

## Дисперсионные свойства отражательной решетки, заполненной метаматериалом

А. П. Кусайкин, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,  
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина  
E-mail: melezhhik@ire.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 5 сентября 2011 г.*

С помощью метода переразложения решена спектральная задача по определению постоянных распространения собственных  $TM$ -волн периодического волновода, образованного отражательной дифракционной решеткой с канавками прямоугольной формы, заполненными метаматериалом с отрицательным значением диэлектрической проницаемости. В широком диапазоне изменения параметров данного волновода проведено теоретическое исследование особенностей поведения дисперсионных зависимостей собственных волн. Установлено, что при изменении геометрических параметров решетки и характеристической частоты метаматериала возможно проявление режимов Брэгга.

**Ключевые слова:** метаматериал, периодический волновод, частотная дисперсия, брэгговское отражение, поверхностные и вытекающие волны

### 1. Введение

В последнее время в связи с развитием нанотехнологий большое внимание уделяется созданию композитных материалов, у которых эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости в микроволновом диапазоне могут принимать отрицательные значения [1-3]. Недавно Д. Р. Смит и другие [4, 5] создали такой композитный материал для микроволнового диапазона волн и экспериментально продемонстрировали эффект аномальной рефракции. Не меньший интерес вызывают искусственные материалы с одним отрицательным материальным параметром среды: либо диэлектрической, либо магнитной проницаемостью. Исследование электромагнитных свойств таких материалов в сочетании с различными периодическими структурами показало возможность резонансного поглощения энергии падающей на них плоской однородной волны [6-9]. Данный эффект послужил основой для поиска режимов резонансного излучения плоских волн дифракционной структурой,

содержащей метаматериал, при возбуждении ее электронным потоком [10, 11]. Такое резонансное поведение дифракционного поля обусловлено возбуждением собственных волн (колебаний) периодических структур, содержащих метаматериал. В этой связи представляет интерес исследование собственных режимов структур, не связанных с конкретным типом возбуждения.

Целью настоящей работы является изучение собственных волн и соответствующих им постоянных распространения периодического волновода, образованного дифракционной решеткой, канавки которой заполнены искусственным материалом с отрицательной эффективной диэлектрической проницаемостью. С одной стороны, получение информации об особенностях дисперсионных характеристик собственных волн позволит понять механизмы формирования резонансных эффектов, возникающих при возбуждении таких периодических структур, а с другой – оценить возможность их применения в фильтрующих и других частотно-разделительных устройствах [12].

## 2. Постановка и метод решения задачи

На рис. 1 представлена схема периодического волновода, образованного отражательной дифракционной решеткой с прямоугольными канавками, имеющей следующие геометрические параметры:  $l$  – период,  $d$  и  $h$  – ширина и глубина канавок соответственно.

Канавки решетки заполнены искусственным материалом, описанным в [13]. Для электромагнитных волн с зависимостью от времени  $\exp(-i\omega t)$  в квазистатическом приближении такой материал можно рассматривать как изотропную однородную среду с эффективной диэлектрической проницаемостью, описываемой хорошо известной формулой Друде

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (1)$$

где  $\omega_p$  и  $\nu$  – соответственно характеристическая (плазменная) частота и частота, отвечающая за потери в искусственном материале. В дальнейшем такой материал будем называть метаматериалом [14]. Кроме того, будем предполагать, что материал решетки является идеально проводящим металлом. Можно показать, что приближение “идеально проводящего металла” достаточно хорошо выполняется в частотном диапазоне  $\omega < \omega_p/\sqrt{2}$  при значении характеристической частоты метаматериала  $\omega_p/2\pi \leq 700$  ГГц.

Сформулируем двумерную задачу  $\left(\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0\right)$  на собственные волны такого периодического волновода, выбрав зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$ . В области вне отражательной ре-

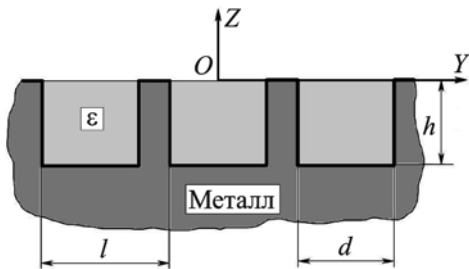


Рис. 1. Схема волновода

шетки требуется определить нетривиальные решения  $U(y, z)$  и соответствующие постоянные распространения  $\gamma$  однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 \bar{\epsilon}(z) U = 0, \quad (2)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $\bar{\epsilon}(z) = \begin{cases} \epsilon(\omega), & (-h < z < 0); \\ 1, & (z > 0). \end{cases}$  Эти решения должны удовлетворять условиям квазипериодичности

$$U(y+l, z) = \exp(i\gamma l) U(y, z), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U(y+l, z) = \exp(i\gamma l) \frac{\partial}{\partial y} U(y, z)$$

и излучения в полупространстве  $z > 0$

$$U(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left[i \frac{2\pi}{l} (\Phi_n y + \Gamma_n z)\right], \quad (4)$$

где  $\Phi_n = n + \Phi$ ,  $\Phi = \gamma l/2\pi$ ;  $\Gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - \Phi_n^2}$ ,  $\kappa = \omega l/2\pi c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме,  $R_n$  – неизвестные коэффициенты. Область изменения нормированной постоянной распространения  $\Phi$  совпадает с римановой поверхностью  $F$  аналитического продолжения с действительной оси  $\text{Im}(\Phi) = 0$  канонической функции Грина

$$G(y, z, y_0, z_0, \kappa, \Phi) = \frac{i}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n^{-1} \exp\left\{ \frac{i2\pi}{l} [\Phi_n (y - y_0) + \Gamma_n |z - z_0|] \right\},$$

где выполнено условие

$$\text{Im}(\Gamma_n) \geq 0, \quad \text{Re}(\Gamma_n) \geq 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

(подробнее см. [15], где приведено описание  $F$ ). Здесь ограничимся рассмотрением случая, когда нормированная постоянная распространения  $\Phi = \gamma l/2\pi$  изменяется на “физическом” листе римановой поверхности  $F$  [15].

Кроме условий (2)–(5), поля собственных волн должны удовлетворять граничным условиям на поверхности идеально проводящей решетки (равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля) и условиям непрерывности на границах раздела сред тангенциальных компонент электрического и магнитного полей.

Искомая функция  $U(y, z)$  совпадает с компонентой  $H_x$  магнитного поля в случае собственных  $TM$ -волн ( $E_x \equiv 0$ ) и с компонентой  $E_x$  электрического поля в случае собственных  $TE$ -волн ( $H_x \equiv 0$ ). В дальнейшем ограничимся исследованием собственных  $TM$ -волн. Случай  $TE$ -волн может быть исследован по аналогии.

Решение задачи (2)–(4) было получено с использованием метода переразложения [16]. Прежде всего, отметим, что из условия (3) следует возможность представить решение задачи (2)–(4) в виде

$$U(y, z) = \exp(i\gamma y) \bar{U}(y, z), \quad (6)$$

где функция  $\bar{U}(y, z)$  является периодической по  $y$  с периодом  $l$ .

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид:

$$U(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(z) \exp\left(i\Phi_n \frac{2\pi}{l} y\right). \quad (7)$$

Поскольку функция (7) должна удовлетворять уравнению (2) и условию излучения (4), получаем

$$U(y, z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left[i\frac{2\pi}{l}(\Phi_n y + \Gamma_n z)\right], & (z \geq 0); \\ 2 \exp(i\gamma q l) \sum_{m=0}^{\infty} T_m \exp\left(i\frac{2\pi}{l}\beta_m h\right) \times \\ \times \cos\left[\frac{2\pi}{l}\beta_m(h+z)\right] \cos\frac{\pi m}{d}\left(y - ql + \frac{d}{2}\right), & \\ \left(-h \leq z \leq 0, \quad |y - ql| < \frac{d}{2}\right). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $\beta_m = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon - (ml/2d)^2}$ ;  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – номера канавок решетки;  $R_n, T_m$  – подлежащие определению неизвестные коэффициенты. Отметим, что в представлении (8) учтено граничное условие – равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля на дне и боковых поверхностях канавок решетки.

Использование метода переразложения позволило получить однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $R_n$ . Условием существования нетривиальных решений является равенство нулю определителя матрицы этой системы, которое и является дисперсионным уравнением. Следовательно, те значения параметра  $\Phi = \gamma l/2\pi$ , при которых определитель обращается в нуль, и будут искомыми нормированными постоянными распространения. Эти значения параметра  $\Phi$  находились как корни определителя усеченной матрицы, т. е. бесконечная система уравнений заменялась конечной.

Коэффициенты  $R_n$  находились методом обратных итераций из усеченной однородной системы уравнений, а  $T_m$  определялись по следующей формуле:

$$T_m = \frac{4id}{\pi l [1 + \exp(4\pi i \beta_m h/l)]} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \frac{\Phi_n [\exp(-i\pi d \Phi_n/l) - (-1)^m \exp(i\pi d \Phi_n/l)]}{4d^2 \Phi_n^2/l^2 - m^2}, \quad (m = 0, 1, \dots).$$

Предложенный подход был реализован в виде численных алгоритмов на персональном компьютере. При расчете постоянных распространения собственных волн мы ограничились полосой  $0 \leq \text{Re}(\Phi) \leq 1$ . Сделать это позволяет следующее свойство периодических волноводов (см. [12, 15]): если  $\Phi$  – корень дисперсионного уравнения, то

$$\pm\Phi + n, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (9)$$

также является корнем данного уравнения.

### 3. Численные результаты

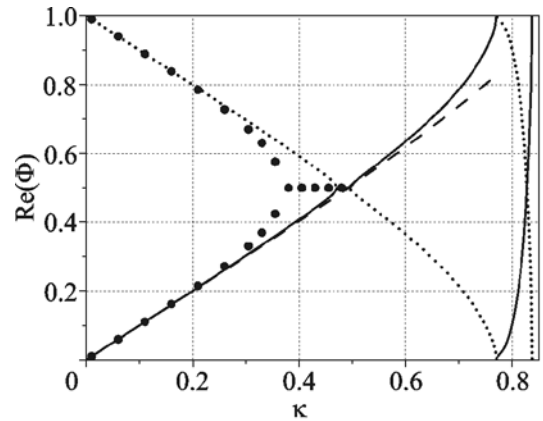
Приведенные ниже численные результаты, кроме специально указанных случаев, получены при нормированной характеристической частоте метаматериала  $\kappa_p = \omega_p l / 2\pi c = 1.2$  и  $\omega_p / 2\pi = 700$  ГГц, что соответствует периоду решетки  $l = 0.514$  мм. Предполагалось отсутствие потерь в метаматериале, т. е.  $\nu = 0$ . Расчеты дисперсионных зависимостей периодического волновода проводились в частотном диапазоне  $\kappa < \kappa_p / \sqrt{2}$ , где эффективная диэлектрическая проницаемость метаматериала принимает отрицательное значение и монотонно возрастает с ростом частоты (см. (1)).

На рис. 2, а, б изображены дисперсионные зависимости отражательной решетки, заполненной метаматериалом. Сплошными линиями обозначены дисперсионные кривые, выходящие из начала координат, пунктирными – линии, выходящие из точки  $\{\kappa = 0, \text{Re}(\Phi) = 1\}$ . Здесь же для сравнения представлены дисперсионные зависимости (кружочки), соответствующие поверхностным волнам решетки без метаматериала.

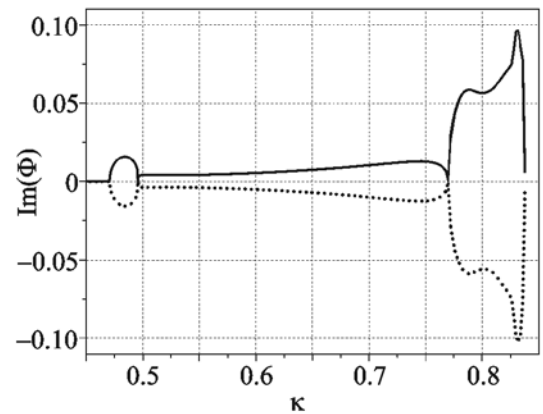
Во-первых, отметим, что в длинноволновой области ( $\kappa < 0.25$ ) дисперсионные зависимости решетки с метаматериалом практически совпадают с аналогичными зависимостями для решетки без заполнения (рис. 2, а).

Во-вторых, режим Брэгга первого порядка ( $\text{Re}(\Phi) = 0.5$ ) для решетки без метаматериала проявляется в диапазоне частот  $0.37 < \kappa < 0.5$ , тогда как у решетки с метаматериалом он начинает проявляться при больших частотах в диапазоне  $0.47 < \kappa < 0.49$ . Это указывает на то, что заполнение канавок решетки метаматериалом приводит к расширению частотного диапазона, в котором существует поверхностная волна периодического волновода, более чем на 25 %.

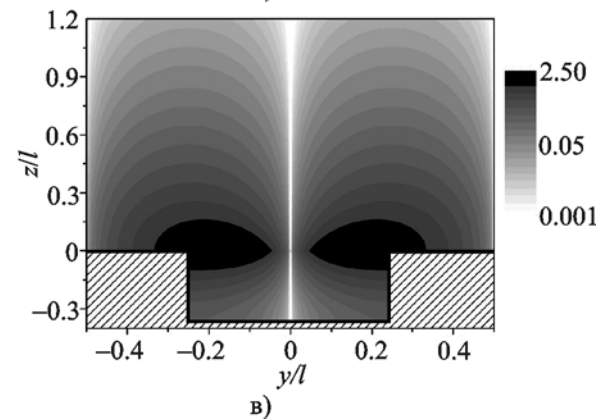
При увеличении частоты, начиная с  $\kappa \approx 0.47$ , постоянные распространения принимают комплексные значения. Исключение составляет частота  $\kappa \approx 0.77$ , при которой реальная часть постоянной распространения становится равной единице, а мнимая часть – нулю. Интересно отметить, учитывая свойство (9), что при этом значении частоты существует собственная волна с постоянной распространения, равной



а)



б)



в)

**Рис. 2.** Дисперсионные зависимости отражательной решетки при  $d/l = 0.5$ ,  $h/l = 0.37$  (кружочки –  $\epsilon = 1$ ) для  $\text{Re}(\Phi)$  (а) и  $\text{Im}(\Phi)$  (б) и линии равных значений  $|H_x|$  при  $\kappa = 0.77$ ,  $\Phi = 0$  (в)

нулю. Такое поведение дисперсионной зависимости является нетипичным для режима Брэгга ( $\text{Re}(\Phi) = 1$ ). На рис. 3, в, где представлено распределение модуля  $H_x$  компоненты ближнего поля при заданных параметрах волновода, видно наличие линий с  $|H_x| = 0$  (магнитные

стенки) при  $y/l = q/2$ ,  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – номера канавок решетки. Таким образом, при частоте  $\kappa = 0.77$  вместо режима Брэгга проявляется режим собственных колебаний – периодическая структура работает не как волновод, а как открытый резонатор.

Как показано в работе [7], открытая структура – периодическая ленточная решетка, расположенная на границе метаматериала, – в области частот  $\kappa \leq \kappa_p/\sqrt{2}$ , обладает бесконечным числом комплексных собственных частот с конечной точкой накопления  $\kappa = \kappa_p/\sqrt{2}$ . Этим частотам отвечают собственные колебания, амплитуды которых экспоненциально затухают во времени.

В случае исследуемого волновода при  $\kappa \rightarrow \kappa_p/\sqrt{2}$  дисперсионные кривые собственных волн асимптотически приближаются к линии  $\kappa = \kappa_p/\sqrt{2} \approx 0.85$ .

В том случае, когда выполняется условие  $|\kappa\sqrt{\epsilon}| \ll 1$ , дисперсионную зависимость поверхностной волны можно аппроксимировать приближенной формулой. Для ее получения достаточно воспользоваться результатом из [17] и заменить точные граничные условия на поверхности отражательной решетки с метаматериалом приближенным граничным условием импедансного типа, а именно:

$$E_y = wH_x, \quad \text{где} \quad w = -\frac{id}{l\sqrt{\epsilon}} \operatorname{tg}\left(2\pi\kappa\sqrt{\epsilon}\frac{h}{l}\right).$$

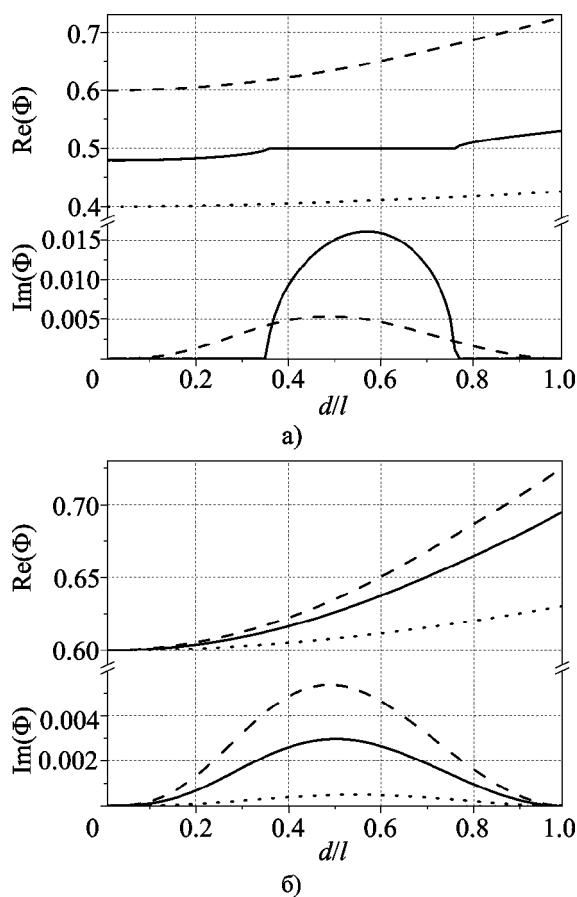
Используя это условие, легко получить зависимость постоянной распространения поверхностной волны от частоты следующего вида:

$$\operatorname{Re}(\Phi) = \kappa \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{(\kappa_p^2 - \kappa^2)} \left[ \frac{1 - \exp(-4\pi\kappa h/l)}{1 + \exp(-4\pi\kappa h/l)} \right]^2} (d/l)^2. \quad (10)$$

На рис. 2, а представлены результаты расчета согласно этой формуле (штриховая линия). Отметим, что дисперсионная зависимость (10) графически хорошо совпадает с дисперсионной

зависимостью (сплошная линия), полученной при точных граничных условиях, в длинноволновой области изменения  $\kappa$  вплоть до проявления первого режима Брэгга. Это говорит о возможности ее применения для инженерных расчетов при проектировании волноводов поверхностных волн с использованием метаматериала.

Рассмотрим результаты исследования спектральных зависимостей при изменении относительной ширины канавок решетки, изображенных на рис. 3. В частности, рис. 3, а представляет поведение этих зависимостей при постоянной глубине канавок решетки и различных частотах, рис. 3, б – при постоянной частоте и различной глубине канавок. Оси ординат на обоих



**Рис. 3.** Зависимости реальной и мнимой частей постоянной распространения от ширины канавок: а) –  $h/l = 0.37$ ;  $\kappa = 0.6$  (штриховая кривая),  $\kappa = 0.48$  (сплошная кривая),  $\kappa = 0.4$  (пунктирная кривая) и б) –  $\kappa = 0.6$ ;  $h/l = 0.37$  (штриховая кривая),  $h/l = 0.17$  (сплошная кривая),  $h/l = 0.07$  (пунктирная кривая)

рисунках разбиты на две части: верхняя –  $\text{Re}(\Phi)$ , нижняя –  $\text{Im}(\Phi)$ .

Обратим внимание на монотонность возрастания  $\text{Re}(\Phi)$  при увеличении ширины канавок решетки. При этом отметим, что значения  $\text{Re}(\Phi)$  при  $d/l=0$  (решетка превращается в плоскость) в точности равны частоте  $\kappa$ , что соответствует существованию поршневой волны [15]. Исключением из указанной монотонности является зависимость  $\text{Re}(\Phi)$  при  $\kappa=0.48$ , у которой проявляется режим Брэгга в достаточно широком интервале изменения ширины канавок,  $0.36 < d/l < 0.76$  (рис. 3, а). На наш взгляд, такое поведение постоянной распространения при изменении геометрического параметра решетки является необычным.

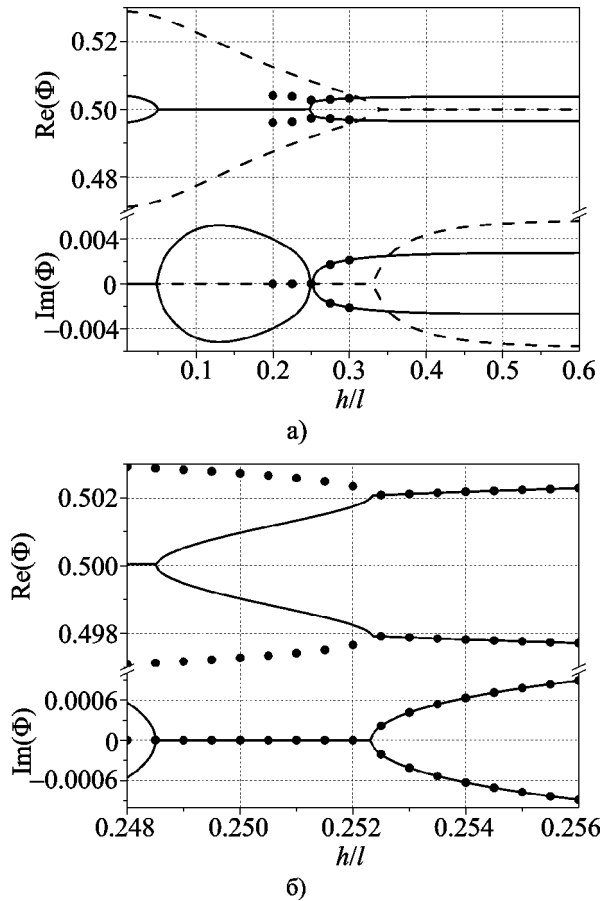
Отметим также слабую зависимость  $\text{Re}(\Phi)$  от  $d/l$  в длинноволновой части диапазона. Так, даже при  $\kappa=0.4$  изменение относительной ширины канавок решетки от 0 до 1 приводит к возрастанию  $\text{Re}(\Phi)$  всего на 2 % (рис. 3, а, пунктирная линия).

Перейдем к рассмотрению спектральных зависимостей от другого геометрического параметра периодического волновода – глубины канавок решетки, представленных на рис. 4. Рис. 4, б является увеличенным фрагментом рис. 4, а.

Первое, на что обратим внимание: с увеличением глубины канавок после значения  $h/l \approx 0.4$  практически наступает стабилизация спектральных зависимостей. Это явление обусловлено свойством метаматериала концентрировать электромагнитное поле у своей границы с открытым пространством. Таким образом, начиная с определенной глубины поле практически не достигает дна канавок.

Второе – так же как и в случае изменения ширины канавок решетки, изменение их глубины может приводить к проявлению режима Брэгга. Примером служат две зависимости при  $\kappa=0.471$  и  $\kappa=0.496$  – штриховая и сплошная линии соответственно (рис. 4, а). Причем если в случае  $\kappa=0.496$  брэгговский режим наблюдается в ограниченном интервале изменения  $0.05 < h/l < 0.2485$ , то при  $\kappa=0.471$  он проявляется при всех значениях  $h/l > 0.34$ , что обусловлено стабилизацией значений постоянной распространения с ростом  $h/l$ .

Отметим также, что, как и в случае изменения ширины канавок, спектральные зависимости



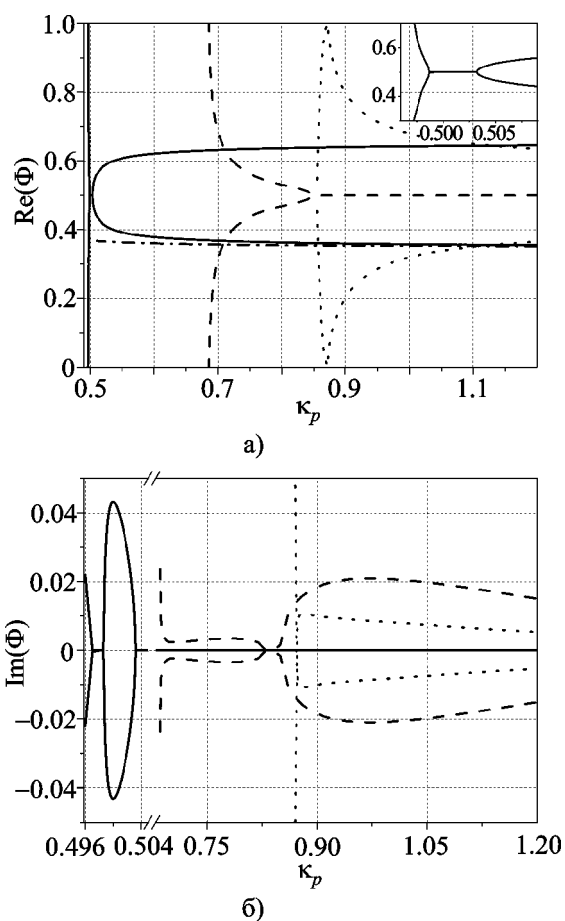
**Рис. 4.** Зависимость постоянных распространения от глубины канавок решетки: а) – при различных частотах  $\kappa=0.471$  (штриховая кривая),  $\kappa=0.496$  (сплошная кривая),  $\kappa=0.496$  (кружочки) и б) – увеличенный фрагмент при  $\kappa=0.496$  ( $d/l=0.5$ )

ти от их глубины начинаются при  $h/l=0$  из точек  $\Phi = \kappa$ .

Обратим внимание на линии на рис. 4, обозначенные кружочками. Эти зависимости получены при частоте  $\kappa=0.496$ , как и зависимости, изображенные сплошными линиями. Они также выходят из точек  $\Phi = \kappa$ , но уже при  $h/l=0.2$ , что соответствует  $h \approx \lambda$  ( $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве). На рис. 4, б эти зависимости представлены в увеличенном масштабе. При  $h/l \leq 0.2524$  у обеих зависимостей  $\text{Im}(\Phi)=0$ , а соответствующие им собственные волны являются поверхностными. В точке  $h/l=0.2524$  происходит вырождение по  $\Phi$ , а при  $h/l > 0.2524$  мнимые части постоянных распространения отличны от нуля

и имеют противоположный знак. Такое поведение спектральных зависимостей характерно для режима Брэгга. Однако в данном случае  $\text{Re}(\Phi) \neq 0.5$  и отсутствует характерная брэгговская “полочка”. Нами было проведено сравнение распределений  $|H_x|$  этих собственных волн при  $h/l = 0.25$ . Структура поля у обеих волн оказалась одинаковой.

Рассмотрим поведение спектральных зависимостей от характеристической частоты  $\kappa_p$  при различных значениях частотного параметра  $\kappa$ , представленных на рис. 5. Область изменения  $\kappa_p$  определялась неравенством  $\kappa_p > \kappa\sqrt{2}$ . В этом случае диэлектрическая проницаемость метаматериала  $\epsilon < -1$ .



**Рис. 5.** Зависимость реальной (а) и мнимой (б) частей постоянных распространения от относительной плазменной частоты при различных частотах ( $d/l = 0.5$ ,  $h/l = 0.37$ ):  $\kappa = 0.35$  (сплошная кривая),  $\kappa = 0.48$  (штриховая кривая),  $\kappa = 0.6$  (пунктирная кривая)

Характерным для поведения спектральных зависимостей при изменении характеристической частоты является то, что модуль  $|\text{Im}(\Phi)|$  резко возрастает с приближением  $\kappa_p$  к значению  $\kappa\sqrt{2}$ . Такое поведение спектральных характеристик определяется существованием точки накопления, о которой шла речь выше (см. комментарии к рис. 2). На рис. 5 для трех представленных кривых эти характерные значения плазменной частоты метаматериала составляют  $\kappa_p = 0.495; 0.679; 0.849$ .

Отметим, что на участке разрыва оси абсцисс  $0.505 < \kappa_p < 0.68$  значение  $\text{Im}(\Phi)$  равно нулю для собственной волны при  $\kappa = 0.35$  (рис. 5, б, сплошная линия).

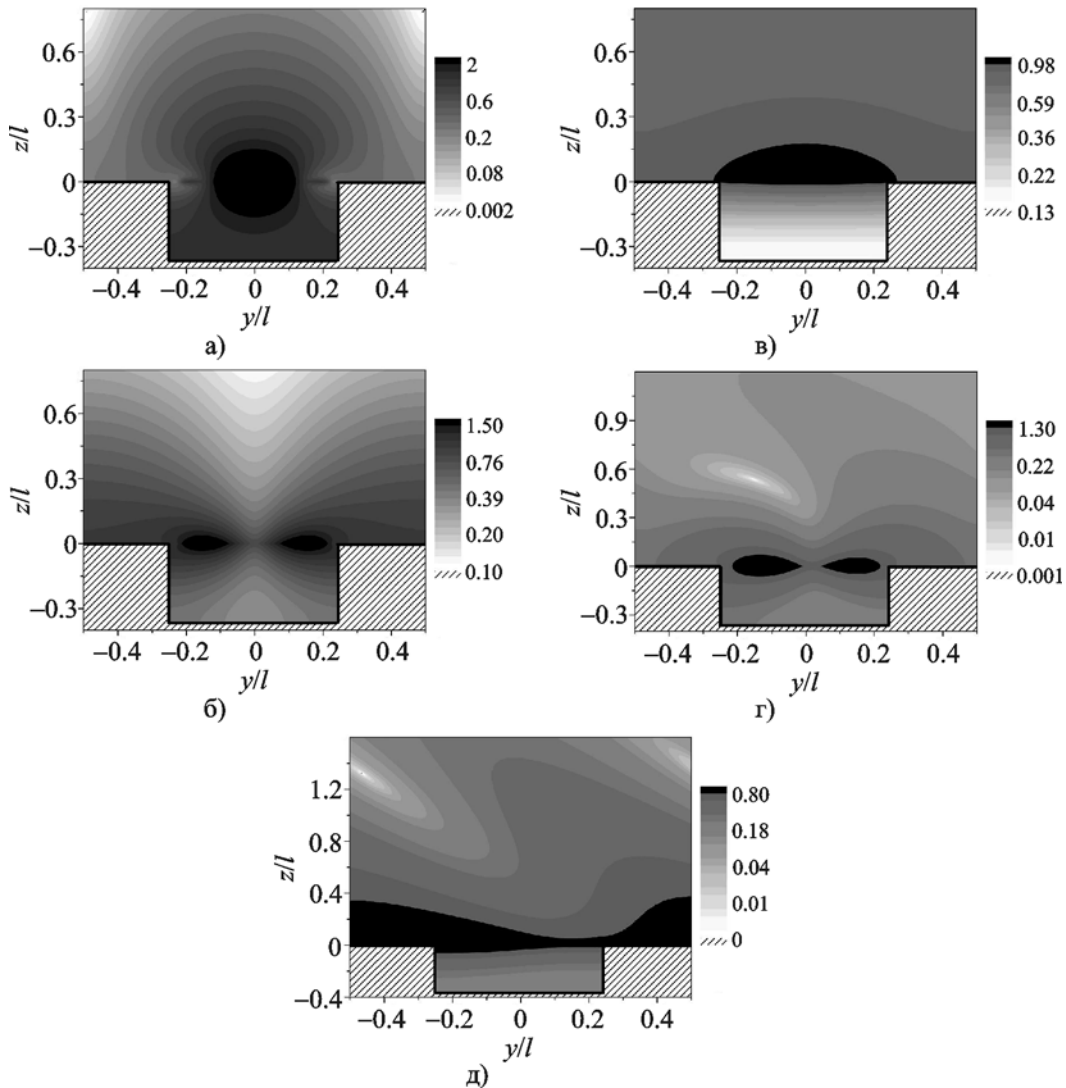
С увеличением плазменной частоты происходит стабилизация значений  $\text{Re}(\Phi)$ , а  $\text{Im}(\Phi)$  стремится к нулю. Кстати, именно в этом диапазоне изменения  $\kappa_p$  наблюдается хорошее графическое совпадение аппроксимационной зависимости (10) с зависимостью постоянной распространения поверхностной волны при  $\kappa = 0.35$  (рис. 5, а, штрихпунктирная линия).

В правом верхнем углу рис. 5, а показан фрагмент спектральной зависимости в малой окрестности  $\kappa_p > \kappa\sqrt{2}$  (сплошная линия –  $\kappa = 0.35$ ), где проявляется режим Брэгга.

Проявление этого режима возможно также и при больших значениях  $\kappa_p$  (штриховая линия –  $\kappa = 0.48$ ).

На наш взгляд, интересным является изменение распределения модуля  $H_x$ -компоненты электромагнитного поля собственных волн с возрастанием характеристической частоты, представленное на рис. 6 (черным цветом выделены области максимального значения модуля  $H_x$ ).

Первые три рисунка (рис. 6, а-в) построены для спектральной зависимости при  $\kappa = 0.35$ , соответствующей поверхностной волне ( $\text{Im}(\Phi) = 0$ ). Причем а) – в точке перед проявлением режима Брэгга, б) – сразу после него, в) – в конце рассматриваемого диапазона  $\kappa_p$ . Следующие два рисунка (рис. 6, г и д) демонстрируют распределение  $|H_x|$  для спектральной зависимости при  $\kappa = 0.6$ , соответствующей комплексной собственной волне ( $\text{Im}(\Phi) \neq 0$ ). Трансформация распределения поля собственных волн на этих рисунках очевидна: с увеличением плазменной частоты поле собственных волн практически не проникает в канавки решетки.



**Рис. 6.** Распределение модуля  $H_x$ -компоненты электромагнитного поля при изменении плазменной частоты ( $d/l = 0.5$ ,  $h/l = 0.37$ ): а) –  $\kappa = 0.35$ ;  $\kappa_p = 0.498$ ;  $\varepsilon = -1.03$ ;  $\Phi = 0.53$ ; б) –  $\kappa = 0.35$ ;  $\kappa_p = 0.504$ ;  $\varepsilon = -1.04$ ;  $\Phi = 0.48$ ; в) –  $\kappa = 0.35$ ;  $\kappa_p = 1.2$ ;  $\varepsilon = -10.76$ ;  $\Phi = 0.36$ ; г) –  $\kappa = 0.6$ ;  $\kappa_p = 0.875$ ;  $\varepsilon = -1.13$ ;  $\Phi = 0.7 - i0.0094$ ; д) –  $\kappa = 0.6$ ;  $\kappa_p = 1.2$ ;  $\varepsilon = -3.0$ ;  $\Phi = 0.36 - i0.0053$

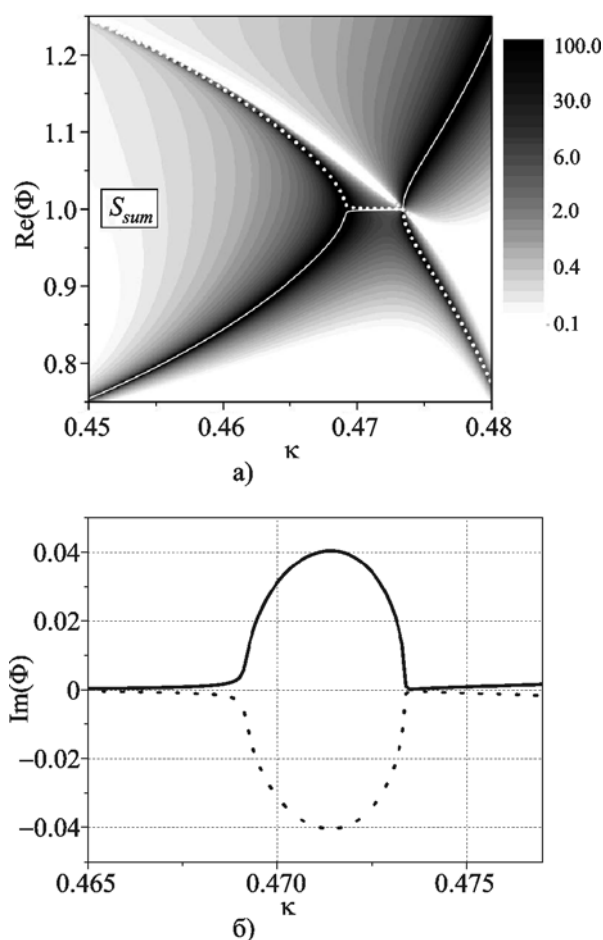
Перейдем к анализу связи результатов решения задачи на собственные волны периодического волновода и соответствующей ей задачи дифракции, взятых из работ [10, 11] и изображенных на рис. 7, а.

Здесь в координатах  $\{k, \text{Re}(\Phi)\}$  представлены линии равных значений нормированного потока излучаемой энергии  $S_{sum}$ , возбуждаемой модулированным электронным пучком. Канавки решетки, как и в нашей задаче, заполнены метаматериалом с аналогичными свойствами, а ось ординат на рис. 7, а пересчитана по формуле  $\text{Re}(\Phi) = \kappa/\beta$ , где  $\beta$  – от-

носительная скорость электронного пучка. На этот рисунок нанесены (сплошная и пунктирная белые линии) значения реальных частей постоянных распространения  $\text{Re}(\Phi)$  двух комплексных волн в диапазоне частот, где реализуется режим Брэгга второго порядка ( $\text{Re}(\Phi) = 1$ ), а их мнимые значения  $\text{Im}(\Phi)$  изображены на рис. 7, б.

Очевидным является хорошее графическое совпадение дисперсионных кривых с точками максимальных значений потока излучаемой энергии – область обозначенная черным цветом, где  $S_{sum}$  достигает значений в несколько





**Рис. 7.** Сравнение спектральных кривых с результатами задачи дифракции ( $d/l = 0.95$ ,  $h/l = 1.0$ ,  $\kappa_p = 0.7$ ;  $\nu = 10^{-4}$ ): а) –  $Re(\Phi)$ , б) –  $Im(\Phi)$

сотен единиц. Обратим внимание на то, что, с одной стороны, у дисперсионных кривых при подходе (слева) к началу брэгговского режима мнимые части постоянных распространения не равны нулю – именно в этой точке поток излучаемой энергии достигает максимального значения  $S_{sum} = 1470$  единиц. С другой стороны, в конце проявления режима Брэгга мнимые части равны нулю, и на графике задачи дифракции в этой точке полосу высоких значений потока энергии пересекает полоса его малых значений (белый цвет), где  $S_{sum} < 1$ .

На наш взгляд, данный результат является хорошей иллюстрацией важности решения задач о собственных волнах для понимания и предсказания эффектов, возникающих при взаимодействии электромагнитных волн с периодическими структурами.

#### 4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе в строгой электродинамической постановке решена задача о собственных волнах периодического волновода, образованного дифракционной решеткой, канавки которой заполнены метаматериалом.

Показано, что дисперсионные зависимости, соответствующие собственным волнам этого волновода, имеют сложный вид: диапазоны частот, отвечающие поверхностным волнам, чередуются с диапазонами, где существуют комплексные волны (режим Брэгга). Кроме того, установлено, что с приближением частоты к значению  $\omega_p/\sqrt{2}$  (где  $\epsilon = -1$ ) дисперсионные кривые асимптотически стремятся к прямой  $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ .

Проанализировано влияние изменения глубины канавок решетки на постоянные распространения собственных волн. Показано, что для некоторых значений частоты существуют диапазоны значений глубины канавок, где возникают комплексные волны с реальной частью нормированной постоянной распространения, принимающей постоянное значение,  $Re(\Phi) = 0.5$ , что характерно для брэгговского режима взаимодействия волн.

Рассмотрено также влияние изменения характеристической частоты метаматериала, заполняющего канавки решетки, на постоянные распространения собственных волн. При этом обнаружено, что при определенных значениях частоты возможно проявление режимов, характерных для взаимодействия Брэгга, а с приближением характеристической частоты к значению  $\omega_p = \omega\sqrt{2}$  модули мнимых частей постоянных распространения резко возрастают.

Проведенное сравнение результатов решения задачи на собственные волны и соответствующей задачи дифракции показало их хорошее совпадение, а также необходимость использования решений спектральной задачи для понимания резонансных эффектов, сопровождающих дифракционные процессы.

#### Литература

1. Pendry J. B., Holden A. J., Stewart W. J., and Youngs I. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76, No. 25. – P. 4773-4776.

2. Pendry J. B., Holden A. J., Robbins D. J., and Stewart W.J. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* – 1999. – Vol. 47, No. 11. – P. 2075-2084.
3. *Physics of Negative Refraction and Negative Index Materials* / C. M. Krowne, Y. Zhang Eds. – Springer, 2007. – 380 p.
4. Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., and Schultz S. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 84, No. 18. – P. 4184-4187.
5. Shelby R. A., Smith D. R., and Schultz S. Experimental verification of a negative index of refraction // *Science.* – 2001. – Vol. 292, No. 5514. – P. 77-79.
6. Kusaykin O. P., Melezhhik P. N., Poyedynchuk A. Ye., and Troschylo O. S. Absorbing properties of a negative permittivity layer placed on a reflecting grating // *Prog. Electromagn. Res.* – 2006. – Vol. PIER 64. – P. 135-148.
7. Brovenko A., Melezhhik P. N., Poyedinchuk A. Y., Yashina N. P., and Granet G. Surface resonances of metal stripe grating on the plane boundary of metamaterial // *Prog. Electromagn. Res.* – 2006. – Vol. PIER 63. – P. 209-222.
8. Kusaykin O. P., Melezhhik P. N., and Poyedynchuk A. Ye. Absorption of Waves by a Grating Filled with a Metamaterial with a Negative Dielectric Constant // *Telecomm. Radio Eng.* – 2007. – Vol. 66, No. 3. – P. 187-200.
9. Brovenko A., Melezhhik P. N., Poyedinchuk A. Y., Yashina N. P., and Granet G. Resonant scattering of electromagnetic wave by stripe grating backed with a layer of metamaterial // *Prog. Electromagn. Res. B.* – 2009. – Vol. 15. – P. 423-441.
10. Кусайкин А. П., Мележик П. Н., Поединчук А. Е. Эффект резонансного излучения электромагнитных волн дифракционной решеткой с метаматериалом // *Письма в ЖТФ.* – 2009. – Т. 35, вып. 1. – С. 26-34.
11. Кусайкин А. П., Мележик П. Н., Поединчук А. Е. Резонансное дифракционное излучение электромагнитных волн электронным пучком вблизи отражательной решетки с метаматериалом // *Радиофизика та електроніка.* – 2010. – Т. 15, №1. – С. 96-102.
12. Силин Р. А. Периодические волноводы. – М.: Фазис, 2002. – 252 с.
13. Wu D., Fang N., Sun C., and Zhang X. Terahertz plasmonic high pass filter // *Appl. Phys. Lett.* – 2003. – Vol. 83, No. 1. – P. 201-203.
14. Виноградов А. П., Дорофеенко А. В., Зухди С. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов // *Успехи физических наук.* – 2008. – Т. 178. – С. 511-518.
15. Шестопапов В. П., Сиренко Ю. К. Динамическая теория решеток. – Киев: Наук. думка, 1989. – 210 с.
16. Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1973. – 288 с.
17. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. – М.: Наука, 1966. – 240 с.

### Дисперсійні властивості відбивних ґрат, заповнених метаматеріалом

**О. П. Кусайкін, П. М. Мележик,  
С. Б. Панін, А. Ю. Поєдинчук**

За допомогою методу перерозкладення розв'язано спектральну задачу щодо визначення постійних поширення власних *TM*-хвиль періодичного хвилеводу, утвореного відбивними дифракційними ґратами з канавками прямокутної форми, заповненими метаматеріалом із негативним значенням діелектричної проникності. У широкому діапазоні зміни параметрів даного хвилеводу виконано теоретичне дослідження особливостей поведінки дисперсійних залежностей власних хвиль. Встановлено, що зі зміною геометричних параметрів ґратки та характеристичної частоти метаматеріалу є можливим прояв режимів Брегга.

### Dispersion Properties of Reflecting Grating Filled with Metamaterial

**O. P. Kusaykin, P. M. Melezhhik,  
S. B. Panin, and A. Y. Poyedynchuk**

Using the decomposition method, a spectral problem on determination the propagation constants of the *TM* eigenmodes of a periodic waveguide formed by the reflective diffraction grating with rectangular grooves filled with metamaterial that have negative dielectric constant is solved. In a wide range of the waveguide parameters a theoretical study of the dispersion characteristics behavior of eigenmodes is conducted. It is established that a change in the grating geometric parameters and the metamaterial characteristic frequency the Bragg effects may hold.