

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

УДК 621.371.162

А. С. БРЮХОВЕЦКИЙ

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: ire@ire.kharkov.ua

ПЕРЕХОД ОТ БЛИЖНЕЙ К ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Для случая рассеяния плоской волны статически неровной поверхностью найдены асимптотики двукратных интегралов от осциллирующих функций, определяющих временную корреляционную функцию рассеянного поля. При углах рассеяния много больше характерного угла френелевской зоны использован метод стационарной фазы (МСФ). При чисто скользящем рассеянии – комбинированный метод: МСФ для поперечной переменной и приближение дифракции Фраунгофера для продольной относительно плоскости рассеяния переменной. Установлена связь с известными в литературе результатами расчетов.

Ключевые слова: рассеяние волн, интеграл от осциллирующей функции, стационарная фаза, френелевская зона, дифракция Фраунгофера

1. Введение

Успехи теоретических исследований рассеяния волн статически неровной поверхностью во многом обеспечены применением метода малых возмущений. В соответствии с этим методом решение представляется рядом по степеням параметра, пропорционального отношению отклонения поверхности от среднего значения к длине волны λ , а граничные условия для каждого члена ряда переносятся на “среднюю” поверхность. Некоторые виды “средней” поверхности (бесконечные плоскость и круговой цилиндр, сфера) имеют явные аналитические выражения для соответствующих функций Грина. Это позволяет записать решение (по крайней мере формально) в виде рядов или интегралов, содержащих статистические характеристики случайной поверхности.

Для практических задач, когда рассеяние происходит на большом (по сравнению с λ), но ограниченном участке поверхности, предполагают допустимой модификацию решения задачи рассеяния бесконечной шероховатой плоскостью, которая заключается в замене бесконечных преде-

лов интегрирования конечными. Такой метод расчета является эвристическим, аналогичным методу Кирхгофа ([1], с. 413) в теории дифракции на экранах. Обоснований метода Кирхгофа в качестве предельного перехода в точном решении не имеется. Однако его практическое использование оправдано относительной простотой расчетов и хорошим численным совпадением с результатами имеющихся точных решений в широком диапазоне углов дифракции ([1]; [2], гл. 5; [3], с. 186; [4]).

Практическая реализация вышеуказанного приближенного метода сопряжена с трудностями асимптотической оценки многократных интегралов от осциллирующих функций по ограниченной области переменных интегрирования. Авторы имеющихся исследований для максимального упрощения расчетов используют различного рода допущения, либо сформулированные в виде “упрощающей” рабочей гипотезы ([3], с. 104), либо принимаемые де-факто в режиме “умолчания” [5–7]. Вкратце эти допущения сводятся к двум противоречивым предположениям. Согласно первому фазу подинтегрального выражения корреляционной функции рассеянного поля можно представить линейными членами разложения

по степеням разности координат двух рассеивающих точек поверхности. А согласно второму предположению пределы интегрирования по этим разностям можно считать бесконечными. В качестве оправдательного аргумента выдвигается малость радиуса корреляции случайных неровностей – величины, которая не участвует в ходе последующих вычислений.

Противоречивость выдвигаемых предположений усматривается в том, что для “малой” рассеивающей площадки первое из них может иметь место (приближение дифракции Фраунгофера), а второе вызывает сомнение. Для “большой” площадки (много больше размеров зоны Френеля), несомненно, ошибочным является первое предположение.

Следствием этой противоречивости является несоответствие результатов расчета для “малой” площадки с теми, которые следуют из приближения дифракции Фраунгофера, применимость которого вне всякого сомнения. Именно это обстоятельство побудило автора к исследованию данной проблемы. Первоначальные попытки [8] показали, что при решении такой задачи наряду со сферичностью волнового фронта необходим учет конечных размеров площадки. Этот подход достаточно успешно был реализован в работе [9] по обратному рассеянию излучения точечного источника. Хотя этот (важный в практическом отношении) случай и имеет весьма частный характер, однако он позволил более глубоко понять механизм рассеяния и проследить предельный переход от ближней к дальней зоне.

Исследование самого общего случая двухпозиционного рассеяния не возможен без промежуточного этапа – рассеяния плоской волны при достаточно произвольном расположении точки наблюдения. Этому и посвящена настоящая работа.

2. Интегральное представление корреляционной функции $B(\tau)$ и частотного спектра $S(\omega)$ рассеянного поля

Как было показано в предыдущей работе [8], временную корреляционную функцию $B(\tau)$ при зависимости от времени t в виде $\sim e^{i\omega_0 t}$ можно представить как

$$B(\tau) = B_1(\tau) + B_1^*(\tau), \tag{1}$$

где “*” – знак комплексного сопряжения, а

$$B_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{\chi}_1 \sum_{j=\pm} \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) |f_1(\vec{\chi}_1)|^2 e^{-i[\omega_0 + j\omega_1(\chi_1)]\tau}, \tag{2}$$

$$f_1(\vec{\chi}_1) = \int_S d^2\vec{r}_1 f_2(\vec{r}_1; \vec{\chi}_1) e^{i\Phi(\vec{r}_1)}, \tag{3}$$

$$f_2(\vec{r}_1; \vec{\chi}_1) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \frac{J_{12} \tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1)}{4\pi R_{01} R_{12}}, \tag{4}$$

$$\Phi(\vec{r}_1) = kR_{01} + kR_{12} + \vec{\chi}_1 \vec{r}_1. \tag{5}$$

В этих формулах $\vec{R}_{01} = (\vec{r}_{01}, z_1 - z_0) = \vec{R}_1 - \vec{R}_0$ – вектор, соединяющий точку рассеяния $\vec{R}_1 = (\vec{r}_1, z_1 = 0)$ на средней поверхности $z_1 = \langle \zeta(\vec{r}_1, t) \rangle = 0$ (см. рис. 1) с точкой источника $\vec{R}_0 = (\vec{r}_0, z_0)$; вектор $\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ – вектор, соединяющий точку рассеяния \vec{R}_1 с точкой наблюдения $\vec{R}_2 = (\vec{r}_2, z_2)$; $\sigma^2 = \langle \zeta^2 \rangle$ – дисперсия случайных неровностей; $\tilde{W}_j(\vec{\chi}_1)$ – несимметричный энергетический спектр волновых чисел [10] (пространственный спектр неровностей), а $\omega_1 = \omega_1(\chi_1)$ – частота случайных колебаний поверхности, отвечающая волновому вектору $\vec{\chi}_1$; множители $\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1)$ и J_{12} , учитывающие влияние отражательных свойств поверхности на трассе \vec{R}_{01} для среднего поля и на трассе \vec{R}_{12} для рассеянного поля [11] равны соответственно:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1) &\equiv \tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1; \vec{R}_{01}) = \\ &= (-k\alpha_{\perp} \vec{\chi}_1 + k^2 \alpha_z^2)(1 + V_{01}) + k^2 \alpha_z \eta_0 (1 - V_{01}) + \\ &+ (-k\alpha_{\perp} \vec{\chi}_1 + k^2 \alpha_z^2 + k^2 \alpha_z \eta_0)(1 - V_{01}) W_{01}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$J_{12} \equiv J_{12}(\vec{R}_{12}) = (1 + V_{12}) + (1 - V_{12}) W_{12}. \tag{7}$$

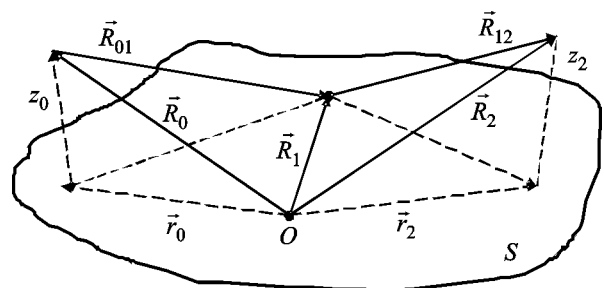


Рис. 1. Геометрия рассеяния

Здесь V_{01}, V_{12} – эффективные коэффициенты отражения, а W_{01}, W_{12} – множители ослабления для вышеуказанных трасс \bar{R}_{01} и \bar{R}_{12} соответственно; η_0 – импеданс поверхности; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $\bar{\alpha}_\perp = \bar{r}_{01}/R_{01}$, $\bar{r}_{01} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$; $\alpha_z = z_0/R_{01}$. Приведенные выражения получены для условий волновой зоны: $kR_{01}, kR_{12} \gg 1$.

Спектр является преобразованием Фурье выражения (2) для корреляционной функции

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\bar{\chi}_1 \bar{W}_j(\bar{\chi}_1) |f_1(\bar{\chi}_1)|^2 \delta(\omega - \omega_0 - j\omega_1(\chi_1)), \quad (8)$$

$(j = \text{sign}(\omega - \omega_0)).$

Поскольку начало координат лежит в средней плоскости $z_1 = 0$, условный центр площадки имеет радиус-вектор $\bar{R}_c = (\bar{r}_c, 0)$. При этом можно сделать преобразования: $\bar{R}_{01} = \bar{R}_{0c} + \bar{r}_1$, $\bar{R}_{12} = \bar{R}_{2c} + \bar{r}_1$, где $\bar{R}_{0c} = \bar{R}_c - \bar{R}_0$, $\bar{r}_1 = \bar{R}_1 - \bar{R}_c$, $\bar{R}_{2c} = \bar{R}_2 - \bar{R}_c$.

Предположим, что источник удален от поверхности S настолько далеко, что выполнено приближение плоской волны $e^{ikR_{01}}/R_{01} \cong e^{ikR_{0c} + ik\bar{\alpha}_c \bar{r}_1}/R_{0c}$, где $\bar{\alpha}_c = \left(\frac{\bar{r}_{0c}}{R_{0c}}, \frac{z_0}{R_{0c}} \right)$. Тогда в выражениях (4) и (6) следует ограничиться приближением $R_{01} \cong R_{0c}$ и $\bar{\alpha}_\perp \approx \bar{r}_{0c}/R_{0c}$, а для фазы (5) – приближением

$$\Phi \approx kR_{0c} + kR_{12} + k\bar{\alpha}_\perp \bar{r}_1 + \bar{\chi}_1 \bar{r}_1. \quad (9)$$

Подставив это значение Φ в формулу (3), приходим к необходимости асимптотической оценки двойного интеграла от осциллирующей функции. Особенности этой процедуры обсуждались в предыдущем исследовании [9]. Не останавливаясь на них, займемся вычислением главного члена асимптотики методом стационарной фазы (МСФ).

3. Значение фазы Φ_s в стационарной точке

Стационарная точка $\bar{r}_1 \equiv \bar{r}_s$ фазы (9) определяется условием

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{r}_1} \right) = k \left(-\bar{\beta} + \bar{\alpha}_\perp + \frac{\bar{\chi}_1}{k} \right)_s = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } \bar{\beta} = -\frac{\partial R_{12}}{\partial \bar{r}_1} = \frac{\bar{r}_{2c} - \bar{r}_1}{R_{12}}, \quad \bar{\alpha}_\perp = \frac{\bar{r}_{0c}}{R_{0c}}, \quad (11)$$

$$R_{12} = |\bar{R}_{2c} - \bar{r}_1| = \sqrt{z_2^2 + (\bar{r}_{2c} - \bar{r}_1)^2}, \quad \bar{r}_{2c} = \bar{r}_2 - \bar{r}_c. \quad (12)$$

Здесь и далее нижний индекс “s” отвечает значению в стационарной точке. Если начало координат поместить в точку \bar{r}_c , то $\bar{r}_c = 0$, а $\bar{r}_{2c} = \bar{r}_2$.

В общем случае произвольных значений размеров поверхности S , направлений $\bar{\alpha}_c$ и \bar{R}_{2c} определить \bar{r}_s из условия стационарности (10) в аналитическом виде не представляется возможным. Поэтому ограничимся приближением дифракции Френеля, разложив $\Phi(\bar{r}_1)$ в ряд Тейлора:

$$\Phi(\bar{r}_1) \approx \Phi_c + O_1(x_1, y_1) + \sum_{n=2}^{\infty} O_n(x_1, y_1), \quad (13)$$

$$\Phi_c = k(R_{0c} + R_{2c}),$$

где

$$O_1(x_1, y_1) \equiv O_1(x_1) + O_1(y_1) = k \left(-\bar{\beta}_c + \bar{\alpha}_\perp + \bar{\chi}_1/k \right) \bar{r}_1, \quad (14)$$

$$O_n \equiv \sum_{i=0}^n O_n(x_1^i y_1^{n-i}) = \frac{k}{n!} \sum_{i=0}^n C_n^i x_1^i y_1^{n-i} \left(\frac{\partial^n R_{12}}{\partial x_1^i \partial y_1^{n-i}} \right)_0. \quad (15)$$

Здесь C_n^i – биномиальные коэффициенты.

Нижний индекс “0” в формуле (15) означает, что производная берется в точке $\bar{r}_1 = 0$. При этом $\bar{\beta}_c = (\beta_{cx}, \beta_{cy})$, $\beta_{cx} = \frac{x_{2c}}{R_{2c}}$, $\beta_{cy} = \frac{y_{2c}}{R_{2c}}$, $R_{2c} = \sqrt{z_2^2 + x_{2c}^2 + y_{2c}^2}$. Квадратичные члены $O_2(x_1^i y_1^{2-i})$ выглядят следующим образом:

$$O_2(x_1^2 y_1^0) = \frac{k}{2!} \frac{x_1^2}{R_{2c}} \frac{z_2^2 + y_{2c}^2}{R_{2c}^2},$$

$$O_2(x_1 y_1) = \frac{k}{2!} \frac{2x_1 y_1}{R_{2c}} \frac{x_{2c} y_{2c}}{R_{2c}^2},$$

$$O_2(x_1^0 y_1^2) = \frac{k}{2!} \frac{y_1^2}{R_{2c}} \frac{z_2^2 + x_{2c}^2}{R_{2c}^2}.$$

Воспользовавшись этими выражениями, получим:

$$\beta_x = -\frac{\partial R_{12}}{\partial x_1} \cong \beta_{cx} - \frac{x_1}{R_{2c}} \frac{z_2^2 + y_{2c}^2}{R_{2c}^2} - \frac{y_1}{R_{2c}} \beta_{cx} \beta_{cy} + \dots, \quad (16)$$

$$\beta_y = -\frac{\partial R_{12}}{\partial y_1} \cong \beta_{cy} - \frac{y_1}{R_{2c}} \frac{z_2^2 + x_{2c}^2}{R_{2c}^2} - \frac{x_1}{R_{2c}} \beta_{cx} \beta_{cy} + \dots \quad (17)$$

Подстановка (16) и (17) в уравнение стационарности (10) приводит к линейной связи x_s и y_s с компонентами векторов $\vec{\alpha}_\perp$ и $\vec{q} \equiv \vec{\chi}_1/k$. С учетом этой зависимости фаза $\Phi_s \equiv \Phi(\vec{r}_s)$ в стационарной точке имеет вид

$$\Phi_s = \Phi_c - \frac{k}{2R_{2c}} \times \left(x_s^2 \frac{z_2^2 + y_{2c}^2}{R_{2c}^2} + y_s^2 \frac{z_2^2 + x_{2c}^2}{R_{2c}^2} + 2x_s y_s \beta_{cx} \beta_{cy} \right) + \dots \quad (18)$$

Отсюда следует, что френелевское приближение для фазы (13) в стационарной точке имеет канонический вид квадратичной формы, если направление осей Ox_1 и Oy_1 таково, что либо $\beta_{cx} = 0$, либо $\beta_{cy} = 0$. Как и авторы монографии [1] (см. с. 464) выберем $\beta_{cy} = 0$, т. е. $y_{2c} = 0$. При этом

$$R_{c2}^2 = z_2^2 + x_{2c}^2, \quad O_2(x_1^2, y_1^0) = \frac{kx_1^2}{2R_{2c}} \frac{z_2^2}{R_{2c}^2},$$

$$O_2(x_1, y_1) = 0, \quad O_2(x_1^0, y_1^2) = \frac{ky_1^2}{2R_{2c}}.$$

Из оценок членов разложения O_3 и O_4 следует, что для ограничения квадратичным френелевским разложением фазы необходимо, чтобы углы скольжения при рассеянии были много больше характерного френелевского угла $\theta_{fp} = \sqrt{\lambda/R_{2c}}$.

Для чисто скользящего рассеяния, $\cos \theta_{2c} \equiv z_2/R_{2c} = 0$, квадратичная добавка $O_2(x_1^2) = 0$. Если в некоторой области значений $\vec{\alpha}_\perp$, \vec{q} и линейная часть $O_1(x_1) \approx 0$, то необходимо учесть $O_3(x_1 y_1^2)$ – добавку линейную по x_1 , но квадратичную по y_1 .

Дальнейшее рассмотрение будет посвящено анализу этих двух ситуаций:

- достаточно крутые углы рассеяния и
- чисто скользящее рассеяние при $z_2 = 0$.

4. Нескользящее рассеяние $(\pi/2 - \theta_{2c} \gg \sqrt{\lambda/R_{2c}})$

При вычислении асимптотики двойного интеграла (3) воспользуемся МСФ для обеих переменных интегрирования.

Определитель H матрицы Гесса (матрицы вторых производных $\Phi''_{xx}, \Phi''_{yy}, \Phi''_{xy}$) равен

$$H = (\Phi''_{xx} \Phi''_{yy} - (\Phi''_{xy})^2)_s = k^2 z_2^2 / R_s^4 > 0, \quad (19)$$

поскольку рассматриваем случай $z_2 \neq 0$.

Неравенство (19) свидетельствует о положительной определенности квадратичной формы, получаемой при разложении $\Phi(\vec{r}_1)$ до членов 2-го порядка по x_1, y_1 , а потому она может быть приведена поворотом координатных осей к каноническому виду. Этому повороту и отвечает сделанный нами выбор: $y_{2c} = 0, \beta_{cy} = 0$. При этом во френелевском приближении матрица Гесса диагональна $(\Phi''_{xy})_s = 0$, что облегчает процедуру асимптотического интегрирования сначала по одной, а затем по другой переменной с независимым преобразованием согласно МСФ по каждой из них. Чтобы полностью разделить влияние месторасположений каждой в отдельности координат x_s и y_s относительно границы S , выберем их подобно тому, как это делается в классической задаче о дифракции Френеля на прямоугольном экране ([1], с. 465):

$$-\frac{\Delta x}{2} \leq x_1 \leq \frac{\Delta x}{2}, \quad (20)$$

$$-\frac{\Delta y}{2} \leq y_1 \leq \frac{\Delta y}{2}.$$

Введем обозначения:

$$\varepsilon_{xx} = -\text{sign}(\Phi''_{xx})_s = -1, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\text{sign}(\Phi''_{yy})_s = -1.$$

Согласно формуле (П2) (см. Приложение):

$$f_1(\vec{\chi}_1) \approx 2H^{-1/2} e^{i\Phi_s} f_2(\vec{r}_s; \vec{\chi}_1) e^{i\pi/4} \Delta Q_x e^{i\pi/4} \Delta Q_y. \quad (22)$$

“Большая” площадка $\left(\frac{k}{2R_{2c}} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \frac{z_2^2}{R_{2c}^2} \gg 1, \right.$
 $\left. \frac{k}{2R_{2c}} \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 \gg 1 \right)$

Для “большой” площадки $\Delta Q_x, \Delta Q_y \approx \sqrt{\pi}$. Учитывая значение H из (19), получаем

$$f_1(\vec{\chi}_1) \approx 2\pi (kz_2/R_s^2)^{-1} e^{i(\Phi_s + \pi/2)} f_2(\vec{r}_s; \vec{\chi}_1). \quad (23)$$

$$\text{“Малая” площадка} \left(\frac{k}{2R_{2c}} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \frac{z_2^2}{R_{2c}^2} \ll 1, \right. \\ \left. \frac{k}{2R_{2c}} \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 \ll 1 \right)$$

В формулу (22) следует подставить ΔQ_x и ΔQ_y , даваемые формулами (П20) и (П21) из Приложения,

$$f_1(\bar{\chi}_1) = e^{i\Phi_c} \left(\frac{R_s}{R_{2c}} \right)^2 S f_2(\bar{r}_s; \bar{\chi}_1) \frac{\sin X_x}{X_x} \frac{\sin X_y}{X_y}, \quad (24)$$

где учтены выражение (П19) и связь $\bar{\beta}_s = \bar{\beta}_c + \bar{\alpha}_\perp + \bar{q}$. В формуле (24) использованы обозначения:

$$X_x = -C_x = (k \Delta x / 2) (\beta_{cx} - \alpha_x - q_x) \equiv \\ \equiv (k \Delta x / 2) (\beta_{cx} - \beta_{sx}), \quad (25)$$

$$X_y = C_y = (k \Delta y / 2) (\alpha_y + q_y) \equiv (k \Delta y / 2) \beta_{sy}, \quad (26)$$

$$S = \Delta x \Delta y.$$

5. Приближение дифракции Фраунгофера

Для “малой” площадки члены разложения в фазе выше 1-го порядка малы по сравнению с единицей, поэтому

$$\Phi(\bar{r}_1) \approx \Phi_c + k(-\bar{\beta}_c + \bar{\alpha}_\perp + \bar{q})\bar{r}_1 + \dots \quad (27)$$

Множитель $f_2(\bar{r}_1; \bar{\chi}_1)$ при экспоненте в формуле (3) мало меняется в пределах площадки. Ограничившись нулевым членом разложения $f_2(\bar{r}_1; \bar{\chi}_1) = f_2(\bar{r}_c; \bar{\chi}_1) + \dots$, не зависящим от \bar{r}_1 , получим, выполнив интегрирование в (3):

$$f_1(\bar{\chi}_1) \approx e^{i\Phi_c} S f_2(\bar{r}_c; \bar{\chi}_1) \frac{\sin X_x}{X_x} \frac{\sin X_y}{X_y}. \quad (28)$$

Условием малого отличия (28) от (24) при аналитической зависимости $f_2(\bar{r}_1; \bar{\chi}_1)$, даваемой выражением (4), является требование

$$\left| \frac{R_s}{R_{2c}} - 1 \right| = \left| -\beta_{cx} \frac{x_s}{R_{2c}} + \frac{x_s^2}{2R_{2c}^2} \frac{z_2^2}{R_{2c}^2} + \frac{y_s^2}{2R_{2c}^2} + \dots \right| \ll 1, \quad (29)$$

равноценное условиям

$$\frac{x_s}{R_{2c}} \ll 1, \quad \frac{y_s^2}{2R_{2c}^2} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{z_2^2}{R_{2c}^2} \gg \frac{\lambda}{\Delta x} \gg \frac{\lambda}{R_{2c}}, \quad (30)$$

т. е. требование малости углов рассеяния. При этом $f_2(\bar{r}_s; \bar{\chi}_1) \approx f_2(\bar{r}_c; \bar{\chi}_1)$ с учетом слабой зависимости (4) от \bar{r}_1 .

6. Скользящее рассеяние ($z_2 = 0$)

Согласно замечанию по поводу оценок при скользящем рассеянии следует сохранить в разложении фазы члены третьего порядка,

$$\Phi(\bar{r}_1) \approx \Phi_c + k(-\bar{\beta}_c + \bar{\alpha}_\perp + \bar{q})\bar{r}_1 + \frac{k y_1^2}{2R_{2c}} + \frac{k x_1 y_1^2}{2R_{2c}^2} \beta_{cx} + \dots \quad (31)$$

Если ограничиться нулевым членом разложения $f_2(\bar{r}_1; \bar{\chi}_1) \approx f(x_c, y_1; \bar{\chi}_1) + \dots$ по степеням $(x_1 - x_c)$, то в результате интегрирования в (3) получим

$$f_1(\bar{\chi}_1) \approx e^{i\Phi_c} \Delta x \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy_1 f_2(x_c, y_1; \bar{\chi}_1) \times \\ \times \frac{\sin X_x}{X_x} e^{ik \frac{y_1^2}{2R_{2c}} + ik(\alpha_y + q_y)y_1}, \quad (32)$$

где в этом случае

$$X_x = (k \Delta x / 2) \left[\alpha_x + q_x - \beta_{cx} \left(1 - y_1^2 / (2R_{2c}^2) \right) \right]. \quad (33)$$

Заметим, что с точностью до членов $\sim \left(\frac{y_1}{R_{2c}} \right)^4$ выражение

$$\beta_{cx} \left(1 - y_1^2 / (2R_{2c}^2) \right) \approx \frac{x_{2c}}{\sqrt{x_{2c}^2 + y_1^2}}, \quad (x_{2c} = R_{2c}), \quad (34)$$

является x -составляющей орта вдоль вектора \bar{R}_{12} , соединяющего в данном случае точку рассеяния $\bar{r}_1 = (x_c, y_1)$ и точку наблюдения $\bar{R}_2 = (x_{2c}, 0)$.

Стационарная точка y_s фазы $\Phi(y_1) = k(\alpha_y + \beta_y)y_1 + \frac{k y_1^2}{2R_{2c}}$ подынтегрального выражения в (32) определяется из уравнения

$$\Phi'(y_s) = k \left(\frac{y_s}{R_{2c}} + \alpha_y + q_y \right) = 0, \quad (35) \quad X_y = (k\Delta y/2)(\alpha_y + q_y). \quad (43)$$

откуда

$$\frac{y_s}{R_{2c}} = -(\alpha_y + q_y). \quad (36)$$

При этом

$$\Phi_s = \Phi(y_s) = -\frac{ky_s^2}{2R_{2c}}, \quad (37)$$

$$(\Phi''_{yy})_s = \frac{k}{R_{2c}} > 0, \quad (38)$$

$$h_{sy} = e^{i\pi/4} \sqrt{2/|\Phi''_{yy}|_s} = e^{i\pi/4} \sqrt{2R_{2c}/k}. \quad (39)$$

Взяв главный член асимптотики МСФ для однократного интеграла в (32), приходим к выражению

$$f_1(\bar{\chi}_1) \approx \Delta x e^{i(\Phi_c - ky_s^2/(2R_{2c}))} f_2(x_c, y_s; \bar{\chi}_1) h_{sy} \Delta Q_y \frac{\sin X_x}{X_x}, \quad (40)$$

где величина X_x определена формулой (33) при $y_1 = y_s$.

“Большая” площадка $\left(\frac{k}{2R_{2c}} \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 \gg 1 \right)$

В этом случае для точек y_s внутри “освещенной” области ($|y_s| < \Delta y/2$), значительно удаленных от границ тени $y = \pm \Delta y/2$, можно положить $\Delta Q_y \approx \sqrt{\pi}$, в результате получим

$$f_1(\bar{\chi}_1) = e^{i(\pi/4 + \Phi_c - ky_s^2/(2R_{2c}))} \times \Delta x \sqrt{2\pi R_{2c}/k} f_2(x_c, y_s; \bar{\chi}_1) \frac{\sin X_x}{X_x}. \quad (41)$$

“Малая” площадка $\left(\frac{k}{2R_{2c}} \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 \ll 1 \right)$

Согласно формуле (П21) из Приложения

$$\Delta Q_y = \Delta y \sqrt{k/(2R_{2c})} e^{i(ky_s^2/(2R_{2c}) - \pi/4)} \frac{\sin X_y}{X_y}, \quad (42)$$

где

При этом

$$f_1(\bar{\chi}_1) \approx S e^{i\Phi_c} f_2(x_c, y_s; \bar{\chi}_1) \frac{\sin X_x}{X_x} \frac{\sin X_y}{X_y}. \quad (44)$$

7. Средняя интенсивность $B(0)$

Как отмечалось в [9], средняя интенсивность $B(0)$ и частотный спектр $S(\omega)$ являются интегралами от положительно определенной функции $|f_1(\bar{\chi}_1)|^2 \tilde{W}_{\pm}(\bar{\chi}_1)$, а потому результат интегрирования зависит от степени взаимного пересечения областей “локализации” каждого из сомножителей в этом произведении. Если исключить вариант очень узкополосного спектра неровностей $\tilde{W}_{\pm}(\bar{\chi}_1)$, то результат будет определяться областью локализации $|f_1(\bar{\chi}_1)|^2$. Для “большой” площадки S это множество значений $\bar{\chi}_1$, определяющих положение стационарных точек \vec{r}_s в “освещенной” области (внутренние точки S , для которых $|x_s| < \Delta x/2$ и $|y_s| < \Delta y/2$), для “малой” площадки – положение точек \vec{r}_s (в основном за пределами S – в “теневого зоне”, где выполнено хотя бы одно из неравенств $|x_s| > \Delta x/2$, $|y_s| > \Delta y/2$), которые формируют несколько первых лепестков “диаграммных” сомножителей $\frac{\sin^2 X_x}{X_x^2} \frac{\sin^2 X_y}{X_y^2}$.

Заметим, что эти сомножители описывают изменение интенсивности излучения, вызванное не перемещением точки наблюдения при неизменном амплитудно-фазовом освещении излучающей апертуры S . В нашем случае точка наблюдения R_{2c} неподвижна, а “излучающая” апертура S имеет набор статистически независимых случайных амплитудно-фазовых освещений. Направление главного максимума поля излучения для каждого освещения свое (определяется волновым вектором $\bar{\chi}_1$ случайной синусоидальной рассеивающей решетки в спектре неровностей), а интенсивность пропорциональна статистическому весу $\tilde{W}_j(\bar{\chi}_1)$. Сложение всех “парциальных” вкладов рассеяния на каждой решетке и приводит к диаграммным сомножителям, описывающим, насколько далеко от направления наблюдения находится направление максимума рассеяния на случайной решетке с данным волновым вектором $\bar{\chi}_1$.

При произвольных значениях внешних параметров $(\bar{R}_{01}, R_{12}, \bar{\chi}_1, \Delta x, \Delta y, \dots)$ задача определения $|f_1(\bar{\chi}_1)|^2$ для всех $-\infty \leq \bar{\chi}_1 \leq \infty$ является практически неосуществимой. Поэтому ограничимся случаем, когда область “локализации” $|f_1(\bar{\chi}_1)|^2$ удалена от границ области значений $\bar{\chi}_1$, приводящих к физически допустимым значениям $\bar{\beta}_s$ в МСФ, либо случаем чисто скользящего рассеяния ($z_2 = 0$). В этих ситуациях продолжение $|f_1(\bar{\chi}_1)|^2$ на всю область значений $-\infty \leq \bar{\chi}_1 \leq \infty$ существенно не влияет на величину интеграла (2).

Физически допустимыми значениями $\bar{\chi}_1$ в МСФ являются те, которые приводят к вещественным решениям $\bar{\beta}_s$ уравнения стационарности (10), причем с модулем $|\bar{\beta}_s| \leq 1$. Поскольку $\bar{\alpha}_\perp$ – составляющая единичного вектора $\bar{\alpha}_c$ в плоскости $z_1 = 0$, физически допустимые значения $\bar{q} = \bar{\chi}_1/k$ можно изобразить на схеме векторного сложения $\bar{\beta}_s = \bar{\alpha}_\perp + \bar{q}$, приведенной на рис. 2. Здесь Γ – контур, ограничивающий множество возможных значений \bar{q} при таком сложении, представляющий собой круг единичного радиуса. Точки за пределами этого круга являются областью каустической тени. Четырехугольник внутри круга отвечает “освещенной” области. Остальная часть круга – зона “геометрической тени” – переходная область между “освещенной” областью и запретной в МСФ зоной “каустической тени”.

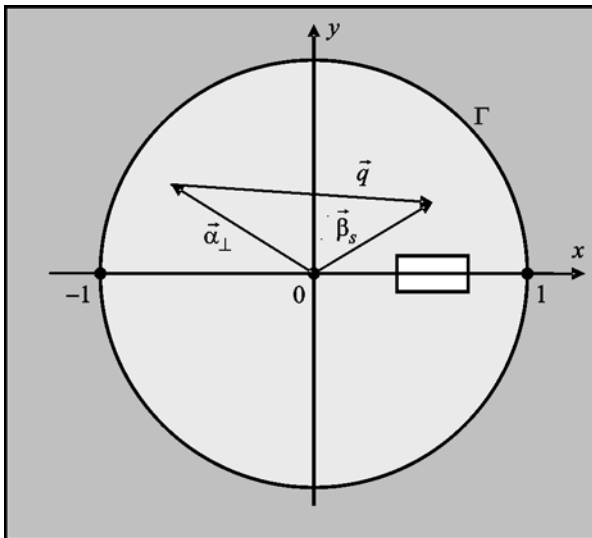


Рис. 2. Схема векторного сложения

Для приближения дифракции Фраунгофера в случае малой площадки все значения $-\infty \leq \bar{\chi}_1 \leq \infty$ физически допустимые, однако в силу быстрого убывания “диаграммных” множителей реально значимыми являются те, что лежат в полосе $|\Delta\chi_{1x}| \sim 2\pi/\Delta x$, $|\Delta\chi_{1y}| \sim 2\pi/\Delta y$. возле значений $\chi_{1cx} = k(\beta_{cx} - \alpha_x)$ и $\chi_{1cy} = -k\alpha_y$, отвечающих главным максимумам “диаграммных” множителей.

8. Нескользящее рассеяние

$$(z_2/R_{2c} \gg \sqrt{\lambda/R_{2c}})$$

“Большая” площадка

Область стационарных точек \vec{r}_s в “освещенной” зоне определяется значениями $\chi_{1cx} - \Delta\chi_{1x} \leq \chi_{1x} \leq \chi_{1cx} + \Delta\chi_{1x}$, $\chi_{1cy} - \Delta\chi_{1y} \leq \chi_{1y} \leq \chi_{1cy} + \Delta\chi_{1y}$, где $\bar{\chi}_{1c} = k(\bar{\beta}_c - \bar{\alpha}_\perp)$, а $\Delta\chi_{1x} = \frac{k}{2R_{2c}} \frac{\Delta x}{2} \frac{z_2^2}{R_{2c}^2}$, $\Delta\chi_{1y} = \frac{k}{2R_{2c}} \frac{\Delta y}{2}$.

За пределами “освещенной” зоны $|f_1(\bar{\chi}_1)|^2$ быстро убывает и вкладом “теневого” области в общее значение интеграла в (2) можно пренебречь при условии, что $\tilde{W}(\bar{\chi}_1)$ достаточно плавная функция по крайней мере в приграничной области “свет–тень”. Требуемые масштабы $|\Delta\chi_{1x}|$, $|\Delta\chi_{1y}|$, на которых функция $\tilde{W}(\bar{\chi}_1)$ должна меняться мало, по порядку величины соответствуют расстоянию между соседними зонами Френеля в уравнении стационарности (10),

$$\text{т. е. } |\Delta\chi_{1x}| \approx \sqrt{\frac{2k}{R_c} \frac{z_2}{R_c}}, \quad |\Delta\chi_{1y}| \approx \sqrt{\frac{2k}{R_c}}.$$

Для этого случая можно перейти от интегрирования по $\bar{\chi}_1$ к интегрированию по \vec{r}_s в пределах “освещенной” области S , используя линейную связь между $\vec{r}_1 = \vec{r}_s$ и $\bar{\chi}_1$, даваемую уравнением стационарности (10) в приближении френелевской дифракции (16), (17), при которой $|d\chi_{1x} d\chi_{1y}| = \frac{k^2 z_2^2}{R_{2c}^4} |dx_1 dy_1|$. Взяв для $f_1(\bar{\chi}_1)$ в “освещенной” зоне выражение (23) с учетом приближения (29), получим

$$B(0) = 2B_1(0) \cong 16\pi^2 \times \int_S d^2\vec{r}_s \left| f_2(\vec{r}_s; k(\bar{\beta} - \bar{\alpha}_\perp)) \right|^2 \tilde{W}(k(\bar{\beta} - \bar{\alpha}_\perp)), \quad (45)$$

где функция $f_2(\vec{r}_s; k(\vec{\beta} - \vec{\alpha}_\perp))$ определена формулой (4) при значении аргументов $\vec{r}_1 = \vec{r}_s$ и $\vec{\chi}_1 = k(\vec{\beta} - \vec{\alpha}_\perp)$, а $\tilde{W}(\vec{\chi}_1) = \frac{1}{2} [\tilde{W}_+(\vec{\chi}_1) + \tilde{W}_-(\vec{\chi}_1)]$ – симметричный энергетический спектр [10].

Формула (45) обобщает подобную формулу (60) из работы [9], посвященной исследованию обратного рассеяния излучения точечного источника, на рассматриваемый вариант двухпозиционного рассеяния и может быть получена при использовании “упрощающей” гипотезы (ср. [3], с. 105, формула (11)).

“Малая” площадка

Для этого случая будем считать выполненным условие (30). Тогда в качестве парциальных интенсивностей рассеяния $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$ можно взять выражение (28), а пределы интегрирования по χ_{1x}, χ_{1y} положить бесконечными в силу быстрого убывания диаграммных множителей:

$$B(0) \equiv 4S^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_{1x} d\chi_{1y} |f_2(\vec{r}_c; \vec{\chi}_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}_1) \times \frac{\sin^2 X_x}{X_x^2} \frac{\sin^2 X_y}{X_y^2}, \quad (46)$$

где аргументам X_x и X_y можно придать вид

$$X_x = \frac{\Delta x}{2} (\chi_{1cx} - \chi_{1x}), \quad (47)$$

$$X_y = \frac{\Delta y}{2} (\chi_{1cy} - \chi_{1y}), \quad (48)$$

причем $\vec{\chi}_{1c} = k(\vec{\beta} - \vec{\alpha}_\perp)$, ($\beta_{cy} = 0$).

Если пространственный спектр $\tilde{W}(\vec{\chi}_1)$ – медленно меняющаяся функция в пределах главных лепестков диаграммных множителей, его можно вынести из под знака интеграла при значении $\vec{\chi}_1 = \vec{\chi}_{1c}$ вместе с $|f_2(\vec{r}_c; \vec{\chi}_1)|^2 \approx |f_2(\vec{r}_c; \vec{\chi}_{1c})|^2$. В этом случае соответствующие масштабы малого изменения $\tilde{W}(\vec{\chi}_1)$ в пространстве волновых векторов составляют $|\Delta\chi_{1x}| \geq \frac{2\pi}{\Delta x}$, $|\Delta\chi_{1y}| \geq \frac{2\pi}{\Delta y}$. Если в предыдущем и настоящем случаях k, R_c, z_2 одинаковы, а существенно различаются лишь размеры $\Delta x, \Delta y$, то отношение значений масштабов $|\Delta\chi_{1x}|, |\Delta\chi_{1y}|$ предыдущего случая “большой”

площадки к значениям для “малой” меньше либо равны соответственно $\frac{\Delta x}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{R_c}} \frac{z_2}{R_c} \ll \frac{2}{\pi}$ и $\frac{\Delta y}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{R_c}} \ll \frac{2}{\pi}$.

Оставшийся интеграл от диаграммных сомножителей является табличным и равным π^2 (см [1], стр. 431).

В результате получим выражение

$$B(0) \equiv \frac{\sigma^2}{8} \frac{[\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_{1c}; \vec{R}_{0c})]^2 [\tilde{J}_{12}(\vec{R}_{2c})]^2}{R_{0c}^2 R_{2c}^2} \tilde{W}(\vec{\chi}_{1c}) S, \quad (49)$$

которое обобщает формулу (64) из [9] на случай двухпозиционного рассеяния и может быть получено с помощью “упрощающей” гипотезы ([3], с. 94, формула (16)).

9. Скользящее рассеяние

“Большая” площадка

Пренебрегая вкладом переходной зоны на границе “свет–тень”, выражение для $B(0)$ можно записать в виде

$$B(0) \equiv 4 \frac{2\pi R_{2c}}{k} (\Delta x)^2 \times \int_{\chi_{1l}}^{\chi_{1u}} d\chi_{1y} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_{1x} |f_2(x_c, y_1; \vec{\chi}_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}_1) \frac{\sin^2 X_x}{X_x^2}, \quad (50)$$

где X_x определено формулами (33), (34), а

$$\chi_{1l} = \left(-\alpha_y - \frac{\Delta y}{2R_{2c}} \right), \quad \chi_{1u} = \left(-\alpha_y + \frac{\Delta y}{2R_{2c}} \right).$$

При этом предполагается, что вблизи переходной зоны $\tilde{W}(\vec{\chi}_1)$ – медленно меняющаяся функция переменной χ_{1y} .

Если $\tilde{W}(\vec{\chi}_1) |f_2(x_c, y_1; \vec{\chi}_1)|^2$ мало меняется с изменением χ_{1x} в пределах нескольких осцилляций “диаграммного множителя” вблизи главного максимума χ_{1cx} , его можно вынести из под знака интегрирования, приравняв значению в точке χ_{1cx} , и в результате

$$B(0) \equiv \frac{16\pi^2 R_{2c} \Delta x}{k} \int_{\chi_{1l}}^{\chi_{1u}} d\chi_{1y} |f_2(x_c, y_1; \vec{\chi}_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}_1) \Big|_{\chi_{1x} = \chi_{1cx}}, \quad (51)$$

где

$$\chi_{1cx} = k(\beta_{cx} - \alpha_x). \quad (52)$$

Используя связь $\bar{\chi}_1$ с $\bar{\beta}_s$, даваемую формулами (10) и (16), в виде $\chi_{1y} = -k\left(\alpha_y + \frac{y_1}{R_{2c}}\right)$, перейдем в (51) к интегрированию по y_1 :

$$B(0) \cong \frac{\sigma^2}{8} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy_1 \frac{|\tilde{J}_{01}(\bar{\chi}_1)|^2 |J_{12}|^2}{R_{0c}^2 R_{2c}^2} \tilde{W}(\bar{\chi}_1) \Bigg|_{\substack{\chi_{1x}=\chi_{1cx} \\ \chi_{1y}=y_1}}. \quad (53)$$

Эта формула обобщает на рассматриваемый случай двухпозиционного рассеяния формулу (66) из работы [9]. Более наглядно это можно увидеть, если ввести полярную систему координат в точке наблюдения, $y_1 = R_{2c} \operatorname{tg} \varphi$, $dy_1 = (R_{2c}/\cos^2 \varphi) d\varphi$, и воспользоваться малостью угла φ .

“Малая” площадка

В качестве $|f_1(\bar{\chi}_1)|^2$ в этом случае следует взять выражение (44). Подставив его в (2), получим

$$B(0) \cong 4S^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_{1x} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_{1y} |f_2(x_c, y_1; \bar{\chi}_1)|^2 \times \\ \times \tilde{W}(\bar{\chi}_1) \frac{\sin^2 X_x}{X_x^2} \frac{\sin^2 X_y}{X_y^2}, \quad (54)$$

где величина X_x определена формулами (33), (34), а X_y – формулой (43).

В силу малости углов рассеяния ($y_1/R_{2c} \ll 1$) можно положить $y_1 \approx y_c$ в $|f_2(x_c, y_c; \bar{\chi}_1)|^2$. Для достаточно широкополосного спектра $\tilde{W}(\bar{\chi}_1)$, мало меняющегося на протяжении нескольких осцилляций “диаграммных множителей”, можно положить $\tilde{W}(\bar{\chi}_1) \cong \tilde{W}(\bar{\chi}_{1c})$ и вынести эту величину за знак интеграла. В результате получим

$$B(0) \cong \frac{\sigma^2}{8} \frac{|\tilde{J}_{01}|^2 |J_{12}|^2}{R_{0c}^2 R_{2c}^2} \tilde{W}(\bar{\chi}_{1c}) S, \quad (55)$$

где $\bar{\chi}_{1c} = k(\bar{\beta}_c - \bar{\alpha}_\perp)$, ($\beta_{cy} = 0$). Нижний индекс “c” соответствует выбору $\bar{r}_1 = \bar{r}_c$, $\bar{\chi}_1 = \bar{\chi}_{1c}$.

В таком виде формула (55) является обобщением формулы (67) из [9] на рассматриваемый случай двухпозиционного рассеяния.

10. Частотный спектр $S(\omega)$

Для закона дисперсии [10] поверхностных гравитационных волн на глубокой воде, $\omega_1(\chi_1) = \sqrt{g\chi_1}$, где g – ускорение силы тяжести, δ -функция в формуле (8) равна

$$\delta[\Delta\omega - j\omega_1(\chi_1)] = \frac{2\sqrt{2k\chi_{1s}}}{\omega_{Br}} \delta(\chi_1 - \chi_{1s}). \quad (56)$$

Здесь $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $j = \operatorname{sign} \Delta\omega$, $\omega_{Br} = \sqrt{2gk}$ – брэгговская частота, а $\chi_{1s} = 2k\xi_0^2 \cong 2k(\Delta\omega/\omega_{Br})^2$ – нуль δ -функции.

Имея это в виду, перейдем к вычислению $S(\omega)$ для конкретных случаев.

11. Нескользящее рассеяние

“Большая” площадка

Если пренебречь вкладом в рассеяние от стационарных точек \bar{r}_s вне освещенной площадки S , то, подобно выводу формулы (45), можно перейти от интегрирования по $\bar{\chi}_1$ к интегрированию по \bar{r}_s , используя связь (16), (17) между $\bar{\beta}$ и \bar{r}_s :

$$S(\omega_0 + \Delta\omega) \approx 8\pi^2 \int_S d^2\bar{r}_s \left| f_2(\bar{r}_s; k(\bar{\beta} - \bar{\alpha}_\perp)) \right|^2 \times \\ \times \tilde{W}_j(k(\bar{\beta} - \bar{\alpha}_\perp)) \delta[\Delta\omega - j\omega_1(\chi_1)]. \quad (57)$$

В таком виде эта формула может быть получена и с помощью упрощающей гипотезы (ср. [3], с. 139, формула (1б)). Следует помнить, что выражение (57) отвечает частотам, формируемым внутренними стационарными точками, достаточно удаленными от границ освещенной области S .

“Малая” площадка

Аналогично выводу формулы (46) продолжим значения $f_1(\chi_1)$ из (24) на все значения $\bar{\chi}_1$, что означает переход к приближению фраунгоферовой дифракции (формула (28)). С учетом выражения (56) для δ -функции получим:

$$S(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{2\sqrt{2k\chi_{1s}}}{\omega_{Br}} S^2 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 |f_2(\bar{r}_c; \bar{\chi}_1)|^2 \tilde{W}_j(\bar{\chi}_1) \times$$

$$\times \frac{\sin^2 X_x}{X_x^2} \frac{\sin^2 X_y}{X_y^2} \Big|_{\chi_1=\chi_{1s}} \quad (58)$$

Подставив сюда выражение (4) для $f_2(\vec{r}_1; \vec{\chi}_1)$ приведем (58) к виду

$$S(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{\sigma^2}{16\pi^2} \frac{k^2 |\xi_0^3|}{\omega_{Br}} S^2 \times \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \frac{|J_{12}|^2 |\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1)|^2}{R_{0c}^2 R_{2c}^2} \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \frac{\sin^2 X_x}{X_x^2} \frac{\sin^2 X_y}{X_y^2} \Big|_{\chi_1=\chi_{1s}} \quad (59)$$

Эта формула обобщает на случай двухпозиционного рассеяния формулу (71) из работы [9], посвященной обратному рассеянию.

Последняя, к сожалению, содержит опечатки, что можно установить из сравнения с настоящей формулой (59).

12. Скользящее рассеяние

“Большая” площадка

Пренебрегая вкладом в рассеяние от стационарных точек y_s за пределами освещенной области S , продолжим $f_1(\vec{\chi}_1)$ за пределы S нулевыми значениями. Для этого умножим $f_1(\vec{\chi}_1)$ в (41) на функцию единичной ступеньки (функцию Хевисайда) $U\left(\frac{\Delta y}{2} - |y_s|\right)$, равную 1, если аргумент ≥ 0 , и нулю, если аргумент < 0 .

Формула (8) при этом будет иметь следующий вид:

$$S(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{2\pi R_{2c}}{k} (\Delta x)^2 \int_0^\infty d\chi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \chi_1 |f_2(x_c, y_s; \vec{\chi}_1)|^2 \times \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \frac{\sin^2 X_x}{X_x^2} U\left(\frac{\Delta y}{2} - |y_s|\right) \delta[\Delta\omega - j\omega_1(\chi_1)], \quad (60)$$

где величина X_x определена формулой (33) при $y_1 = y_s$, а y_s связана с $q_y = \chi_{1y}/k$ формулой (36). Выполнив интегрирование по χ_1 , получим

$$S(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{16\pi R_{2c} (\Delta x)^2 k |\xi_0^3|}{\omega_{Br}} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 |f_2(x_c, y_s; \vec{\chi}_1)|^2 \times$$

$$\times \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \frac{\sin^2 X_x}{X_x^2} \frac{\sin^2 X_y}{X_y^2} U\left(\frac{\Delta y}{2} - |y_s|\right) \Big|_{\vec{\chi}_1=\vec{\chi}_{1s}}, \quad (61)$$

где $\vec{\chi}_{1s} = (\chi_{1s} \cos \varphi_1, \chi_{1s} \sin \varphi_1)$. Напомним, что $\chi_{1s} = 2k |\xi_0^2| \equiv 2k (\Delta\omega/\omega_{Br})^2$ – корень δ -функции в равенстве (56).

“Малая” площадка

В этом случае из-за быстрого убывания диаграммных множителей в (44) допустимы практически любые значения $\vec{\chi}_1$ (в том числе отвечающие точкам $|y_s| \gg \Delta y/2$). По этой же причине можно положить $f_2(x_c, y_s; \vec{\chi}_1) \approx f_2(x_c, y_c; \vec{\chi}_1)$. В результате для спектра получаем

$$S(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{8k^2 |\xi_0^3|}{\omega_{Br}} S^2 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 |f_2(\vec{r}_c; \vec{\chi}_1)|^2 \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \times \frac{\sin^2 X_x}{X_x^2} \frac{\sin^2 X_y}{X_y^2} \Big|_{\vec{\chi}_1=\vec{\chi}_{1s}} \quad (62)$$

Связь между χ_{1s} , $(\chi_{1y})_s$, y_s и X_x та же, что и в выражении (61), а величина X_y определена формулой (43).

В выражениях (59) и (62) несложно проследить переход к обратному рассеянию, исследованному в работе [9]. В этом случае входящие в формулу (5) величины определяются при $R_{0c} = R_{2c}$, $\beta_{xc} = -\alpha_x$, $\beta_{yc} = \alpha_y = 0$.

13. Обсуждение результатов

Применимость полученных в работе результатов ограничена по ряду причин. Одна из них – приближенный характер используемого асимптотического метода стационарной фазы, что уже обсуждалось в предыдущем исследовании [9]. Вторая – невозможность определить в аналитическом виде равномерные асимптотики всюду с учетом наличия произвольно расположенных областей каустической и геометрической тени. Из-за этого анализ проведен в приближении дифракции Френеля для ситуаций, когда вкладом в рассеяние от стационарных точек, принадлежащим этим областям, можно пренебречь. Для интенсивности $B(0)$ поля, рассеянного “большой” площадкой, такой расчет приводит к относительной погрешности порядка

отношения площади переходной пограничной зоны ко всей площади S .

В случае спектра $S(\omega_0 + \Delta\omega)$, который формируется одномерным множеством стационарных точек (из-за наличия δ -функции в равенстве (8)), ситуация сложнее. Для определенных частот $\Delta\omega$ и геометрии задачи такое множество может состоять из точек пограничной или теневой зоны, вклад которых в рассеяние формулами (57) и (61) не учтен. Впрочем автором и не ставилось в качестве основной цели более точное определение $B(0)$ и $S(\omega_0 + \Delta\omega)$, учитывая довольно академический характер постановки задачи (выбор падающей волны, специальной геометрии площадки и т. п.).

Целью исследования являлось получение решения, позволяющего выяснить физический механизм формирования рассеянного поля и оценить степень достоверности существующих в литературе расчетов, в основе которых лежат достаточно противоречивые предположения. При этом соответствие с расчетами в приближении дифракции Фраунгофера для случая “малой” площадки подразумевалось в качестве основного тестового требования к искомому решению. В определенной степени эта цель была достигнута.

Механизм формирования рассеянного поля прослеживается по ходу проведенных вычислений. Структура формулы (3) указывает на то, что статически независимыми рассеивателями являются не элементы $d^2\vec{r}$ площадки (как это считает А. Исимару [7], с. 218), а фурье-компоненты случайного поля неровностей (“случайные” синусоидальные решетки), что является следствием теоремы Винера–Хинчина для однородного и стационарного случайного поля, положенной в основу вывода формулы (3). Величину $|f_1(\vec{\chi}_1)|^2$ можно назвать “парциальной” интенсивностью рассеяния на “случайной” решетке с волновым вектором $\vec{\chi}_1$ и статическим весом $\tilde{W}_\pm(\vec{\chi}_1)$.

“Деструктивная” интерференция (по терминологии авторов [1] (см. с. 421)) приводит к тому, что величина интеграла (3) от осциллирующей функции при рассеянии “большой” площадкой определяется небольшой окрестностью точки \vec{r}_s , где осцилляции фазы $\Phi(\vec{r}_1)$ минимальны, т. е. окрестностью стационарной точки. “Эффективной” площадью этой окрестности согласно формуле (П2) является произведение $|h_{xs}| |h_{ys}|$ соответствующим

размеров зоны Френеля $|h_{xs}| \approx \sqrt{\frac{2R_c}{k}} \frac{R_c}{z_2}$ и $|h_{ys}| \approx \sqrt{\frac{2R_c}{k}}$. Положение \vec{r}_s стационарной точки вне каустик согласно уравнению стационарности (10) и формулам (16), (17) однозначно определяется волновым вектором “решетки” $\vec{\chi}_1$. Тем самым при определенных условиях (см. вывод формул (45), (57)) “парциальную” интенсивность $|f(\vec{\chi}_1)|^2$ можно привязать к элементу площади $d^2\vec{r}_s$ рассеивающей площадки S и прийти к формулам, получаемым с использованием “упрощающей” гипотезы ([3], с. 104), о которой речь шла во Введении.

Приложение

Если воспользоваться методом последовательного асимптотического интегрирования ([12], с. 33), то главный член асимптотики двойного интеграла

$$I_2 = \int_{y_l}^{y_u} dy \int_{x_l}^{x_u} dx f(x, y) e^{i\Phi(x, y)} \quad (\text{П1})$$

можно записать в виде

$$I_2 \approx e^{i\Phi_s} f(x_s, y_s) h_{xs} \Delta Q_x h_{ys} \Delta Q_y, \quad (\text{П2})$$

где $\Phi_s = \Phi(x_s, y_s)$ – значение фазы в стационарной точке (x_s, y_s) , произвольно расположенной относительно контура интегрирования. В формуле (П2) использованы обозначения:

$$h_{xs} = e^{-i\epsilon_{xx}\pi/4} \sqrt{2/|\Phi''_{xx}|_s}, \quad (\text{П3})$$

$$h_{ys} = e^{-i\epsilon_{yy}\pi/4} \sqrt{2|(\Phi''_{xx})/H|_s};$$

$$\Delta Q_x = Q(\hat{\mu}_{xl}) - Q(\hat{\mu}_{xu}), \quad (\text{П4})$$

$$\Delta Q_y = Q(\hat{\mu}_{yl}) - Q(\hat{\mu}_{yu});$$

$$\hat{\mu}_{xl} = e^{i\epsilon_{xx}\pi/4} \mu_{xl}, \quad (\text{П5})$$

$$\mu_{xl} = \text{sign}(x_l - x_s) \sqrt{|\Phi_s - \Phi_{(x_l, y_s)}|};$$

$$\hat{\mu}_{yl} = e^{i\epsilon_{yy}\pi/4} \mu_{yl}, \quad (\text{П6})$$

$$\mu_{yl} = \text{sign}(y_l - y_s) \sqrt{|\Phi_s - \Phi_{(x_s, y_l)}|}.$$

Выражения для $\hat{\mu}_{xu}$, $\hat{\mu}_{yu}$ получаются из (П5), (П6) соответственно заменой $x_l \rightarrow x_u$, $y_l \rightarrow y_u$. Величины H , ϵ_{xx} , ϵ_{yy} определены ранее формулами (19), (21). Величина $Q(\hat{\mu})$ является дополнением интеграла вероятности,

$$Q(\hat{\mu}) = \int_{\hat{\mu}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - \text{erf} \hat{\mu}). \quad (\text{П7})$$

Поскольку модули переменных $\hat{\mu}_{xl}$, $\hat{\mu}_{xu}$ являются квадратными корнями модулей разностей фаз в точках x_s , x_l и x_s , x_u , естественно выбрать $|\hat{\mu}_{xu} - \hat{\mu}_{xl}|$ в качестве меры величины площадки в направлении оси Ox , а $|\hat{\mu}_{yu} - \hat{\mu}_{yl}|$ – в направлении оси Oy .

Величины $|h_{xs}|$ и $|h_{ys}|$ являются эффективными размерами области интегрирования по соответствующей переменной, x либо y , формирующей асимптотическое значение интеграла по этой переменной. В общем случае произвольных значений аргументов ΔQ_x и ΔQ_y можно выразить через интегралы Френеля (см. [9]; [1], с. 465).

Если точка x_s из освещенной области достаточно удалена от концов интервала $[x_l, x_u]$ “большой” площадки ($|\mu_{xl}| \gg 1$, $|\mu_{xu}| \gg 1$), то можно положить $\Delta Q_x \approx \sqrt{\pi}$, если же x_s приближается к одному из концов, оставаясь в пределах $[x_l, x_u]$, то $\Delta Q_x \approx \sqrt{\pi}/2$. Далеко в области тени $|\Delta Q_x| \approx (2|\mu_{xl}|)^{-1}$ либо $|\Delta Q_x| \approx (2|\mu_{xu}|)^{-1}$ соответственно (см. [9]).

Случай “малой” площадки ($|\mu_{xl}|, |\mu_{xu}| \ll 1$) требует более детального рассмотрения, на котором остановимся ниже, предварительно проследив предельные переходы в формуле (П2) к известным результатам.

Предельные переходы в формуле (П2)

1. Точка (x_s, y_s) – внутренняя для “большой” площадки ($|\mu_{xl}|, |\mu_{yl}|, |\mu_{xu}|, |\mu_{yu}| \gg 1$), тогда $\Delta Q_x \approx \sqrt{\pi}$, $\Delta Q_y \approx \sqrt{\pi}$, и формула (П2) принимает вид

$$I_2 \approx \frac{2\pi}{\sqrt{H}} e^{i[\Phi_s - (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})\pi/4]} f(x_s, y_s). \quad (\text{П8})$$

В зависимости от комбинации знаков ϵ_{xx} , ϵ_{yy} и $H = [\Phi''_{xx}\Phi''_{yy} - (\Phi''_{xy})^2]_s$ выражение (П8) переходит в одну из трех форм формулы (21) на с. 824 моно-

графии [1]. В нашем конкретном случае, $\epsilon_{xx} = -1$, $\epsilon_{yy} = -1$, $H > 0$, выражение (П8) соответствует случаю (1) вышеупомянутой формулы (см. также формулу (7.1) в препринте [12]).

2. Точка (x_s, y_s) находится вблизи границы “большой” площадки ($x_l \ll x_s \ll x_u$, $y_l \sim y_s \ll y_u$), тогда $\Delta Q_x \rightarrow \sqrt{\pi}$, $\Delta Q_y \approx Q(\hat{\mu}_{yl}) \approx \sqrt{\pi}/2$. В результате (П2) принимает вид

$$I_2 \approx 2\sqrt{\pi/|H|} e^{i\Phi_s} e^{-i(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})\pi/4} f(x_s, y_s) Q(\hat{\mu}_{ye}). \quad (\text{П9})$$

Если учесть разницу в форме представления интеграла Френеля, то полученное выражение (П9) отличается от формулы (8.4) на с. 39 в [12] множителем 2. Этот множитель авторами [12] был утерян в ходе предыдущих вычислений в формуле (8.2) на с. 38.

Вычисление формулы (П2) для “малой” площадки

Обратимся к вычислению ΔQ_x , ΔQ_y для “малых” площадок. Представим

$$\Delta Q_x = I_{lu} = I_{lc} + I_{cu}, \quad \Delta Q_y = I_{lu} = I_{lc} + I_{cu},$$

где (с учетом знаков ϵ_{xx} , ϵ_{yy})

$$I_{lu} = e^{-i\pi/4} \int_{\mu_l}^{\mu_u} e^{i\mu^2} d\mu, \quad I_{lc} = e^{-i\pi/4} \int_{\mu_l}^{\mu_c} e^{i\mu^2} d\mu,$$

$$I_{cu} = e^{-i\pi/4} \int_{\mu_c}^{\mu_u} e^{i\mu^2} d\mu.$$

Здесь μ_l, μ_c, μ_u это $\mu_{xl}, \mu_{xc}, \mu_{xu}$, определяемые для ΔQ_x формулой (П5) и соответственно $\mu_{yl}, \mu_{yc}, \mu_{yu}$, определяемые для ΔQ_y формулой (П6).

Ввиду малости интервалов интегрирования интегралы можно вычислить приближенно, сделав замены: $\mu = \mu_c + A_1\xi$, $d\mu = A_1 d\xi$, $\mu^2 \approx \mu_c^2 + 2A_1\xi + \dots$, $A_1 = \mu_l - \mu_c$ для I_{lc} и $\mu = \mu_c + A_2\xi$, $d\mu = A_2 d\xi$, $\mu^2 \approx \mu_c^2 + 2A_2\xi + \dots$, $A_2 = \mu_u - \mu_c$ для I_{cu} . В результате получим:

$$I_{lc} \approx -e^{-i\pi/4} A_1 e^{i(B_1+C_1)} \frac{\sin C_1}{C_1},$$

$$I_{cu} \approx e^{-i\pi/4} A_2 e^{i(B_2+C_2)} \frac{\sin C_2}{C_2},$$

где $B_1 \equiv B_2 = \mu_c^2$, $C_1 = \mu_c A_1$, $C_2 = \mu_c A_2$.

Сложив I_{lc} и I_{cu} , получим

$$I_{lu} \approx e^{-i\pi/4} A e^{iB} \frac{\sin C}{C}, \quad (\text{П10})$$

где $A = \mu_u - \mu_l$, $B = \mu_c(\mu_u + \mu_l - \mu_c)$, $C = \mu_c A$.

Приняв во внимание (при $\beta_{cy} = 0$) выражение (18) для Φ_s , уравнение стационарности (10) и выражения для β_x и β_y в френелевском приближении (16) и (17), можно получить:

$$\Phi_s - \Phi(x, y_s) \approx -\frac{k}{2R_{2c}} \frac{z_2^2}{R_{2c}^2} (x_s - x)^2,$$

$$\Phi_s - \Phi(x_s, y) \approx -\frac{k}{2R_{2c}} (y_s - y)^2.$$

Если x – одно из значений $x_l = -\Delta x/2$, $x_c = 0$, $x_u = \Delta x/2$, а y – одно из значений $y_l = -\Delta y/2$, $y_c = 0$, $y_u = \Delta y/2$, то согласно формулам (П5, П6) им отвечают следующие значения μ_x и μ_y :

$$\mu_x = \text{sign}(x - x_s) \sqrt{\frac{k}{2R_{2c}} \frac{z_2}{R_{2c}} |x_s - x|},$$

$$\mu_y = \text{sign}(y - y_s) \sqrt{\frac{k}{2R_{2c}} |y_s - y|}.$$

Независимо от расположения x_s на оси Ox получаем:

$$A_x = \mu_u - \mu_l = \sqrt{\frac{k}{2R_{2c}} \frac{z_2}{R_{2c}} \Delta x}, \quad (\text{П11})$$

$$C_x = \mu_c A_x = -\frac{k}{2R_{2c}} \frac{z_2^2}{R_{2c}^2} x_s \Delta x, \quad (\text{П12})$$

$$B_x = \mu_c(\mu_u + \mu_l - \mu_c) = \frac{k}{2R_{2c}} \frac{z_2^2}{R_{2c}^2} x_s^2. \quad (\text{П13})$$

Аналогично для переменной y имеем:

$$A_y = \mu_u - \mu_l = \sqrt{\frac{k}{2R_{2c}} \Delta y}, \quad (\text{П14})$$

$$C_y = \mu_c A_y = -\frac{k}{2R_{2c}} y_s \Delta y, \quad (\text{П15})$$

$$B_y = \mu_c(\mu_u + \mu_l - \mu_c) = \frac{k}{2R_{2c}} y_s^2. \quad (\text{П16})$$

Из уравнений стационарности (10) следует:

$$-\frac{x_s}{R_{2c}} \frac{z_2^2}{R_{2c}^2} = \beta_{sx} - \beta_{cx} = \alpha_x + q_x, \quad -\frac{y_s}{R_{2c}} = \beta_{sy} = \alpha_y + q_y.$$

Поэтому

$$C_x = (k\Delta x/2)(\beta_{sx} - \beta_{cx}), \quad (\text{П17})$$

$$C_y = (k\Delta y/2)\beta_{sy}. \quad (\text{П18})$$

При этом, учитывая (18), (П13) и (П16),

$$\Phi_s + B_x + B_y = \Phi_c \equiv k(R_{oc} + R_{2c}). \quad (\text{П19})$$

Таким образом, для “малой” площадки

$$\Delta Q_x \approx e^{-i\pi/4} e^{iB_x} A_x \frac{\sin C_x}{C_x}, \quad (\text{П20})$$

$$\Delta Q_y \approx e^{-i\pi/4} e^{iB_y} A_y \frac{\sin C_y}{C_y}, \quad (\text{П21})$$

где $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y$ определены приведенными выше формулами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
2. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. – М.: Связь, 1978. – 248 с.
3. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
4. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
5. Valenzuela G. R. Scattering of Electromagnetic Waves From a Tilted Slightly Rough Surface // Radio Sci. – 1968. – Vol. 3, No. 11. – P. 1057–1066.
6. Barrick D. E. First Order Theory and Analysis of MF/VHF Scatter from the Sea // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1972. – Vol. AP-20, No. 1. – P. 2–10.
7. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах, т. 2. – М.: Мир, 1981. – 317 с.
8. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. III. Временная корреляционная функция и интенсивность в случае наклонного зондирования при однопозиционной локации // Радиофизика и радиоастрономия. – 2009. – Т. 14, № 3. – С. 304–313.
9. Брюховецкий А. С. Переход от ближней к дальней зоне в решении задачи обратного рассеяния волн статистически неровной поверхностью // Радиофизика и радиоастрономия. – 2010. – Т. 15, № 4. – С. 408–424.

10. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. – Л.: Гидрометеоздат, 1985. – 373 с.
11. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. I. Флуктуации поля // Радиопизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 399–409.
12. Анютин А. П., Боровиков В. А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя: Препр. / АН СССР. Ин-т радиотехники и электроники АН СССР; № 42 (414). – М.: 1984. – 53 с.

А. С. Брюховецкий

Институт радіофізики та електроніки
ім. А. Я. Усикова НАН України,
вул. Ак. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна

ПЕРЕХІД ВІД БЛИЖНЬОЇ ДО ДАЛЬНЬОЇ ЗОНИ У РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ СТАТИСТИЧНО НЕРІВНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Для випадку розсіяння плоскої хвилі статистично нерівною поверхнею знайдено асимптотики двократних інтегралів від осцилюючих функцій, що визначають часову кореляційну функцію розсіяного поля. Для кутів розсіяння значно більших від характерного кута френелівської зони використовується метод стаціонарної фази (МСФ). Для чисто ковз-

ного розсіяння – комбінований метод: МСФ для поперечної і наближення дифракції Фраунгофера для повздовжньої відносно площини розсіяння змінної. Встановлено зв'язок з відомими в літературі результатами розрахунків.

A. S. Bryukhovetski

A. Usikov Institute of Radio Physics and Electronics,
National Academy of Sciences of Ukraine,
12, Akad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

NEAR-TO-FAR ZONE TRANSITION IN THE PROBLEM OF PLANE WAVE SCATTERING BY STATISTICALLY ROUGH SURFACE

For a case of plane wave scattering by a statistically rough surface, the asymptotics of twofold integrals of oscillating functions which determine the time correlation function of the scattered field are found. At grazing angles much greater than the characteristic angle of the Fresnel zone, the method of stationary phase has been used for calculations. For grazing scattering, the combined method has been applied, namely, the method of stationary phase for the transverse (with respect to the scattering plane) variable and the Fraunhofer approximation for the longitudinal variable. The correlation with the results known from literature has been established.

Стаття постуила в редакцію 05.04.2012