Радиофизика и радиоастрономия, 1997, т.2, № 1, 78-84

УДК 517.954:537.86

Операторный метод нестационарной теории открытых волноводных резонаторов

Сиренко Ю.К., Яшина Н.П.

Институт радиофизики и электроники Национальной Академии наук Украины, Украина, 310085, Харьков, ул. ак. Проскуры, 12.

Статья поступила в редакцию 10 декабря 1995г., после переработки 12 февраля 1996г.

Представлены результаты работы по созданию моделей и алгоритмов, ориентированных на достоверный качественный и количественный физический анализ в условиях возможного резонансного (аномального) рассеяния нестационарных волн. Рассматриваемые новые подходы и методы базируются на описании свойств неоднородностей в терминах операторов преобразования общего для всех направляющих структур эволюционного базиса сигнала и предполагают использование на ключевых этапах построения решений формально корректных вычислительных процедур метода аналитической регуляризации.

Наведено результати роботи по створенню моделей та алгоритмів, орієнтованих на достоменний якісний та кількісний аналіз в умовах можливого резонансного (аномального) розсіювання нестаціонарних хвиль. Нові підходи та методи, що розглядаються, базуються на опису неоднорідностей у термінах операторів перетворення, що є спільними для всіх направляючих структур еволюційного базису сигналу та передбачують використання на ключових етапах вирішення формально коректних обчислювальних процедур метода аналітичної регуляризації.

Линейные задачи спектральной теории и теории дифракции волн практически решены полностью для основных классов модельных открытых структур в областях изменения значений параметров, обеспечивающих реализацию различных (в том числе - и неклассических) законов дисперсии [1-5]. Полученные результаты представляют собой надежный фундамент для построения соответствующей линейной нестационарной теории в условиях возможного резонансного рассеяния волн. Основным средством анализа в таких условиях является вычислительный эксперимент. Используемые при этом математические модели и методы должны удовлетворять ряду требований по точности, эффективности и универсальности. В отличие от большинства методов теории неустановившихся колебаний [6] рассматриваемые в данной работе подходы к анализу переходных процессов в открытых волноводных резонаторах потенциально такими свойствами обладают. Они базируются на описании рассеивающих свойств неоднородностей регулярных волноведущих трактов в терминах операторов преобразования общего для всех направляющих структур эволюционного базиса нестационарного сигнала [7] и предполагают использование на ключевых этапах построения решения формально корректных вычислительных процедур метода аналитической регуляризации [1,8]. Прототипы таких подходов в частотной области широко известны. Модификация их с учетом специфики временной области проведена впервые.

1. Эволюционный базис нестационарной волны и операторы преобразования

1. Рассмотрим сначала модельную задачу (рис. 1)

$$\left[-\varepsilon(g)\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sigma(g)\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]U(g,t)= = F(g,t); \tag{1.1}$$

$t>0,\ g\in Q.$

$$U(g,0)=\varphi(g);\quad \frac{\partial}{\partial t}U(g,t)\Big|_{t=0}=\psi(g); \tag{1.2}$$

$$U(g,t)\Big|_{g\in S}=0, \tag{1.3}$$

полагая, что финитные в области Q функции $F(g,t)$, $\varphi(g)$, $\psi(g)$, $\varepsilon(g)-1$ и $\sigma(g)$ удовлетворяют условиям теоремы об однозначной разрешимости (1.1) - (1.3) в энергетическом классе (пространстве Соболева)

${}^{1}_{2}(Q^T)$, $Q^T=Q\times(0,T)$, $T<\infty$ [9].

Здесь S - граница области Q, представляющей собой два полых полубесконечных регулярных (при $z_j\geq 0$, $j=1,2$) волновода, связанных компактной неоднородностью (часть границы в районе неоднородности на рис. 1 "открыта"); $g=\{x,y,z\}$, а действительные функции $\varepsilon(g)$ и $\sigma(g)$ определяют влияние неоднородности на скорость распространения возмущения и ее диссипативные свойства.

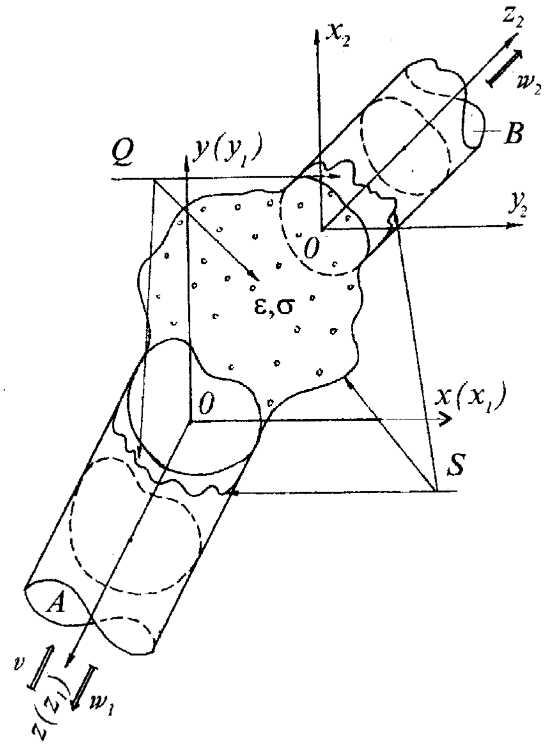

Рис. 1. *Геометрия модульной задачи.*

В частном случае бесконечного регулярного волновода (сечение области Q плоскостями xOy постоянно вдоль z, а $\varepsilon(g)$-$1=\sigma(g)=0$) представим решение задачи (1.1) - (1.3) в виде

$$U(g,t)=\sum_n v_n(z,t)\mu_n(x,y);\qquad (1.4)$$
$$g\in Q,\ t>0,$$

где последовательность $v(z,t)=\{v_n(z,t)\}$ удовлетворяет уравнениям

$$D(\lambda_n)[v_n]\equiv\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\lambda_n^2\right]v_n(z,t)=$$
$$=a_n(z,t),\qquad (1.5)$$
$$|z|<\infty,\ t>0,\ n\in\{n\}$$

и начальным данным

$$v_n(z,0)=b_n(z);\ \frac{\partial}{\partial t}v_n(z,t)\Big|_{t=0}=C_n(z),\qquad (1.6)$$

а $\{\mu_n(x,y)\}$ и $\{\lambda_n\}$ - наборы собственных функций и собственных значений однородной краевой задачи, порождаемой (1.1) - (1.3) при отделении поперечных координат x, y. Здесь $a_n(z,t)$, $b_n(z)$ и $C_n(z)$ - коэффициенты Фурье функций $F(g,t)$, $\varphi(g)$ и $\psi(g)$ при разложении последних в ряды по базисной системе $\{\mu_n(x,y)\}$.

Переходя к обобщенной формулировке задачи Коши (1.5), (1.6) [10] и используя фундаментальное решение

$$G(\lambda;z,t)=(-1/2)\chi(t-|z|)J_0\left[\lambda\left(t^2-z^2\right)^{1/2}\right]$$

оператора $D(\lambda)$ (по определению $D(\lambda)[G(\lambda)]=$ $=\delta(z)\delta(t)$), получаем

$$U(g,t)=\sum_n\left[G(\lambda_n)*f_n\right]\mu_n(x,y).\qquad (1.7)$$

Здесь звездочкой обозначена операция свертки; $f_n(z,t)=a_n(z,t)+\delta^{(1)}(t)b_n(z)+\delta(t)C_n(z)$; $J_m(\ldots)$ и $\chi(\ldots)$ - функции Бесселя и Хевисайда; а $\delta(\ldots)$ и $\delta^{(m)}(\ldots)$ - функция Дирака и ее обобщенная производная порядка m.

Формы (1.4), (1.7) дают общий и конкретный, соответствующий заданным источникам, вид поля нестационарной волны, распространяющейся в регулярном волноводе. Ее изменение в пространстве и во времени полностью определяется системой $v(z,t)$ (или $\{G(\lambda_n)*f_n\}$), свойства которой позволяют последней взять на себя роль универсального (зависимость от конфигурации границ S и типа невырожденных краевых условий на них - минимальна) эволюционного базиса нестационарной волны на любом конечном отрезке регулярной направляющей структуры.

2. Пусть теперь волна типа (1.4) выступает в роли волны возбуждения открытого волноводного резонатора, схематично изображенного на рис. 1. Поле возбуждения

$$U^i(g,t)=\sum_{n(1)}v_n(z_1,t)\mu_{n1}(x_1,y_1)$$

считаем отличным от нуля только в подводящем волноводе, регулярном для всех $z_1\geq 0$ (левая граница неоднородности расположена в плоскости $z_1=0$). Вторичное поле, возникающее в регулярных полубесконечных волноводах и распространяющееся в сторону растущих значений z_1 и z_2, представим в виде ($n(j)$ - упорядоченная последовательность номеров собственных функций $\mu_{nj}(x_j,y_j)$):

$$U_j^S(g,t)=\sum_{n(j)}w_{nj}(z_j,t)\mu_{nj}(x_j,y_j);\qquad (1.8)$$
$$z_j\geq 0,\ j=1,2.$$

Введем соотношениями

$$w_{nj}^1(0,t)\equiv\frac{\partial}{\partial z_j}w_{nj}(z_j,t)\Big|_{z_j=0}=$$
$$=\int_0^t\sum_{m(1)}\left[R_{nm}^+(t-\tau)\delta_j^1+P_{nm}^+(t-\tau)\delta_j^2\right]\times v_m(0,\tau)d\tau\qquad (1.9)$$

граничные (на границах $z_j=0$ неоднородности) операторы преобразования R^+ и P^+ эволюционного базиса приходящей слева нестационарной волны

$$w^1_j(0,t) \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} w_{nj}(z_j,t)\Big|_{z_j=0} \right\} = \left\{ R^+\delta^1_j + P^+\delta^2_j \right\}\left[v(0,\tau)\right];\quad j=1,2. \tag{1.10}$$

Очевидно, что совместно с соотношениями

$$w_{nj}(z_j,t) = -\int\limits_0 J_0\left[\lambda_{nj}((t-\tau)^2 - z_j^2)^{1/2}\right] \times \chi\left[(t-\tau)-z_j\right] w^1_{nj}(0,\tau)d\tau, \tag{1.11}$$

задающими "диагональные" операторы $E_j(z_j)$,

$$w_j(z_j,t) \equiv \left\{w_{nj}(z_j,t)\right\} = E_j(z_j)\left[w^1_j(0,\tau)\right], \tag{1.12}$$

отслеживающие изменения поля при "свободном" пробеге волны на конечном отрезке волновода, операторы R^+ и P^+ полностью описывают рассеивающие свойства неоднородности при возбуждении ее слева.

Формула (1.11), отражающая общее свойство решений однородных уравнений типа (1.5) на полуоси $z_j \geq 0$, решений, удовлетворяющих нулевым начальным данным и не содержащих компонент, распространяющихся в направлении уменьшающихся z_j ("уходящие" на $z_j=\infty$ компоненты в любой конечный момент времени $t=T$ равны нулю для достаточно больших значений z_j), выводится с помощью интегральных преобразований: преобразованием Лапласа по t или, как в [11], косинус-преобразованием Фурье по z_j.

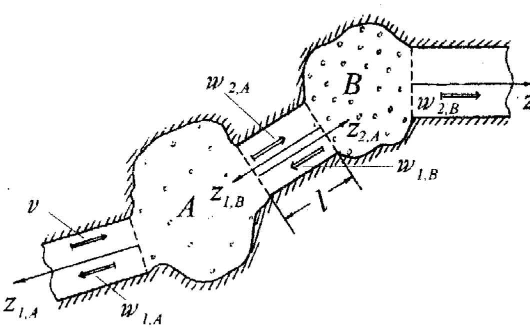

Рис. 2. *К анализу сложного узла*

3. Определив, аналогично R^+ и P^+, операторы преобразования R^- и P^- эволюционного базиса приходящей справа на границу $z_2=0$ нестационарной волны и считая наборы $\{R^{\pm},P^{\pm}\}$ известными для отдельных "простых" неоднородностей, построим алгоритм решения задачи, возникающей при анализе рассеивающих свойств сложного узла, эти неоднородности содержащего. В модельной ситуации, схематично изображенной на рис. 2, узел содержит две последовательно расположенные неоднородности A и B, соединенные отрезком регулярного волновода конечной длины l. Сохраняя основу принятых ранее обозначений (очевидные изменения обусловлены наличием двух разных неоднородностей) и следуя (1.8) - (1.12), получаем (рис. 2):

$$\begin{cases} w^1_{1A} = R^+_A[v] + P^-_A E_{1B}(l)[w^1_{1B}], \\ w^1_{2A} = P^+_A[v] + R^-_A E_{1B}(l)[w^1_{1B}], \\ w^1_{1B} = R^+_B E_{2A}(l)[w^1_{2A}], \\ w^1_{2B} = P^+_B E_{2A}(l)[w^1_{2A}], \end{cases} \tag{1.13}$$

Методом исключения система (1.13) сводится к операторному уравнению второго рода относительно неизвестной вектор-функции $W^l_{2A}(0,t)$

$$w^1_{2A} = P^+_A[v] + R^-_A E_{1B}(l) R^+_B E_{2A}(l)[w^1_{2A}] \tag{1.14}$$

и ряду пересчетных формул, определяющих все компоненты (w^1_{1A}, w^1_{1B} и w^1_{2B}) формируемые сложным узлом. Исходная достаточно сложная задача эквивалентным образом переформулирована к виду, допускающему прямое обращение (оператор в правой части (1.14) из-за конечной скорости распространения возмущения воздействует на искомые вектор-функции W^l_{2A} со значениями только в предшествующие расчетному моменты времени) с использованием стандартных средств вычислительной математики. "Сложный" узел переводится в разряд "простых" базовых блоков после расчета элементов граничных операторов R^+ и P^+ по формулам (1.9), (1.10).

4. Рассмотренные выше модельные ситуации демонстрируют практически все принципиальные моменты предлагаемого подхода на этапах описания рассеивающих свойств неоднородностей волноведущих трактов в терминах граничных операторов преобразования и построения алгоритмов анализа сложных узлов. Очевиден благоприятный для метода в целом вывод - схема действий и ее формальное математическое описание практически не меняются при изменении в широких пределах конфигурации полубесконечных и конечных волноводов и условий на их границах (при переходе от задач скалярных к задачам векторным).

2. Уравнения метода "сшивания" во временной области и их аналитическая регуляризация

1. Отдельная проблема метода - расчет конкретных значений элементов операторов R и P для достаточно широкого набора простых неоднородностей волноведущих трактов. В случае,

когда границы рассеивающих неоднородностей координатные (примеры см. в [1-3]), наиболее естественной для рассматриваемого подхода является первоначальная эквивалентная переформулировка задачи к операторным уравнениям первого рода методом, аналог которого в частотной области носит название метод сшивания (иногда - метод частичных областей). И в частотной и во временной областях этот метод, строго говоря, еще не создает собственно алгоритм решения задачи, так как обосновать корректность прямого численного обращения операторов возникающих уравнений в общем случае не представляется возможным. В то же время, специфические свойства этих операторов позволяют воспользоваться разнообразными, мощными и эффективными средствами аналитической регуляризации [1,8], сводящими процесс решения задачи к последовательности строго обоснованных, корректных в математическом отношении вычислительных процедур. Ниже мы рассмотрим только простые примеры, демонстрирующие характерные для метода сшивания во временной области особенности построения промежуточных операторных уравнений и процедуры частичного или полного обращения "сверточных", "сингулярных" операторов, эффективно регуляризующей задачу по схеме, основательно апробированной в частотной области.

2. Пусть на раздвоение цилиндрического волновода с произвольным поперечным сечением Φ (рис. 3 - подводящий волну возбуждения волновод в плоскости $z=0$ переходит в коаксиальный, $\Phi=(\Phi_1\cup\Phi_2)$ набегает нестационарная волна $U^i(g,t)$ с $v_n(0,t)=\delta_n^p\delta(t-\eta)$, целое число p и $\eta>0$ - фиксированные величины. Использование такого

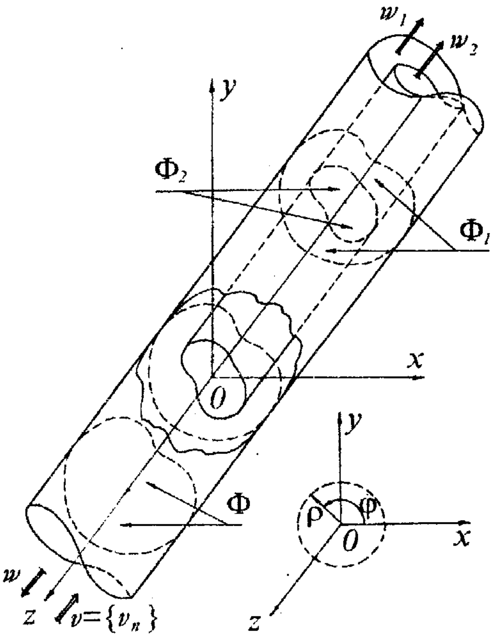

Рис. 3. *К задаче о раздвоении волноведущих трактов*

абстрактного, физически нереализуемого сигнала обусловлено причинами чисто методологического характера - с его помощью "осуществляется" акт элементарного возбуждения структуры, позволяющий выделить в формируемом поле "чистые" $R^+_{np}(t-\eta)$ и $P^+_{np}(t-\eta)$ компоненты. Согласно (1.8), (1.9), (1.11), отраженное в область $z>0$ и прошедшее в коаксиальный волновод поле $U^S(g,t)$ представимо в виде

$$U^S(g,t)=\begin{cases} -\sum\limits_n\left\{\int\limits_0 J_0\left[\lambda_n\left((t-\tau)^2-z^2\right)^{1/2}\right]\chi\left[(t-\tau)-z\right]R^+_{np}(\tau-\eta)d\tau\cdot\mu_n(x,y)\right\}; \\ \qquad z\geq 0;\quad x,y\in\Phi. \\ -\sum\limits_{m(j)}\left\{\int\limits_0 J_0\left[\lambda_{mj}\left((t-\tau)^2-z^2\right)^{1/2}\right]\chi\left[(t-\tau)+z\right]P^+_{mpj}(\tau-\eta)d\tau\cdot\mu_{mj}(x,y)\right\}; \\ \qquad z\leq 0;\quad x,y\in\Phi_j,\quad j=1,2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Условие непрерывности $U(g,t)=U^i+U^S$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}U(g,t)$ в плоскости $z=0$, обеспечивающее однозначность продолжения решения задачи (1.1) - (1.3) из одной частичной области ($z>0$) в две другие ($z<0$) [12], приводит к функциональным уравнениям, одна из эквивалентных форм записи которых в терминах коэффициентов Фурье сшиваемых функций имеет вид:

$$\begin{aligned} &\sum_n F_{nmj}\int\limits_0\left\{J_0\left[\lambda_n(t-\tau)\right]+J_0\left[\lambda_{mj}(t-\tau)\right]\right\}\chi(t-\tau)R^+_{np}(\tau-\eta)d\tau= \\ &=F_{pmj}\left\{\delta(t-\eta)-\int\limits_0 J_0\left[\lambda_{mj}(t-\tau)\right]\chi(t-\tau)v'_p(0,\tau)d\tau\right\};\ m\in\{m(j)\},\ j=1,2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$P^{+}_{mpj}(t-\eta) = -\sum_n F_{nmj}\left[R^{+}_{np}(t-\eta) + \delta^p_n v'_p\ (0,t)\right];\tag{2.3}$$

Здесь

$$v'_p\ (0,t) = \frac{\partial}{\partial z} v_p(z,t)|_{z=0}\,;$$

$$F_{nmj} == \int_{\Phi_j} \mu_n(x,y)\mu_{mj}(x,y)dxdy;$$

и ортогональные системы функций $\{\mu_{mj}(x,y)\}$ нормированы так, что $\int_{\Phi_j}\mu^2_{mj}(x,y)dxdy = 1$.

Соотношение (2.2) представляет собой парное операторное уравнение первого рода относительно набора неизвестных $\left\{R^{+}_{np}(t-\eta)\right\}$, (2.3) - пересчетная формула для определения элементов оператор-функций P^{+}_j, связанных с первым $(j=1)$ и вторым $(j=2)$ волноведущими каналами в области $z< 0$. В совокупности граничные операторы R^{+} и P^{+}_j дают рассеянное рассматриваемой неоднородностью поле в виде (2.1). Наличие в правых частях формул (2.2), (2.3) функции $v'_p\ (0,t)$ требует подтверждения корректности определений (1.9), (1.10) - необходимо доказать, что $v_p(0,t) = \delta(t-\eta)$ однозначно задает и $v'_p\ (0,t)$. Нужный результат получаем из уравнения Вольтерра первого рода

$$\delta(t-\eta) = \int_0 J_0\left[\lambda_p(t-\tau)\right]\chi(t-\tau)v'_p\ (0,\tau)d\tau$$

(в соотношении типа (1.11) учитывается направление распространения волны возбуждения $U^i(g,t)$), обращая последнее операционным методом:

$$v'_p\ (0,t) = \left(\lambda^2_p + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[J_0[\lambda_p(t-\eta)]\chi(t-\eta)\right].$$

3. Возможны и другие, отличные от (2.2), (2.3), формы записи функциональных уравнений метода сшивания. В частности, формы, сводящие задачу к операторным уравнениям второго рода. Мы здесь останавливаемся на форме (2.2), операторы которой допускают проведение дополнительных аналитических преобразований при построении корректных в вычислительном отношении алгоритмов численного решения задачи. На необходимость таких преобразований указывает, например, следующая деталь, касающаяся непосредственно парных (или приведенных к парным) уравнений метода сшивания. Явление относительной сходимости (см. работы [1,13,14]) препятствует обоснованному выбору главной диагонали при редукции парной бесконечной системы (2.2), а возможное в некоторых частных случаях аналитическое преодоление этого препятствия лишь частично регуляризует задачу - "правильное" распределение конечного числа уравнений между первым $(j=1)$ и вторым $(j=2)$ каналами гарантирует в лучшем случае только слабую сходимость приближенных решений к точным. Метод аналитической регуляризации, базирующийся на выделении и обращении "сингулярной" части матричного оператора типа свертки, сводит задачу либо к явной схеме (последовательное продвижение по временным слоям), либо к каноническим Фредгольмовым операторным уравнениям, ошибка при редукции которых оценивается по норме одного из гильбертовых пространств бесконечных последовательностей и достаточно быстро убывает с ростом числа учитываемых уравнений [8].

4.Дифференцируя (2.2) по t, получаем

$$\sum_n F_{nmj}R^{+}_{np}(t-\eta) = f_{mj}(t);\quad m\in\{m(j)\},\quad j=1,2.\tag{2.4}$$

Очевидно, что входящие в правую часть

$$f_{mj} = \frac{1}{2}\left\{\sum_n F_{nmj}\int_0\left[J_1[\lambda_n(t-\tau)]\lambda_n + J_1[\lambda_{mj}(t-\tau)]\lambda_{mj}\right]\chi(t-\tau)\times\right.$$
$$\left.\times R^{+}_{np}(\tau-\eta)d\tau + F_{pmj}\frac{d}{dt}\left[\delta(t-\eta) - \int_0 J_0[\lambda_{mj}(t-\tau)]\chi(t-\tau)v'_p\ (0,\tau)d\tau\right]\right\}$$

элементы неизвестной вектор-функции $\left\{R^{+}_{np}(\tau-\eta)\right\}$ влияют на ее величину в момент времени t только своими значениями в моменты времени τ, строго меньшие t. Это позволяет нам, зафиксировав t (очередной шаг в продвижении по временным слоям, старт в точке $t=\eta$), рассматривать (2.4) как парную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений первого рода относительно набора неизвестных $\left\{R^{+}_{np}(t-\eta)\right\}$. Элементы F_{nmj} от временных параметров не зависят, и поэтому решение задачи для различных t и η сводится к обращению одного и того же матричного оператора $F=\{F_{nmj}\}$. Его структуру качественно описывает представление

$$F_{nmj}=\frac{\alpha_{nj}\beta_{mj}}{\lambda_n^2-\lambda_{mj}^2}; \qquad (2.5)$$

$$n\in\{n\},\quad m\in\{m(j)\},\quad j=1,2,$$

для получения которого необходимо использовать свойства функций μ_n и μ_{mj} - решений спектральных эллиптических краевых задач, вторую формулу Грина и теорему о среднем при интегрировании по части границы области Φ_j. Знание конкретных значений входящих в (2.5) величин (для этого, очевидно, нужно остановиться на конкретной задаче) позволяет выбрать оптимальный вариант аналитического или аналитико-численного обращения оператора F. Достаточно широкий спектр таких процедур разработан и подробно исследован при решении многочисленных задач в частотной области [1,4,8,14,15]. Отличаясь (иногда существенно) в деталях, все эти процедуры реализуют классическую идею левой регуляризации уравнений первого рода путем выделения и аналитического обращения "сингулярной" (с разными элементами в знаменателе) части матричного оператора задачи.

3. Раздвоение круглого волновода. Точное решение задачи

1. Пусть Φ на рис. 3 - это круг радиуса a, Φ_2 - круг радиуса b, соответствующие цилиндры соосны и их общая ось совпадает с осью z. Задача о рассеянии симметричных нестационарных волн в такой структуре (поле не зависит от цилиндрической координаты φ) сводится к (2.4), где в этом случае [1,15,16]:

$$\mu_n(x,y)=J_0(\lambda_n\rho)\left[aJ_1(\lambda_n a)\pi^{1/2}\right]^{-1},$$

$$n\in\{n\}=1,2\ldots,\quad x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi;$$

$$\mu_{m1}(x,y)=G_0(\lambda_{m1}\rho)\left[\pi\left(a^2G_1^2(\lambda_{m1}a)\right)-b^2G_1^2(\lambda_{m1}b)\right]^{-1},$$

$$m\in\{m(1)\}=1,2\ldots;$$

$$\mu_{m2}(x,y)=J_0(\lambda_{m2}\rho)\left[bJ_1(\lambda_{m2}b)\pi^{1/2}\right]^{-1},$$

$$m\in\{m(2)\}=1,2\ldots;$$

$$G_q(\lambda_{m1}\rho)=J_q(\lambda_{m1}\rho)N_0(\lambda_{m1}b)-J_0(\lambda_{m1}b)N_q(\lambda_{m1}\rho);$$

$$F_{nmj}=2\pi\int\limits_{\delta_j^1 b}^{\delta_j^1 a+\delta_j^2 b}\mu_n(\rho)\mu_{mj}(\rho)\rho d\rho;$$

$$\alpha_{n1}=\alpha_{n2}=J_0(\lambda_n b)\left[J_1(\lambda_n a)\right]^{-1};\ \beta_{m2}=-2\lambda_{m2}a^{-1};$$

$$\beta_{m1}=2b\lambda_{m1}a^{-1}G_1(\lambda_{m1}b)\left[a^2G_1^2(\lambda_{m1}a)-b^2G_1^2(\lambda_{m1}b)\right]^{-1/2};$$

$N_q(\ldots)$ - функция Неймана, а λ_n и λ_{mj} есть действительные положительные корни уравнений

$$J_0=(\lambda_n a)=0;\ J_0=(\lambda_{m2}b)=0;\ G_0=(\lambda_{m1}a)=0.$$

Введем соотношениями

$$R_n=R_{np}^{+}(t-\eta)J_0(\lambda_n b)[J_1(\lambda_n a)]^{-1};$$

$$\psi_{m2}=-f_{m2}a(2\lambda_{m2})^{-1};$$

$$\psi_{m1}=f_{m1}a\left[2b\lambda_{m1}G_1(\lambda_{m1}b)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[a^2G_1^2(\lambda_{m1}a)-b^2G_1^2(\lambda_{m1}b)\right]^{1/2}$$

новые обозначения, в которых система (2.4) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{\lambda_n^2-\lambda_{mj}^2}=\psi_{mj}; \qquad (3.1)$$

$$m=1,2\ldots,\ j=1,2.$$

Для ее обращения используем метод вычетов [1,13], базирующийся на теореме Миттаг-Леффлера о разложении мероморфной функции.

2. Предположим, что существуют мероморфные функции $\gamma_{mi}(\omega)$ такие, что: $\gamma_{mi}(\omega)$ имеют простые полюсы в точках

$$\omega=\lambda_n^2,\ n=1,2\ldots;\ \gamma_{mi}(\lambda_{kj}^2)=-\delta_m^k\delta_i^j,$$

$$m,k=1,2\ldots,\ i,j=1,2;\ \gamma_{mi}(\omega)\to 0,$$

при $|\omega|\to\infty$ на какой-либо правильной системе контуров C_r в плоскости ω (r - радиус контура). Предположим также, что элементы ψ_{mj} убывают с ростом индекса m достаточно быстро для того, чтобы ряд $\sum\limits_m\gamma_{mj}(\omega)\psi_{mj}$ сходился равномерно в области аналитичности $\gamma_{mj}(\omega)$. Покажем, что при сделанных предположениях

$$R_n=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\mathrm{Res}\gamma_{mj}(\lambda_n^2)\psi_{mj}. \qquad (3.2)$$

Действительно, так как

$$\lim\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_r}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\gamma_{ki}(\omega)\psi_{ki}\right](\omega-\lambda_{mj}^2)^{-1}d\omega=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Res}\gamma_{ki}(\lambda_n^2)\psi_{ki}\right]\left(\lambda_n^2-\lambda_{mj}^2\right)^{-1}-\psi_{mj}=0,$$

для всех $m=1,2$ ... и $j=1,2,$ то представление (3.2) дает решение задачи (3.1).

Функции $\gamma_{mj}(\omega)$, обладающие всеми перечисленными выше свойствами, представим в виде

$$\gamma_{mj}(\omega)=-\frac{2\lambda_{mj}\Gamma_0(b\omega^{1/2})J_0(b\omega^{1/2})J_0(\lambda_{mj}a)[J_0(a\omega^{1/2})]^{-1}}{b(\lambda_{mj}^2-\omega)\left[\delta_j^1\Gamma_1(b\lambda_{mj})J_0(b\lambda_{mj})+\delta_j^2\Gamma_0(b\lambda_{mj})J_1(b\lambda_{mj})\right]};\quad m=1,2\ldots,\ j=1,2.$$

Здесь $\Gamma_0(\omega) = J_0(\omega)N_0(\omega a/b) - J_0(\omega a/b)N_0(\omega)$ и $\Gamma_1(\omega) = -\dfrac{\partial}{\partial\omega}\Gamma_0(\omega)$. Прямая проверка с использованием общеизвестных свойств цилиндрических функций [16] показывает: функции $\gamma_{mj}(\omega)$ имеют простые нули и полюсы в нужных точках плоскости ω и только в них; особенность в точке $\omega=0$ (ветвление функции $\omega^{1/2}$ и существенная особенность $N_0=(\omega)$) - устранима; необходимая нормировка обеспечивается введенным в (3.3) независящим от ω множителем; при больших $|\omega|$, n, m:

$$\gamma_{mj}(\omega) = O\left[m^2\omega^{-1/2}(\lambda_{mj}^2 - \omega)^{-1}\right];$$

$$\mathrm{Res}\gamma_{mj}(\lambda_n^2) = O\left[m^2(\lambda_{mj}^2 - \lambda_n^2)^{-1}\right];\ \psi_{mj} = O(m^{-2}).$$

3. Очевидно, что и при определении операторов, описывающих рассеивающие свойства рассматриваемой неоднородности при возбуждении ее с противоположной стороны (из круглого или коаксиального волновода, $z<0$), последовательность действий, приводящая к точному решению задачи, существенных изменений не претерпевает. Если учесть, что элементарная заглушка любого волноведущего канала с поперечными числами $\{\lambda_n\}$ полностью описывается диагональным оператором отражения R^+ с

$$R_{np}^+(t-\eta) = \delta_n^p(\lambda_p^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2})J_0[\lambda_p(t-\eta)]\chi(t-\eta) \tag{3.4}$$

(для получения (3.4) необходимо обратить интегральное уравнение Вольтерра первого рода, возникающее при удовлетворении условию $U^i(g,t)+U^S(g,t)=0$ в плоскости поперечного сечения, где расположена заглушка), то полученные выше результаты можно назвать ключевыми. По схеме, изложенной в пп.3, п.1, они позволяют эффективно численно анализировать многочисленные функциональные устройства на основе круглых и коаксиальных волноводов (модификация геометрии канонической задачи в продольном и поперечном направлениях [1]). Этими же методами может быть рассмотрен аналогичный круг задач для прямоугольных, секториальных и т.п. в поперечном сечении областей Q.

Литература

1. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. Киев, Наук. думка, 1984.
2. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Резонансное рассеяние волн. Т.1. Дифракционные решетки. Киев, Наук. думка, 1986.
3. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Рудь Л.А. Резонансное рассеяние волн. Т.2. Волноводные неоднородности. Киев, Наук. думка, 1986.
4. Шестопалов В.П., Сиренко Ю.К. Динамическая теория решеток. Киев, Наук. думка, 1989.
5. Шестопалов В.П. Морсовские критические точки дисперсионных уравнений. Киев, Наук. думка, 1992.
6. Сиренко Ю.К., Шестопалов В.П., Яшина Н.П. Препринт НАН Украины. Институт радиофиз. и электрон. Харьков, 1995, N95-6.
7. Третьяков О.А. Радиотехника и электроника. 1989, т.34, N5, с.917-926.
8. Сиренко Ю.К. Журн. вычисл. математ. и математ. физики. 1983, т.23, N6, с.1381-1391.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва, Наука, 1973.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1988.
11. Майков А.Р., Свешников А.Г., Якунин С.А. Журн. вычисл. математ. и математ. физики. 1986, т.26, N6, с.851-863.
12. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Москва, Мир, 1966.
13. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. Москва, Мир, 1977.
14. Сиренко Ю.К. Препринт АН УССР. Институт радиофиз. и электрон. Харьков, 1978, N103.
15. Кириленко А.А., Шестопалов В.П., Яшина Н.П. Журн. вычисл. математ. и математ. физики. 1977, т.17, N6, с.1482-1493.
16. Справочник по специальным функциям под ред. М.Абрамовиц и И.Стиган. Москва, Наука, 1979.

Operator Method for Nonstationary Theory of Waveguide Open Resonators

Y.K. Sirenko, N.P. Yashina

Several models and algorithms oriented on reliable qualitative and quantitative physical analysis including resonant and abnormal nonstationary wave scattering phenomena are presented. The novel approaches and techniques are based on the description of properties of inhomogeneities in terms of transform operators of signal "evolutionary basis" common for all guiding structures, and suppose on the key stages of solution development the using of correct numerical algorithms of analytical regularization method.