

# **Фокусировка излучения квазара в гравитационном поле микролинзы-звезды, находящейся в макролинзе-галактике.**

## **2. Структура изофот и усиление блеска видимого изображения источника излучения**

Л. А. Бердина, А. А. Минаков, В. Г. Вакулик<sup>1</sup>

*Радиоастрономический институт НАН Украины,  
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина  
E-mail: laberdina@gmail.com*

*<sup>1</sup>НИИ астрономии Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина,  
ул. Сумская, 35, г. Харьков, 61022, Украина*

*Статья поступила в редакцию 31 марта 2011 г.*

В приближениях методов Соболева и параксиальной оптики проведен анализ эффекта фокусировки сложной гравитационной линзы, образованной полями тяготения макролинзы-галактики и микролинзы-звезды. Найдены решения задачи при произвольном расположении микролинзы вдоль трассы источник – макролинза – наблюдатель. Построены изофоты изображений и рассчитан коэффициент усиления сложной линзы. Показано, что наибольшее влияние на эффект фокусировки микролинза оказывает в том случае, когда она расположена на участке трассы макролинза – наблюдатель. Полученные результаты могут быть использованы при решении обратной задачи восстановления параметров скрытой массы по наблюдениям эффекта микролинзирования.

**Ключевые слова:** микролинза-звезда, макролинза-галактика, квазар, метод Соболева, гравитационное микролинзирование, изофоты изображений, коэффициент усиления

### **1. Введение**

В задачах распространения электромагнитных волн в околоземном и космическом пространстве часто возникают ситуации, когда неоднородности среды имеют несколько пространственных масштабов. В качестве примера можно указать на такие структуры, как атмосфера и ионосфера Земли, корона Солнца, а также звездные скопления. Во всех перечисленных случаях необходимо учитывать как регулярную рефракцию лучей, вызываемую крупномасштабными неоднородностями, так и рассеяние волн на мелкомасштабных неоднородностях среды, случайным образом расположенных вдоль трассы распространения излучения. Представляют интерес исследования фокусирующих свойств таких сложных природных линзовых систем. В первой части работы (см. [1]) на основе ме-

тода Соболева в приближении параксиальной оптики было построено решение для поля в точке наблюдения, которое обобщает приближение многослойного фазового экрана на случай, когда между экранами находится еще и регулярная среда. Алгоритм построения решения был применен для решения задачи гравитационной фокусировки излучения квазара в поле тяготения массивной галактики (макролинзы), внутри которой находится микролинза-звезда. Найденные в [1] выражения соответствовали ситуации, когда микролинза случайным образом расположена на участке трассы между источником излучения – квазаром и макролинзой-галактикой. Во второй части работы основное внимание уделено построению решения задачи для случая, когда микролинза-звезда находится на участке трассы макролинза – точка наблюдения. Для

иллюстрации полученных в первой и во второй частях работы результатов построены изофоты и рассчитан коэффициент усиления блеска видимых изображений.

## 2. Определение функции взаимной когерентности

Ниже будем пользоваться обозначениями и определениями, введенными ранее в [1]. Начало системы координат  $O$  в рассматриваемой задаче помещаем в центр масс макролинзы-галактики. Ось  $Oz$  соединяет точку  $O$  и точку наблюдения  $P$  ( $z = Z_p$ ). Далеко позади макролинзы-галактики в плоскости  $z = -Z_s$  расположен протяженный источник излучения  $S$ . Микролинза-звезда находится в плоскости  $z = Z_m$  ( $0 \leq Z_m \leq Z_p$ ) на некотором удалении  $\vec{P}_m$  от оси линзы  $Oz$  (см. рис. 1).

В приближениях метода Соболева и парааксиальной оптики, как и в [1], всю трассу распространения излучения  $-Z_s \leq z \leq Z_p$  разбиваем на три участка:  $-Z_s \leq z \leq 0$  (1-й участок),  $0 \leq z \leq Z_m$  (2-й участок) и  $Z_m \leq z \leq Z_p$  (3-й участок). При таком разбиении в пределах каждого участка трассы эффект многолучевости отсутствует, что позволяет нам строить искомое решение задачи, последовательно перенося значение поля  $U(z, \vec{p})$  с экрана на экран.

### 2.1. Участок трассы источник излучения – макролинза-галактика ( $-Z_s \leq z \leq 0$ )

Запишем вначале выражение для функции взаимной когерентности (ФВК) в плоскости  $z = 0$ . Для модели источника, элементы поверхности которого некогерентно излучают, согласно формуле (14) из работы [1], в суммарных  $\vec{p}$  и раз-

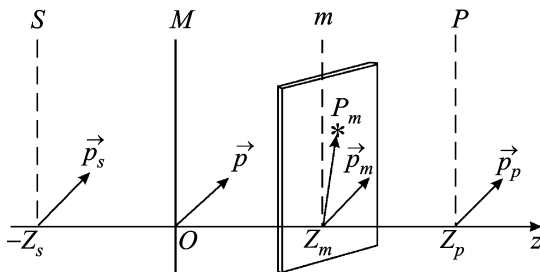


Рис. 1. Взаимное расположение источника излучения  $S$ , макролинзы  $M$  и наблюдателя  $P$

ностных  $\vec{p}$  координатах получаем следующее выражение:

$$\Gamma(0; \vec{p}, \vec{\rho}) = \frac{1}{Z_s^2} \iint_{\Sigma_s} d\vec{p}_s I_s(\vec{p}_s) \times \exp \left\{ ik \left[ \Phi_G \left( \vec{p}_s, \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{\rho} \right) - \Phi_G \left( \vec{p}_s, \vec{p} - \frac{1}{2} \vec{\rho} \right) \right] \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $I_s(\vec{p}_s)$  – детерминированный модельный закон распределения средней интенсивности источника, а  $\Phi_G(\vec{p}_s, \vec{p})$  – набег фазы волны в поле тяготения макролинзы-галактики, вычисленный вдоль прямолинейного луча, соединяющего произвольные точки источника  $(-Z_s, \vec{p}_s)$  и макроэкрана  $(0, \vec{p})$ . Для получения конкретных оценок, как и в [1], используем некоторые модельные упрощения. Прежде всего, рассмотрим модель изотропного гауссова источника излучения ([1], формула (19)). Кроме того, в приближениях парааксиальной оптики и сферически симметричной массивной макролинзы по формулам (20) и (22) из [1] находим приближенное представление для эйконала  $\Phi_G(\vec{p}_s, \vec{p})$ :

$$\Phi_G(\vec{p}_s, \vec{p}) = Z_s + \frac{(\vec{p} - \vec{p}_s)^2}{2Z_s} + r_G \ln \frac{2Z_s}{p}. \quad (2)$$

С учетом (2) для гауссова источника ([1], формула (19)), после интегрирования в (1) по переменной  $\vec{p}_s$ , получаем

$$\Gamma(0; \vec{p}, \vec{\rho}) = \frac{I_0}{Z_s^2} \frac{1}{2\pi R_s^2} \exp \left\{ ik \left[ \frac{\vec{\rho} \vec{p}}{Z_s} + r_G \ln \frac{|\vec{p} - \vec{\rho}/2|}{|\vec{p} + \vec{\rho}/2|} \right] \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_s \exp \left\{ -\frac{1}{2R_s^2} (\vec{p}_s - \vec{P}_s)^2 - ik \frac{\vec{\rho}}{Z_s} \vec{p}_s \right\} = \frac{I_0}{Z_s^2} \times \exp \left\{ -\frac{k^2 R_s^2}{2Z_s^2} \rho^2 + ik \left[ \frac{\vec{\rho} (\vec{p} - \vec{P}_s)}{Z_s} + r_G \ln \frac{|\vec{p} - \vec{\rho}/2|}{|\vec{p} + \vec{\rho}/2|} \right] \right\}. \quad (3)$$

Дальнейшее упрощение (3) можно провести, воспользовавшись следствием теоремы Ван

Циттерта – Цернике [2]. Видно, что эффективный радиус корреляции поля в плоскости макролинзы ( $z=0$ ), определяемый из условия  $k^2 R_s^2 \rho^2 / (2Z_s^2) \approx 1$ , оценивается как  $\rho_{eff} \approx \lambda(R_s/Z_s)^{-1}$ . При малых значениях  $\rho_{eff}$  можно провести линеаризацию логарифма в показателе степени экспоненты в окрестности точки  $\rho=0$ :  $\ln \frac{|\bar{p}-\bar{\rho}/2|}{|\bar{p}+\bar{\rho}/2|} \approx -\frac{\bar{\rho}\bar{p}}{p^2}$ . В результате мы приходим к следующему выражению:

$$\Gamma(0; \bar{p}, \bar{\rho}) = \frac{I_0}{Z_s^2} \exp \left\{ -\frac{k^2 \rho^2 R_s^2}{2Z_s^2} + ik\bar{p} \left[ \frac{\bar{p}-\bar{P}_s}{Z_s} - r_G \frac{\bar{p}\bar{\rho}}{p^2} \right] \right\}. \quad (4)$$

### 2.2. Участок трассы макролинза – микролинза ( $0 \leq z \leq Z_m$ )

Согласно формулам (15) и (18) из [1] запишем ФВК на выходе из плоскости микролинзы  $z = Z_m + 0$ :

$$\Gamma(Z_m; \bar{p}_m, \bar{\rho}_m) = \frac{k^2 f_m(\bar{p}_m, \bar{\rho}_m)}{4\pi^2 Z_m^2} \iint d\bar{p} d\bar{\rho} \Gamma(0; \bar{p}, \bar{\rho}) \times \exp \left\{ ik \left[ \Phi_G \left( \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{\rho}, \bar{p}_m + \frac{1}{2} \bar{\rho}_m \right) - \Phi_G \left( \bar{p} - \frac{1}{2} \bar{\rho}, \bar{p}_m - \frac{1}{2} \bar{\rho}_m \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Здесь  $f_m(\bar{p}_m, \bar{\rho}_m)$  – функция пропускания “микрорекоректора”, которая представляется так [1]:

$$f_m(\bar{p}_m, \bar{\rho}_m) = \exp \left\{ -ik2r_g \ln \frac{|\bar{p}_m - \bar{P}_m + \bar{\rho}_m/2|}{|\bar{p}_m - \bar{P}_m - \bar{\rho}_m/2|} \right\}. \quad (6)$$

Эйконал  $\Phi_G(\bar{p}, \bar{p}_m)$ , вычисленный по формулам (20) и (22) из [1], приближенно равен

$$\Phi_G(\bar{p}, \bar{p}_m) \approx Z_m + \frac{(\bar{p}_m - \bar{p})^2}{2Z_m} + r_G \ln \frac{2Z_m}{p}. \quad (7)$$

С учетом (7) разность эйконолов в показателе степени в формуле (5) в суммарных,  $\bar{p} = (\bar{p}' + \bar{p}'')/2$ ,  $\bar{p}_m = (\bar{p}'_m + \bar{p}''_m)/2$ , и разностных,  $\bar{\rho} = \bar{p}' - \bar{p}''$ ,  $\bar{\rho}_m = \bar{p}'_m - \bar{p}''_m$ , координатах имеет вид

$$\Delta\Phi_G = \Phi_G \left( \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{\rho}, \bar{p}_m + \frac{1}{2} \bar{\rho}_m \right) - \Phi_G \left( \bar{p} - \frac{1}{2} \bar{\rho}, \bar{p}_m - \frac{1}{2} \bar{\rho}_m \right) = \frac{1}{Z_m} (\bar{p}_m - \bar{p})(\bar{\rho}_m - \bar{\rho}) + r_G \ln \frac{|\bar{p} - \bar{\rho}/2|}{|\bar{p} + \bar{\rho}/2|}. \quad (8)$$

Прежде чем переходить к дальнейшим вычислениям, упростим выражения (6) и (8). Во-первых, учитывая, что, согласно (4), эффективная область интегрирования по переменной  $\bar{p}$  в (5) лежит в пределах  $\bar{p} < \bar{\rho}_{eff}$ , для малых значений  $\rho_{eff}$  можно воспользоваться приближением  $\ln \frac{|\bar{p} - \bar{\rho}/2|}{|\bar{p} + \bar{\rho}/2|} \approx -\frac{\bar{\rho}\bar{p}}{p^2}$ . Во-вторых, несложно показать, что быстрое убывание  $\Gamma(0; \bar{p}, \bar{\rho})$  в выражении (4) по разностной переменной  $\rho$  фактически приводит к резкому убыванию  $\Gamma(Z_m; \bar{p}_m, \bar{\rho}_m)$  в выражении (5) по  $\rho_m$  в окрестности точки  $\rho_m = 0$ . Учитывая это, можно воспользоваться приближенным представлением (см. [1]) для функции пропускания микроэкрана:

$$f_m(\bar{p}_m, \bar{\rho}_m) \approx \exp \left\{ -ik2r_g \frac{\bar{p}_m - \bar{P}_m}{(\bar{p}_m - \bar{P}_m)^2} \bar{\rho}_m \right\}.$$

После проделанных упрощений получаем

$$\Gamma(Z_m; \bar{p}_m, \bar{\rho}_m) = \frac{k^2 I_0}{4\pi^2 Z_m^2 Z_s^2} \times \exp \left\{ ik \left[ \frac{\bar{p}_m \bar{\rho}_m}{Z_m} - 2r_g \frac{\bar{p}_m - \bar{P}_m}{(\bar{p}_m - \bar{P}_m)^2} \bar{\rho}_m \right] \right\} \times \iint d\bar{p} d\bar{\rho} \exp \left\{ -\frac{k^2 \rho^2 R_s^2}{2Z_s^2} + \right.$$

$$+ik \left[ \left( \frac{\bar{p} - \bar{p}_s}{Z_s} + \frac{\bar{p} - \bar{p}_m}{Z_m} - 2r_G \frac{\bar{p}}{p^2} \right) \bar{p} - \frac{\bar{p}}{Z_m} \bar{p}_m \right]$$

**2.3. Участок трассы микролинза – наблюдатель ( $Z_m \leq z \leq Z_p$ )**

Аналогично (5) строится и ФВК в плоскости наблюдения  $z = Z_p$ :

$$\Gamma(Z_p; \bar{p}_p, \bar{p}_p) = \frac{k^2}{4\pi^2 (Z_p - Z_m)^2} \times$$

$$\times \iint d\bar{p}_m d\bar{p}_m \Gamma(Z_m; \bar{p}_m, \bar{p}_m) \times$$

$$\times \exp \left\{ ik \left[ \Phi_G \left( \bar{p}_m + \frac{1}{2} \bar{p}_m, \bar{p}_p + \frac{1}{2} \bar{p}_p \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \Phi_G \left( \bar{p}_m - \frac{1}{2} \bar{p}_m, \bar{p}_p - \frac{1}{2} \bar{p}_p \right) \right] \right\}. \quad (9)$$

Эйконал  $\Phi_G(\bar{p}_m, \bar{p}_p)$  для рассматриваемого участка трассы, вычисленный по формуле (20) из [1] вдоль прямолинейного луча, соединяющего точки с координатами  $(Z_m, \bar{p}_m)$  и  $(Z_p, \bar{p}_p)$ , в приближении парааксиальной оптики представляется так:

$$\Phi_G(\bar{p}_m, \bar{p}_p) \approx Z_p - Z_m + \frac{(\bar{p}_m - \bar{p}_p)^2}{2(Z_p - Z_m)} +$$

$$+ r_G \ln \frac{2Z_p}{\sqrt{Z_m^2 + p_m^2} + Z_m}. \quad (10)$$

Относительно формул (9), (10) заметим следующее. Как уже отмечалось в [1], условиям наблюдения соответствует система координат, в которой ось  $Oz$  соединяет точку наблюдения  $P$  с центром масс макролинзы  $O$  (см. рис. 1). Однако для построения ФВК в плоскости наблюдения ( $z = Z_p$ ) необходимы небольшие поперечные разности точек регистрации полей. Для того чтобы удовлетворить двум “взаимоисключающим” требованиям, поступают следующим образом. Вначале в плоскости наблюдения рассматривают поля в разнесенных точках

$(Z_p, \bar{p}'_p)$  и  $(Z_p, \bar{p}''_p)$ . Затем, согласно стандартной процедуре, строят ФВК,  $\Gamma(Z_p; \bar{p}'_p, \bar{p}''_p) = \langle U(Z_p; \bar{p}'_p) U^*(Z_p; \bar{p}''_p) \rangle$ , вводят суммарные,  $\bar{p}_p = (\bar{p}'_p + \bar{p}''_p)/2$ , и разностные,  $\bar{p}_p = \bar{p}'_p - \bar{p}''_p$ , координаты, после чего полагают  $\bar{p}_p = 0$ . Следуя данному правилу, запишем (10) в суммарных,  $\bar{p}_p = (\bar{p}'_p + \bar{p}''_p)/2$ ,  $\bar{p}_m = (\bar{p}'_m + \bar{p}''_m)/2$ , и разностных,  $\bar{p}_p = \bar{p}'_p - \bar{p}''_p$ ,  $\bar{p}_m = \bar{p}'_m - \bar{p}''_m$ , координатах. Затем, положив  $\bar{p}_p = 0$  и проведя линейаризацию разности эйконолов в разнесенных точках,  $\Delta\Phi_G = \Phi_G(\bar{p} + \bar{p}/2, \bar{p}_p + \bar{p}_p/2) - \Phi_G(\bar{p} - \bar{p}/2, \bar{p}_p - \bar{p}_p/2)$ , по переменным  $\bar{p}_m$  и  $\bar{p}_p$ , получаем

$$\Delta\Phi_G \approx$$

$$\approx \frac{\bar{p}_m - \bar{p}_p}{Z_p - Z_m} \bar{p}_m - r_G \frac{\bar{p}_m \bar{p}_m}{\sqrt{Z_m^2 + \bar{p}_m^2} (\sqrt{Z_m^2 + \bar{p}_m^2} + Z_m)}.$$

После произведенных упрощений исходная формула (9) преобразуется к виду

$$\Gamma(Z_p; \bar{p}_p) = \frac{k^2}{4\pi^2 (Z_p - Z_m)^2} \frac{k^2 I_0}{4\pi^2 Z_m^2 Z_s^2} \times$$

$$\times \iint d\bar{p} d\bar{p}_m \exp \left\{ -ik \frac{\bar{p}_m \bar{p}_p}{Z_p - Z_m} \right\} \iint d\bar{p} d\bar{p}_m \times$$

$$\times \exp \left\{ ik \bar{p}_m \left[ \frac{Z_p \bar{p}_m}{Z_m (Z_p - Z_m)} - \frac{\bar{p}}{Z_m} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{r_G \bar{p}_m}{\sqrt{Z_m^2 + p_m^2} (\sqrt{Z_m^2 + p_m^2} + Z_m)} - 2r_g \frac{\bar{p}_m - \bar{p}_m}{(\bar{p}_m - \bar{p}_m)^2} \right] \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{k^2 \rho^2 R_s^2}{2Z_s^2} + ik \bar{p} \left[ \frac{Z_m + Z_s}{Z_s Z_m} \bar{p} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{p}_m}{Z_m} - \frac{\bar{p}_s}{Z_s} - 2r_G \frac{\bar{p}}{p^2} \right] \right\}.$$

Посредством преобразования Фурье ФВК  $\Gamma(Z_p; \bar{p}_p)$  по разностной переменной  $\bar{p}_p$  [1] определяем теперь среднее значение лучевой интенсивности в точке наблюдения:

$$I_p(\bar{\psi}) = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho}_p \Gamma(Z_p; \bar{\rho}_p) \exp\{ik\bar{\psi}\bar{\rho}_p\}.$$

После несложных, но громоздких вычислений выражение для лучевой интенсивности в точке наблюдения может быть приведено к следующему виду:

$$I_p(\bar{\psi}; \bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m) = \frac{I_0}{2\pi R_s^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\Psi_0^2} \Phi(\bar{\psi}; \bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m)\right\}, \quad (11)$$

где

$$\Phi(\bar{\psi}; \bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m) = \left[ \bar{\psi} - \bar{\psi}_s - \Psi_g^2 \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_m}{(\bar{\psi} - \bar{\psi}_m)^2} - \Psi_G^2 \frac{\bar{\psi} - \Psi_g^2 \frac{Z_m(Z_p + Z_s)}{Z_p(Z_m + Z_s)} \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_m}{(\bar{\psi} - \bar{\psi}_m)^2}}{\left(\bar{\psi} - \Psi_g^2 \frac{Z_m(Z_p + Z_s)}{Z_p(Z_m + Z_s)} \frac{\bar{\psi} - \bar{\psi}_m}{(\bar{\psi} - \bar{\psi}_m)^2}\right)^2} \right]^2. \quad (12)$$

Здесь, как и в [1], через  $\Psi_G^2 = 2r_g Z_s / [(Z_p + Z_s)Z_p]$  и  $\Psi_g^2 = 2r_g (Z_m + Z_s) / [(Z_p + Z_s)(Z_p - Z_m)]$  обозначены квадраты угловых радиусов кольцевых изображений Эйнштейна–Хвольсона для макролинзы-галактики и микролинзы-звезды;  $\Psi_0 = R_s / (Z_s + Z_p)$  и  $\bar{\psi}_s = \bar{P}_s / (Z_s + Z_p)$  – угловой размер и угловая координата максимума яркости источника излучения, соответственно;  $\bar{\psi}_m = \bar{P}_m / (Z_p - Z_m)$  – угловая координата положения микролинзы в плоскости  $z = Z_m$ .

С помощью (11) нетрудно определить коэффициент усиления сложной гравитационной линзы, состоящей из макролинзы-галактики и микролинзы-звезды (см. [1]):

$$q(\bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m) = \frac{(Z_p + Z_s)^2}{I_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\psi} I_p(\bar{\psi}; \bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Psi_0^2} \int d\bar{\psi} \exp\left\{-\frac{1}{2\Psi_0^2} \Phi(\bar{\psi}; \bar{\psi}_s, \bar{\psi}_m)\right\}.$$

### 3. Численное моделирование

Как уже отмечалось в [1], анализировать выражения для лучевой интенсивности и коэффициента усиления удобнее в относительных единицах. Для этого были введены в рассмотрение нормированные углы,  $\bar{\xi} = \bar{\psi} / \Psi_g$ ,  $\bar{\xi}_m = \bar{\psi}_m / \Psi_g$ ,  $\bar{\xi}_s = \bar{\psi}_s / \Psi_g$ , и безразмерные параметры,  $\Gamma_0 = \Psi_0 / \Psi_g$ ,  $\Gamma_g = \Psi_g / \Psi_g$ . Выражение для коэффициента усиления как в первой, так и во второй частях работы может быть в общем виде представлено так:

$$q(\bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m) = \frac{1}{2\pi\Gamma_0^2} \int d\bar{\xi} \exp\left\{-\frac{1}{2\Gamma_0^2} \Phi(\bar{\xi}; \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m)\right\}. \quad (13)$$

В [1] анализ фокусирующих свойств сложной линзы проводился в случае, когда микролинза расположена в промежутке между источником и макролинзой ( $-Z_s < z < 0$ ). При таком расположении микролинзы ее угловой радиус кольца Эйнштейна–Хвольсона равен  $\Psi_g = [2r_g (Z_s - Z_m) / [(Z_p + Z_s)(Z_p + Z_m)]]^{1/2}$ , а функция  $\Phi(\bar{\xi}; \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m)$  в (13) имеет вид

$$\Phi(\bar{\xi}; \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m) = \Phi_{SM}(\bar{\xi}; \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m) = \left[ \bar{\xi} - \bar{\xi}_s - \frac{1 - Z_m/Z_s}{1 + Z_m/Z_p} \frac{\bar{\xi}}{\xi^2} - \Gamma_g^2 \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_m}{(\bar{\xi} - \bar{\xi}_m)^2} \right]^2. \quad (14)$$

Дальнейший анализ (14) удобнее проводить, воспользовавшись следующим представлением:  $\Psi_g = \Psi_g(Z_m) = \Psi_g(0) F_{SM}(Z_m)$ , где  $\Psi_g(0) = [2r_g Z_s / [(Z_p + Z_s)Z_p]]^{1/2}$  – угловой радиус кольца Эйнштейна–Хвольсона микролинзы, расположенной в плоскости макролинзы ( $Z_m = 0$ ), а безразмерная функция  $F_{SM}(Z_m)$  определяется как  $F_{SM}(Z_m) = [(1 - \eta_{ms}) / (1 + \eta_{ms} Z_s / Z_p)]^{1/2}$ ,  $\eta_{ms} = Z_m / Z_s$  – относительное удаление микро-

линзы. Видно, что в зависимости от положения микролинзы в промежутке источник – макролинза значение  $F_{SM}(Z_m)$  изменяется в пределах от 0, когда  $\eta_{ms} = 1$ , до 1, когда  $\eta_{ms} = 0$ .

Введенная в (13) функция  $\Phi(\bar{\xi}; \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m)$  представляется более сложным образом, когда микролинза находится в промежутке макролинза – наблюдатель ( $0 < z < Z_p$ ). Угловой радиус кольца Эйнштейна–Хвольсона микролинзы в данном случае равен  $\Psi_g = [2r_g(Z_m + Z_s) / [(Z_p + Z_s)(Z_p - Z_m)]]^{1/2}$ , а функция  $\Phi(\bar{\xi}; \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m)$  согласно (11), (12) имеет вид

$$\Phi(\bar{\xi}; \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m) = \Phi_{MP}(\bar{\xi}; \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m) = \left[ \bar{\xi} - \bar{\xi}_s - \Gamma_g^2 \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_m}{(\bar{\xi} - \bar{\xi}_m)^2} - \frac{\bar{\xi} - \alpha \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_m}{(\bar{\xi} - \bar{\xi}_m)^2}}{\left( \bar{\xi} - \alpha \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_m}{(\bar{\xi} - \bar{\xi}_m)^2} \right)^2} \right]^2$$

Здесь  $\alpha = \frac{\Psi_g^2 Z_m (Z_p + Z_s)}{\Psi_G^2 Z_p (Z_m + Z_s)}$ . Представим

снова  $\Psi_g = \Psi_g(Z_m) = \Psi_g(0) F_{MP}(Z_m)$ , где функция  $F_{MP}(Z_m)$  имеет вид  $F_{MP}(Z_m) = [(1 + \eta_{mp} Z_p / Z_s) / (1 - \eta_{mp})]^{1/2}$ . При перемещении микролинзы в промежутке между макролинзой и наблюдателем ( $0 < Z_m < Z_p$ ), значение безразмерного параметра  $\eta_{mp} = Z_m / Z_p$  изменяется в пределах  $0 < \eta_{mp} < 1$ . Видно, что в отличие от своего аналога  $F_{SM}(Z_m)$  функция  $F_{MP}(Z_m)$  изменяется в пределах от 1 при  $\eta_{mp} = 0$ , до бесконечности при  $\eta_{mp} \rightarrow 1$ . Расходимость  $F_{MP}(\eta_{mp} \rightarrow 1) \rightarrow \infty$  имеет простое физическое объяснение. Линейный размер кольца Эйнштейна–Хвольсона  $L_g(Z_m) = [2r_g(Z_p - Z_m)(Z_s + Z_m) / (Z_p + Z_s)]^{1/2}$ , как и положено, стремится к 0 при  $Z_m \rightarrow Z_p$ . Однако угловой радиус кольца, определяемый как  $\Psi_g(Z_m) = L_g(Z_m) / (Z_p - Z_m)$ , будет бесконечно возрастать при  $Z_m \rightarrow Z_p$ . Это обстоятельство приводит к тому, что плоскость микролинзы не должна приближаться на достаточ-

но близкое расстояние к наблюдателю, чтобы не выходить за рамки приближения параксиальной оптики ( $\Psi_g \ll 1$ ). На рис. 2 приведены зависимости  $F_{MS}$ ,  $F_{MP}$  и  $\alpha$ .

#### 4. Модельные представления

Для дальнейшего численного анализа необходимо конкретизировать параметры используемых моделей. В качестве ориентира нами рассматривалась гравитационно-линзовая система (ГЛС) Q2237+0305 [3-6]. Источником излучения в данной ГЛС является далекий квазар с красным смещением  $z_s \approx 1.69$ , а роль макролинзы выполняет достаточно близкая к Земле массивная спиральная галактика, красное смещение которой  $z_d \approx 0.039$ . Квазар проецируется в непосредственной близости от центра галактики, которая состоит из достаточно компактного сферического ядра и протяженного диска [4]. Под действием линзового эффекта поля тяготения спиральной галактики в окрестности ее центра (в пределах круга с угловым диаметром  $\approx 2''$ ) формируются четыре изображения квазара в виде креста (Крест Эйнштейна). Для упрощения и получения конкретных численных оценок ниже мы ограничимся рассмотрением лишь одной сферической

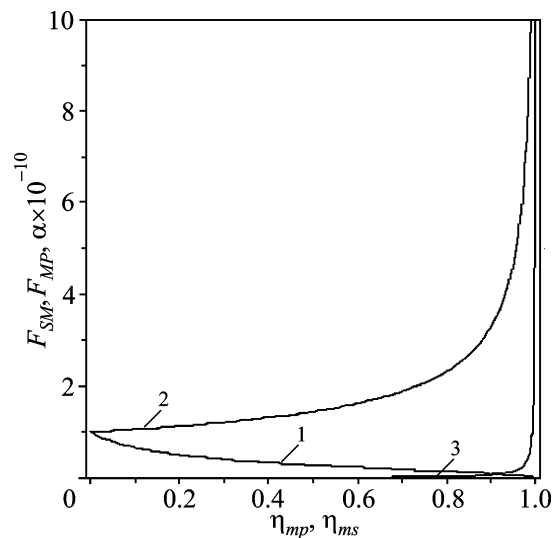


Рис. 2. Зависимости функций  $F_{SM}$  (кривая 1),  $F_{MP}$  (кривая 2) и  $\alpha$  (кривая 3) от величин относительных удалений микролинзы  $\eta_{ms}$  и  $\eta_{mp}$

составляющей массы, связанной с ядром галактики.

При анализе эффекта гравитационного линзирования, создаваемого космологическими объектами, необходимо прежде всего задаться моделью Вселенной. Чаще рассматриваются однородные и изотропные в среднем модели Фридмана–Леметра с метрикой Робертсона–Уокера (FLRW) с учетом либо без учета космологической постоянной  $\Lambda$  [7, 8]. Основные свойства модели определяются с помощью нескольких основных величин. Прежде всего, это значение постоянной Хаббла в современную эпоху ( $H_0$ ). Еще три безразмерных параметра определяются вкладами в общую энергию-массу Вселенной барионной и невидимой материи ( $\Omega_M$ ), космологической постоянной  $\Lambda$  ( $\Omega_\Lambda$ ) и современным радиусом кривизны пространства  $R_k$  ( $\Omega_k$ ). Из решения уравнения Фридмана следует, что введенные параметры удовлетворяют следующему условию:  $\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$  (см. [7, 9]). Согласно представлениям, основанным на данных наблюдений [10, 11], в современную эпоху мы имеем следующие значения параметров:  $\Omega_M + \Omega_\Lambda \approx 1$  ( $\Omega_M \approx 0.23$ ,  $\Omega_\Lambda \approx 0.75$ ), т. е.  $\Omega_k \approx 0$ . Равенство нулю параметра  $\Omega_k$  означает, что  $R_k^{-1} \approx 0$  и трехмерное пространство с высокой точностью евклидово.

Детальный анализ эффекта гравитационной фокусировки показывает, что практически все уравнения, полученные в приближении локально плоского пространства-времени, сохраняют свой вид и для космологических расстояний, если в качестве мер удалений пользоваться расстояниями, измеряемыми по угловому диаметру источника (см., например, [9, 12, 13]). Исключением из правил являются лишь выражения, связанные со временем распространения излучения от макролинзы до наблюдателя. В работе [14], однако, было показано, что космологический фактор легко учитывается, простым умножением выражений для плоского пространства-времени на множитель  $(1 + z_d)$ . Этот множитель учитывает расширение Вселенной за время прохождения сигнала от линзы до наблюдателя. Ввиду того что красное смещение линзы в ГЛС Q2237+0305 достаточно мало ( $z_d \approx 0.04$ ), все приведенные в первой и второй частях работы выражения сохраняют свой вид

для ГЛС Q2237+0305. Необходимо только провести формальную замену обычных евклидовых расстояний  $Z_p, Z_s, Z_p + Z_s, \tilde{Z}$  на космологические “угловые”:  $Z_p \rightarrow D_d, Z_s \rightarrow D_{ds}, Z_p + Z_s \rightarrow D_s$  и  $\tilde{Z} \rightarrow \tilde{D} = D_d D_{ds} / D_s$ . В работе [3] для значений постоянной Хаббла  $H_0 = 70$  (км/с) · Мпк и параметров модели Вселенной  $\Omega_M = 0.3$  и  $\Omega_\Lambda = 0.7$  были получены следующие величины угловых расстояний:  $D_d = 152$  Мпк;  $D_{ds} = 1607$  Мпк и  $D_s = 1666$  Мпк.

После введения модельных космологических представлений нам необходимо задать еще четыре параметра: угловой размер источника излучения  $\Psi_0$ , смещение максимума его яркости от оси линзы  $\Psi_s$ , а также угловые радиусы колец Эйнштейна–Хвольсона макро- и микролинзы  $\Psi_G$  и  $\Psi_g$  соответственно.

Угловой размер источника излучения  $\Psi_0$  оценивается по формуле  $\Psi_0 = R_s / D_s$ . Выбирая характерный линейный размер излучающей области квазара в оптическом диапазоне  $R_s \sim 10^{10}$  км [3], получаем оценку  $\Psi_0 = 0.04$  угловых микросекунд (угл. мкс). В работах [5, 6] для ГЛС Q2237+0305 невозмущенное смещение центра яркости источника  $\tilde{\Psi}_s$  для различных модельных представлений галактики-линзы оценивалось как  $\psi_s = 0.1'' \div 0.01''$ . Для визуальной наглядности результатов нами было выбрано значение  $\psi_s = 0.1''$ .

Угловой радиус кольца Эйнштейна–Хвольсона макролинзы-галактики оценим из данных наблюдений. В работе [4] было показано, что величину  $\Psi_G$  для объекта Q2237+0305 можно приближенно оценить как среднеарифметическое угловых удалений четырех изображений от центра галактики. В результате получается величина  $\Psi_G \approx 0.9''$ . Для приведенных выше значений угловых расстояний в приближении модели “точечной” микролинзы получаем также следующую оценку величины  $\Psi_g(0)$  [3]:

$$\Psi_g(0) = \sqrt{\frac{4GM_g}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \approx \sqrt{\frac{M_g}{M_\odot}} \cdot 7 \text{ угл. мкс.}$$

Согласно данным наблюдений эффект микролинзирования как в пределах нашей, так и в далеких галактиках вызывается преимущественно телами с относительно “малыми” масса-

ми [15]. Выбрав  $M_g \approx 0.01M_\odot$ , получаем значение  $\Psi_g(0) \approx 0.7$  угл. мкс.

Демонстрацию взаимодействия гравитационных полей микро- и макролинзы вначале продемонстрируем на примере деформации структуры изофот видимых изображений. Затем для каждого положения микролинзы определим коэффициент усиления принимаемого излучения. Ниже рассмотрены два случая различных расположений микролинзы относительно системы наблюдатель – макролинза – источник.

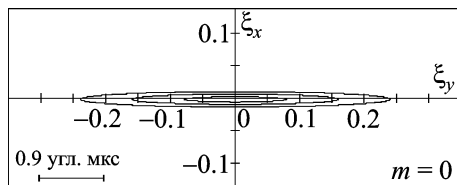
#### 4.1. Микролинза в промежутке между макролинзой-галактикой и источником излучения

Для выбранного смещения центра яркости источника  $\psi_s = 0.1''$  сферически симметричная макролинза формирует два макроизображения. Для небольших смещений ( $\psi_s < \Psi_G$ ) координаты максимумов яркости изображений  $\bar{\Psi}_{1,2}$ , видимых в плоскости макролинзы ( $z = 0$ ), а также значения коэффициентов усиления их блеска для модели компактной сферической массы приближенно определяются так [16]:

$$\bar{\Psi}_{1,2} \approx \Psi_G \pm \psi_s / 2 = 0.9'' \pm 0.05'';$$

$$q_{1,2} \approx \frac{\Psi_G \pm 1}{2\psi_s} = 4.5 \pm 0.5.$$

В дальнейшем рассматривалось влияние микролинзы только на первое “прямое” макроизображение, для которого имеем  $\Psi_1 \approx 0.95''$  и  $q_1 \approx 5$ . На рис. 3 приведена структура изофот невозмущенного микролинзой макроизображения гауссового источника.



**Рис. 3.** Распределение яркости в невозмущенном микролинзой “прямом” макроизображении источника (значения на осях умножены на  $10^{-5}$ )

Положение микролинзы в плоскости  $z = -Z_m$  выбиралось так, чтобы на любом удалении от центра масс макролинзы она всегда проецировалась на центр макроизображения. Несложно показать, что угловая координата смещения микролинзы  $\psi_m$  и величина удаления от макролинзы  $Z_m$  в этом случае должны удовлетворять условию:

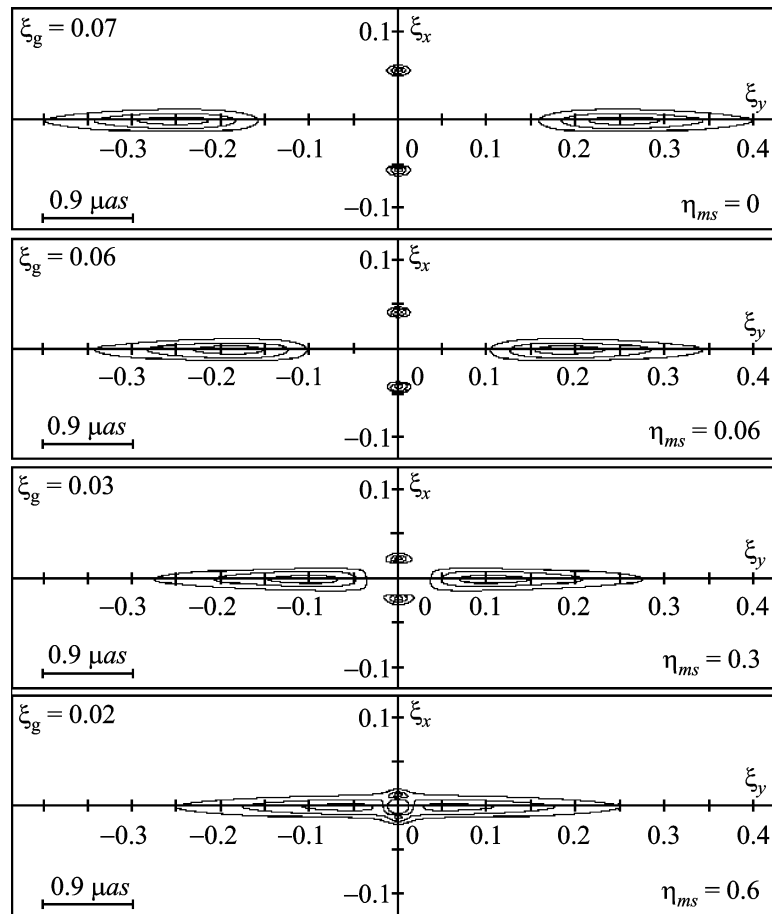
$$\psi_m = \frac{1 - \eta_{ms}}{1 + 10.7 \cdot \eta_{ms}} \Psi_1 + \frac{11.7 \cdot \eta_{ms}}{1 + 10.7 \cdot \eta_{ms}} \psi_s.$$

На рис. 4 представлены изофоты видимых из точки наблюдения изображений совместного действия макро- и микролинзы при различных удалениях микролинзы в сторону источника излучения. Видно, что влияние микролинзы на невозмущенное макроизображение (рис. 3), прежде всего проявляется в том, что невозмущенное макроизображение расщепляется на 4 макроизображения, которые в основном формируются вблизи кольца Эйнштейна–Хвольсона макролинзы. Структура изофот расщепленного макроизображения слегка деформируется по мере увеличения расстояния  $Z_m$ . При больших удалениях  $Z_m$  влияние микролинзы практически не ощущается: оно “замывается” макроизображением (см. рис. 4 для  $\eta_{ms} = 0.6$ ). Для каждого положения микролинзы на рис. 4 указана и величина отношения  $\xi_g = \Psi_g / \Psi_G$ , которая зависит от расстояния  $Z_m$ .

#### 4.2. Микролинза в промежутке между макролинзой-галактикой и наблюдателем

На рис. 5 представлены результаты анализа для второго случая, когда микролинза расположена справа от центра масс галактики. На первой панели микролинза снова находится непосредственно в плоскости, проходящей через центр галактики ( $Z_m = 0$ ). Последующие панели соответствуют ситуации, когда микролинза постепенно приближается к наблюдателю. Видно, что, помимо расщепления макроизображения, изменяется еще и его структура. С ростом  $Z_m$  структура изофот все больше напоминает структуру для отдельной микролинзы, т. е. она все ближе и ближе приближается к изображению кольца Эйнштейна–Хвольсона микролинзы.

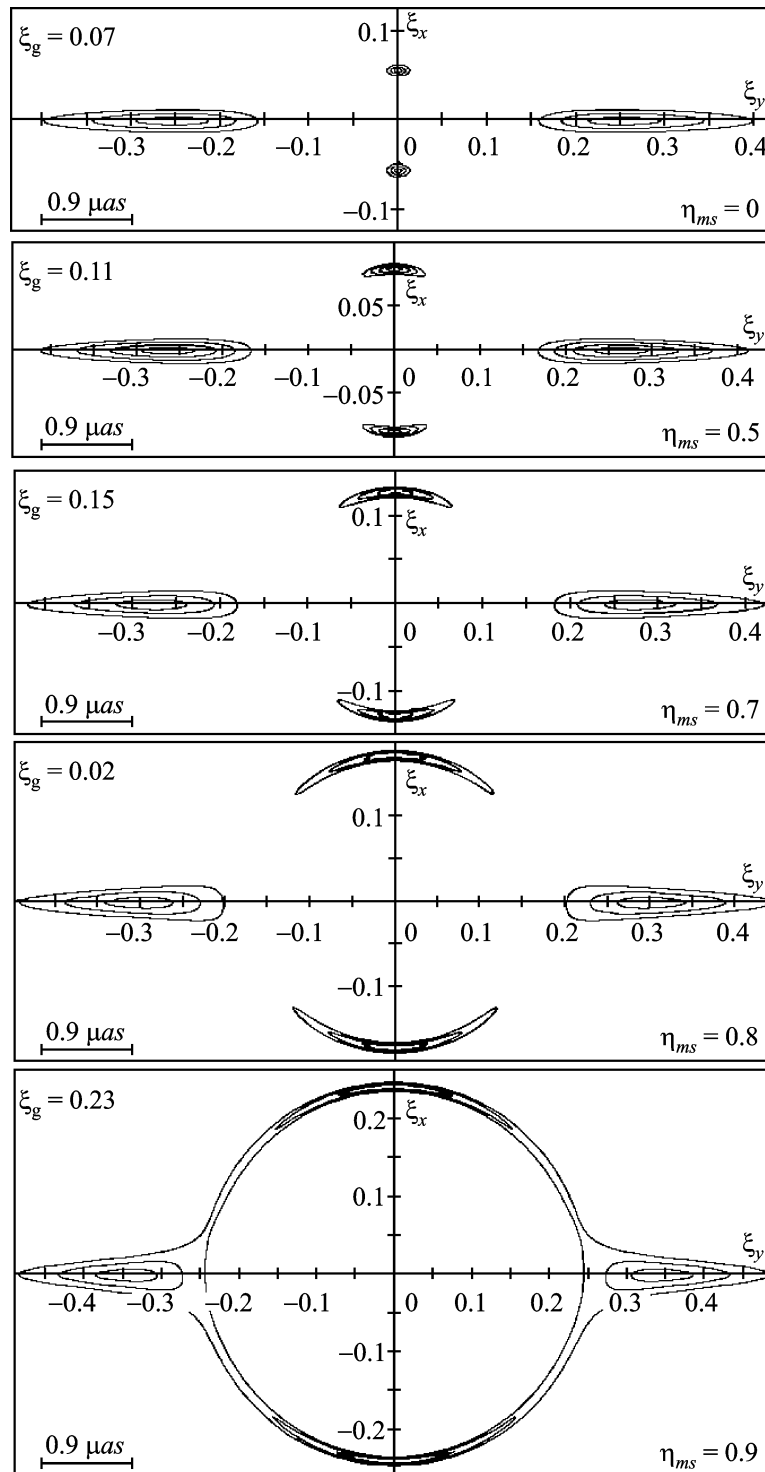




**Рис. 4.** Распределение яркости в видимом изображении источника при различных положениях микролинзы между источником и центром масс макролинзы (значения на осях умножены на  $10^{-5}$ )

Ценную информацию об эффекте фокусировки дает также поведение коэффициента усиления линзы. На рис. 6. приведена зависимость коэффициента усиления сложной системы, состоящей из макро- и микролинзы, при различных удалениях микролинзы от центра макролинзы, нормированного на коэффициент усиления макроизображения, созданного галактикой-макролинзой. Из графика видно, что при смещении микролинзы в сторону источника ее влияние на усиление остается практически таким же, как и при ее расположении в плоскости макролинзы ( $Z_m = 0$ ). При смещении микролинзы в сторону наблюдателя ее влияние на суммарное усиление все время возрастает. Это обстоятельство подтверждается структурой изофот на рис. 5. Чем больше  $Z_m$ , тем ближе структура изофот приближается к кольцеобразной, т. е. к ситуации, когда отмечается максимальное усиление микролинзой.

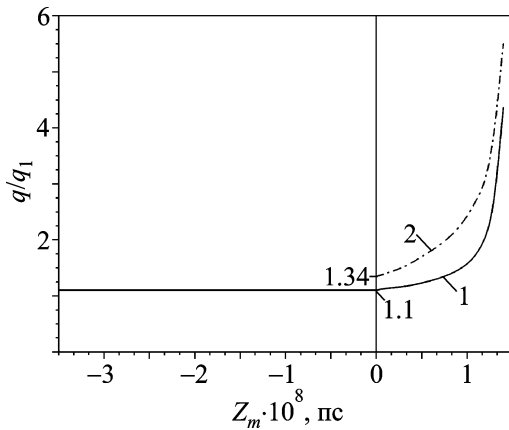
С ростом  $Z_m$ , излучение, идущее от прямого макроизображения и падающее на микролинзу, все более и более приближается к излучению некоторого эффективного “точечного” источника, расположенного в плоскости  $z = 0$ . Угловой размер  $\Psi_1$  эффективного источника можно оценить из следующих простых рассуждений. Из теории гравитационных линз [16] известно, что коэффициент усиления излучения “точечного” источника приближенно равен отношению телесных углов видимого изображения ( $\approx \pi\Psi_1^2$ ) и источника ( $\approx \pi\Psi_0^2$ ). Отсюда получаем  $q_1 \approx \pi\Psi_1^2/\pi\Psi_0^2$ , тогда  $\Psi_1 \approx \sqrt{q_1}\Psi_0$ . Перемещая микролинзу, мы всегда проецировали ее на центр видимого макроизображения. В этом случае влияние микролинзы максимально. Коэффициент усиления микролинзы можно снова оценить как отношение телесных углов макроизображения и источника. Учитывая, что мик-



**Рис. 5.** Распределение яркости в видимом изображении источника при различных положениях микролинзы между центром масс макролинзы и наблюдателем (значения на осях умножены на  $10^{-5}$ )

роизображением является кольцо Эйнштейна–Хвольсона (эффективный источник, микролинза и наблюдатель находятся на одной оси), получаем оценку [16]:  $q_m \approx \Psi_g / \sqrt{q_1} \Psi_0$ . Величину  $q_m$

необходимо рассматривать как максимально допустимое значение коэффициента усиления излучения микролинзой. На рис. 6 показана также зависимость  $q_m(Z_m)/q_1$ .



**Рис. 6.** Коэффициент усиления сложной линзы (кривая 1) и коэффициент усиления микролинзы (кривая 2), нормированные на коэффициент усиления макроизображения

## 5. Выводы

Исходя из проведенного в частях I и II анализа и результатов численного моделирования можно сделать вывод, что степень влияния микролинзы-звезды на характеристики сложной системы, состоящей из макролинзы-галактики и микролинзы-звезды, зависит от положения микролинзы внутри макролинзы-галактики. Наибольшее влияние микролинза оказывает в том случае, когда она расположена в промежутке между макролинзой и наблюдателем. Это обстоятельство необходимо учитывать при обработке данных наблюдений эффекта микролинзирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы НАН Украины «Поиск темной материи по результатам наблюдений гравитационно линзированных квазаров (шифр «Космомикрофизика»».

## Литература

1. Бердина Л. А., Минаков А. А. Фокусировка излучения квазара в гравитационном поле микролинзы-звезды, находящейся в макролинзе-галактике. 1. Построение решения на основе формулы Соболева // Радиофизика и радиоастрономия. – 2010. – Т. 15, №3 – С. 271-284.
2. Вольф Э., Борн М. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 855 с.
3. Jaroszynski M. and Skowron J. Microlensing of Q2237+0305: Simulations and statistics // Acta Astronomica. – 2006. – Vol. 56, No. 2. – P. 171-182.

4. Минаков А. А., Шаляпин В. Н. Оценка параметров гравитационной линзы 2237+0305 // Письма в АЖ. – 1991. – Т. 17, №4. – С. 331-340.
5. Kent S. and Falco E. A model for gravitational lens system 2237+0305 // Astron. J. – 1988. – Vol. 96, No. 3. – P. 1570-1574.
6. Schmidt R., Webster R., and Lewis G. Weighing a galaxy bar in the lens Q2237+0305 // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1998. – Vol. 295, No. 2. – P. 488-496.
7. Peebles P. J. E. Principal of Physical Cosmology. – Princeton: Princeton University Press, 1993. – 732 p.
8. Kayser R., Helbig P., and Schramm T. A general and practical method for calculating cosmological distances // Astron. Astrophys. – 1997. – Vol. 318, No. 3. – P. 680-686.
9. Вейнберг С. Гравитация и космология: принципы и приложения общей теории относительности. – М.: Мир, 1975. – 396 с.
10. Spergel D. N., Bean R., Doré O., Nolte M. R., Bennett C. L., Dunkley J., Hinshaw G., Jarosik N., Komatsu E., Page L., Peiris H. V., Verde L., Halpern M., Hill R. S., Kogut A., Limon M., Meyer S. S., Odegard N., Tucker G. S., Weiland J. L., Wollack E., and Wright E. L. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology // Astrophys. J. Suppl. Ser. – 2007. – Vol. 170, Is. 2. – P. 377-408.
11. Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // Украинский физический журнал. – 2008. – Т. 178, №3. – С. 267-300.
12. Falco E., Gorenstein M., and Shapiro J. Degeneracies in parameter estimates for models of gravitational lens systems // Astrophys. J. – 1988. – Vol. 327, No. 2. – P. 693-711.
13. Schneider P., Ehlers J., and Falco E. Gravitational Lenses. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1992. – 560 p.
14. Cooke J. and Kantowski R. Time delays for multiply imaged quasars // Astrophys. J. – 1975. – Vol. 195, No. 1. – L.11-L.15.
15. Черепашук А. М. Гравитационное микролинзирование и проблема скрытой массы // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – № 3. – С. 92-99.
16. Блюх П. В., Минаков А. А. Гравитационные линзы. – Киев: Наукова думка, 1989. – 240 с.

## Фокусування випромінювання квазара в гравітаційному полі мікролінзи-зірки, що знаходиться в макролінзі-галактиці.

### 2. Структура ізотоп видимого зображення джерела випромінювання

**Л. А. Бердіна, А. О. Мінаков,  
В. Г. Вакулик**

У наближеннях методів Соболева і параксіальної оптики проаналізовано ефект фокусування складної гравітаційної лінзи, утвореної

полями тяжіння макролінзи-галактики та мікролінзи-зірки. Знайдено розв'язок задачі при довільному розташуванні мікролінзи уздовж траси джерело – макролінза – спостерігач. Побудовано ізофоти зображень і розраховано коефіцієнт підсилення складної лінзи. Показано, що найбільший вплив на ефект фокусування мікролінза чинить у тому випадку, коли вона знаходиться на ділянці траси макролінза – спостерігач. Отримані результати можуть бути використані у розв'язку зворотної задачі відновлення параметрів прихованої маси за спостереженнями ефекту мікролінзування.

**Focusing of Quasar Radiation  
in the Gravitational Field  
of a Microlens-Star Inside a Macrolens-  
Galaxy. 2. Intensity Contours Structure  
of the Radiation Source Visible Image**

**L. A. Berdina, A. A. Minakov,  
and V. G. Vakulik**

In the approximation of Sobolev and paraxial optics methods, the focusing effect of a complex gravitational lens formed by the gravitational fields of a macrolens-galaxy and a microlens-star was analyzed. The problem is solved for an arbitrary location of the microlens along the source – macrolens – observer route. Intensity contours of images were constructed and magnification factor of a complex lens was calculated. It was shown that the microlens renders the greatest influence on the focusing effect when it is located on the macrolens – observer route. The obtained results can be used in solving the inverse problem of parameters recovery of dark matter by observing the microlensing effect.