрим техническую реализацию рекуррентных соотношений (4) и (10) для измерения в заданный момент времени t_d среднего значения сигналов, регистрируемых приемным индукционным датчиком при обследовании объектов с помощью зондирующего импульсного электромагнитного поля, излучаемого генераторным индукционным датчиком при протекании в нем биполярных прямоугольных импульсов тока.

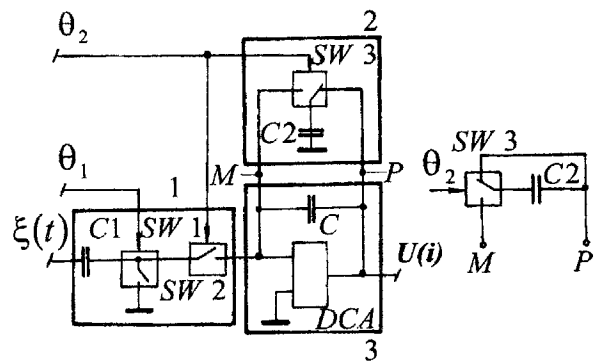


Рис. 1. Структурная схема измерительного преобразователя:
 а) Вычислительное устройство, реализующее алгоритм (18);
 б) управляемая разрядная цепь для реализации алгоритма (19)

Структурная схема измерительного преобразователя, синтезированного на основе разностного уравнения (4), показана на рис. 1, а. Он состоит из зарядной цепи 1, управляемой разрядной цепи 2 и накопительного элемента 3. Зарядная цепь содержит дозирующий конденсатор $C1$ и электронные ключи $SW1$ и $SW2$. Разрядная цепь выполнена на дозирующем конденсаторе $C2$ и электронном ключе $SW3$. В качестве накопительного элемента используется конденсатор C , включенный в цепь отрицательной обратной связи усилителя постоянного тока DCA. Действие этого преобразователя при поступлении на его сигнальный вход последовательно (t) биполярных затухающих импульсов напряжения (кривая 1, рис. 2), на вход управления электронного ключа $SW1$ - стробирующих импульсов напряжения θ_1 (кривая 2, рис. 2), а на входы управления ключей $SW2$ и $SW3$ - стробирующих импульсов напряжения θ_2 (кривая 3, рис. 2), происходит в соответствии с разностным уравнением

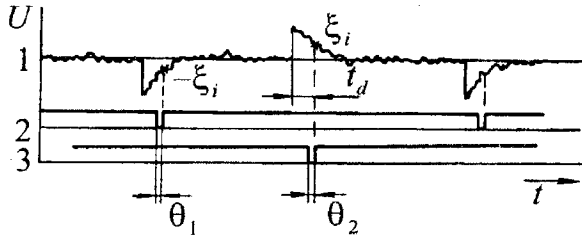


Рис. 2. Эпюры импульсов напряжения на входах вычислительного устройства

$$\Delta U_{1i} = 2\xi_i \frac{C_1}{C} - \frac{C_2}{C} U_1(i-1), \quad (18)$$

где $\Delta U_{1i} = U_1(i) - U_1(i-1)$ - изменение выходного напряжения после регистрации i -й пары разнополярных информационных импульсов, ξ_i - значения информационных импульсов в моменты окончания стробирующих импульсов, C_1, C_2 и C - емкости конденсаторов C_1, C_2, C .

Если в устройстве (см. рис. 1,а) разрядную цепь преобразовать (см. рис. 1,б), то алгоритм его работы будет описываться уравнением

$$\Delta U_{2i} = 2\xi_i \frac{C_1}{C} - \frac{C_2}{C} U_2(i). \quad (19)$$

По аналогии с (5) и (16) выходные напряжения измерительного преобразователя, реализующего алгоритмы (18) и (19), будут соответственно определяться из выражений:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(i) &= 2\bar{\xi} \frac{C_1}{C_2} \left[1 - \left(1 - \frac{C_2}{C} \right)^i \right] + U_0 \left(1 - \frac{C_2}{C} \right)^i; \quad (20) \\ \bar{U}_2(i) &= 2\bar{\xi} \frac{C_1}{C_2} \left[1 - \left(1 + \frac{C_2}{C} \right)^{-i} \right] + U_0 \left(1 + \frac{C_2}{C} \right)^{-i}. \end{aligned} \quad (21)$$

И в первом и во втором случаях выходное напряжение в установившемся режиме линейно зависит от среднего значения $\bar{\xi}$ информационного сигнала в заданный момент времени t_d , то есть

$$\bar{U}_1(\infty) = 2 \frac{C_1}{C_2} \bar{\xi}, \quad \bar{U}_2(\infty) = 2 \frac{C_1}{C_2} \bar{\xi}. \quad (22)$$

Поскольку на вход устройства поступает случайный сигнал, его выходной параметр $\bar{U}(i)$ тоже является случайной величиной. Для оценки точности определения первого момента случайного процесса (1) найдем выражение для относительной статистической погрешности $\delta_{ст}$. В (16) показано,

$$\text{что } \delta_{ст} = \frac{\sqrt{D\bar{U}(\infty)}}{\bar{U}(\infty)} 100\%, \quad (23)$$

где $D\bar{U}(\infty)$ - дисперсия выходного напряжения $\bar{U}(\infty)$, причем,

$$D\bar{U}(\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} D_{\Delta U_i} w(i). \quad (24)$$

Здесь $D_{\Delta U_i}$ - дисперсия единичных приращений выходного напряжения вблизи точки динамического равновесия устройства

$$D_{\Delta U_i} = 4 \left(\frac{C_1}{C} \right)^2 D(\xi).$$

Предположим, что величины ξ_i некоррелированы и распределены по нормальному закону с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией σ^2 .

Тогда $D_{\Delta U_i} = 4 \left(\frac{C_1}{C} \right)^2 \sigma^2$, а дисперсия выходного параметра $U(i)$ устройства, реализующего алгоритм (18) либо (19), определяется соответственно выражениями:

$$\begin{aligned} DU_1(\infty) &= 4 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{C_1}{C} \sigma \right)^2 \left(1 - \frac{C_2}{C} \right)^{2i} = \\ &= 4 \frac{C_1^2 \sigma^2}{C_2 C \left(2 - \frac{C_2}{C} \right)}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} DU_2(\infty) &= 4 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{C_1}{C} \sigma \right)^2 \left(1 + \frac{C_2}{C} \right)^{-2i} = \\ &= 4 \frac{C_1^2 \sigma^2 \left(1 + \frac{C_2}{C} \right)^2}{C_2 C \left(2 + \frac{C_2}{C} \right)}. \end{aligned} \quad (26)$$

При большом интервале усреднения входных величин $\frac{C_2}{C}$, то есть при $\frac{C_2}{C} \ll 1$ выражения (25) и (26) можно представить в виде:

$$DU_1(\infty) = DU_2(\infty) = DU(\infty) = 2 \frac{C_1^2 \sigma^2}{C_2 C}. \quad (27)$$

Подставляя в (23) выражения для $D\bar{U}(\infty)$ и $\bar{U}(\infty)$, получим

$$\delta_{ст} = \frac{\sigma}{m_\xi} \sqrt{\frac{C_2}{2C}}. \quad (28)$$

Как следует из (28), синтезированные на основе рекуррентных соотношений (4) и (10) вычислительные устройства при одинаковом интервале усреднения являются адекватными по статистической точности оценки параметров случайных процессов.

Отличительной особенностью устройства, реализующего алгоритм (4), является ограниченная область его устойчивой работы, однако при $\frac{C_2}{C} = 1$ в нем обеспечивается режим преобразования дискретных значений ξ_i в постоянное напряжение за один такт его работы, то есть обеспечивается режим выборки и хранения.

Во втором случае описанное устройство устойчиво работает при любом положительном значении отношения емкостей разрядного дозирующего и накопительного конденсаторов.

Литература

1. Статистическое моделирование динамических систем средствами АВТ Под ред. И.М. Витенберга. Москва, Машиностроение, 1976, 200 с.
2. Шегай А.Д. Изв. Ленинград. ордена Ленина электротехн. ин-та им. В.И. Ленина. Ленинград, ЛЭТИ, 1974, вып. 129, с. 34-39.
3. Лезин Ю.С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. Москва, Сов. радио, 1963, 320 с.
4. Брагин А.А., Федорив Р.Ф. Аналоговые преобразователи импульсных потоков. Москва, Атомиздат, 1969, 240 с.
5. Драбич П.П., Федорив Р.Ф. Отбор и передача информации. Киев, Наук. думка, 1976, вып. 48, с. 102-106.
6. Драбич П.П., Федорив Р.Ф. Отбор и передача информации. Киев, Наук. думка, 1976, вып. 47, с. 91-93.
7. Драбич П.П., Федорив Р.Ф. Отбор и передача информации. Киев, Наук. думка, 1978, вып. 55, с. 96-101.
8. А. с. 702312 (СССР) П.П. Драбич, Р.Ф. Федорив. Оpubл. в БИ, 1979, №45.
9. А. с. 959035 (СССР). П.П. Драбич, Ю.А. Петрунин, В.П. Сторчай, Р.Ф. Федорив. Оpubл. в БИ, 1982, №34.
10. А. с. 972440 (СССР) П.П. Драбич, В.Я. Романченко, А.П. Семенишин, В.П. Сторчай, В.В. Белых. Оpubл. в БИ, 1982, №41.
11. А. с. 1018126 (СССР) П.П. Драбич, Л.Я. Мизюк, Д.В. Малицкий, Р.В. Проць. Оpubл. в БИ, 1983, №18.
12. А. с. 1425725 (СССР). О.П. Бухало, П.П. Драбич. Оpubл. в БИ, 1988, №35.
13. А. с. 1478144 (СССР). П.П. Драбич. Оpubл. в БИ, 1989, №17.
14. А. с. 1580270 (СССР) О.П. Бухало, П.П. Драбич. Оpubл. в БИ, 1990, №27.
15. А. с. 1716537 (СССР). П.П. Драбич. Оpubл. в БИ, 1992, №8.
16. Гаткин Н.Г., Геранин В.А., Карновский М.И. Интеграторы в системах измерения. Киев, Госмтехиздат, 1963, 139 с.

Mathematical Modelling and Synthesis of Calculating Devices for Random Process Estimation on Basis Of Heterogeneous Difference Equations

P.P. Drabich

Synthesis algorithmus of electronic means for statistical processing of random impulse processes on the ground of first-order heterogeneous linear difference equation are considered. An example of technical realisation of algorithmus is given. Dynamical and statistical characteristics of technical solutions described are determined.