

## Розв'язання оберненої задачі проходження нормально падаючої електромагнітної хвилі крізь шарувату діелектричну структуру

З. Т. Назарчук, Р. О. Гринів<sup>1</sup>, А. Т. Синявський

*Фізико-механічний інститут імені Г. В. Карпенка НАН України,  
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79601, Україна  
E-mail: nazarch@ipm.lviv.ua, a.synavsky@gmail.com*

*<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3 б, м. Львів, 79060, Україна  
E-mail: rhryniv@iapmm.lviv.ua*

*Стаття надійшла до редакції 15 червня 2011 р.*

Проаналізовано одновимірну обернену задачу проходження електромагнітних хвиль крізь шарувату діелектричну структуру, вихідними даними для якої є абсолютні значення коефіцієнта проходження нормально падаючої плоскої хвилі, виміряні в обмеженому діапазоні частот. Встановлено причину неоднозначності розв'язку оберненої задачі відносно невідомих параметрів шаруватої діелектричної структури. Запропоновано методику вимірювань та обробки результату, що дозволяє однозначно ідентифікувати параметри багат шарової структури за частотними залежностями абсолютних значень коефіцієнтів проходження, визначених у двох окремих експериментах з тестовим діелектричним шаром.

**Ключові слова:** обернена задача, коефіцієнт проходження, реконструкція фази, шаруватий діелектрик

### 1. Вступ

Висока ефективність сучасних засобів неруйнівного контролю та дистанційного зондування досягається головню за рахунок упровадження належної обробки результатів вимірювань. У діагностиці неоднорідних середовищ використовують властивості розсіювання пружних та електромагнітних хвиль, а обробку вимірних значень напруженості розсіяного поля здійснюють на основі розв'язання відповідної оберненої задачі щодо параметрів середовища. У випадку плоских шаруватих середовищ для розв'язання таких задач використовують одновимірну модель. У теорії обернених задач розроблено багато методів [1-6], для яких вихідними даними є комплекснозначна залежність коефіцієнта відбиття від частоти або імпульсна характеристика, що визначається перетворенням Фур'є комплексної функції коефіцієнта відбиття.

Вимірювання комплексних значень параметрів електромагнітного поля, зокрема коефіцієнта відбиття [7-9], у широкому частотному

діапазоні є доволі складною задачею. У свою чергу, точне векторне подання параметрів у комплексній площині є однією з передумов коректного формулювання обернених задач. У вимірювальних засобах використовують мостові [8] та гетеродинні [9] схеми порівняння значення величини напруженості поля у точці вимірювання з полем від еталонного джерела гармонійних коливань. За фазовими і амплітудними відмінностями визначають вимірювану комплексну величину. Створення засобів високочастотних широкосмугових вимірювань є вкрай затратним. Вони вимагають прецизійного калібрування та контролю параметрів упродовж експлуатації, що суттєво обмежує сферу застосування таких приладів. Виготовлення спрямованих відгалужувачів, які б забезпечували хорошу розв'язку між випромінюючим та приймальним хвилевідними каналами, є іншою складною технічною задачею. Тому для систем неруйнівної діагностики, що випускаються серійно, більш придатними є методики високочастотних ши-

рокосмугових вимірювань, які не потребують визначення комплекснозначних параметрів та вимірюють амплітуду пройденого, а не відбитого від об'єкта електромагнітного поля.

Це спостереження спонукало нас до вивчення оберненої задачі проходження за умови частково відомих вихідних даних. А саме, вихідними даними у досліджуваній оберненій задачі слугуватимуть абсолютні значення вимірних параметрів, на відміну від комплексних параметрів у традиційному формулюванні. Така постановка вимагає розвитку нового напрямку досліджень, у якому теоретичну основу опрацювання результатів вимірювань розсіяного електромагнітного поля складає об'єднання теорії обернених задач для диференціальних рівнянь гіперболічного типу та теорії функцій комплексної змінної. Основними завданнями при цьому є доведення однозначності розв'язку оберненої задачі та знаходження процедури його отримання.

Зазначимо, що зображення вимірних даних аналітичною функцією дає можливість установити фазу цієї функції за її модулем [10]. У роботі [11] показано, що коефіцієнт проходження хвиль є достатнім інформативним параметром для розв'язання оберненої задачі за певних граничних умов, яким задовольняє хвиля на межі розділу. Відомий метод розв'язання такої задачі для шаруватого пружного середовища, функція шуканих параметрів якого є кусково-постійною та має розриви у вузлах регулярної сітки, пропонується в [12]. У праці [13] обґрунтовано однозначність розв'язку гіперболічної задачі про розповсюдження пружних хвиль у середовищах з неперервною зміною параметрів. Через надання певних характеристик збудження такого пружного середовища описано методи розв'язання оберненої задачі, коли вихідними даними є залежність амплітуди пройденної хвилі від часу її поширення [14,15]. Створення методів синтезу багатошарових структур із заданими енергетичними характеристиками розсіювання плоских електромагнітних хвиль, що базуються на мінімізаційних підходах [16], обговорюватиметься в іншій роботі.

Метою даної роботи є всебічний аналіз оберненої задачі проходження монохроматичних хвиль для побудови процедури реконструкції параметрів плоского шаруватого діелектрика за відомими абсолютними значеннями коефіцієнта проходження.

## 2. Особливості формулювання прямої та оберненої задачі

Поширення плоскої електромагнітної хвилі у плоских діелектричних шаруватих структурах можна описати одновимірною моделлю. У такій моделі напруженість поля  $E$  у довільній точці  $x$  задовольняє хвильове рівняння:

$$d^2E(x)/dx^2 + \omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon(x)E(x) = 0, \quad (1)$$

де  $\epsilon_0$  та  $\mu_0$  – діелектрична та магнітна проникності вакууму.

Надалі вважатимемо, що функція відносної діелектричної проникності  $\epsilon(x)$  є кусково-постійною через однорідність матеріалів кожного шару, а відносна магнітна проникність  $\mu$  – сталою і рівною одиниці. Після заміни змінних  $\tau(x) = \int_0^x \sqrt{\epsilon(x')\epsilon_0\mu_0} dx'$  розв'язок  $E(x) = e(\tau)$  рівняння (1) набуде вигляду

$$e(\tau) = a_j(\omega) \exp(i\omega\tau) + b_j(\omega) \exp(-i\omega\tau)$$

у кожному шарі  $\tau_{j-1} < \tau \leq \tau_j$ , де  $\tau_j = \tau(x_j) = \sum_{n=0}^j d_n \sqrt{\epsilon_n \epsilon_0 \mu_0}$  – значення змінної  $\tau$  на поверхнях розділу шарів;  $j = \overline{1, N}$  – номер шару діелектрика;  $d_j = (x_j - x_{j-1})$  та  $\epsilon_j$  – товщина та відносна діелектрична проникність  $j$ -го шару;  $a_j(\omega)$  та  $b_j(\omega)$  – коефіцієнти, які визначають співвідношення між хвилями для частоти  $\omega$ , що поширюються у протилежних напрямках. Вільний простір, що оточує багатошарову структуру, складається із двох безмежних шарів  $(-\infty, \tau_0)$  та  $(\tau_N, \infty)$  з  $j=0$  та  $j=N+1$  відповідно, у яких діелектрична проникність дорівнює  $\epsilon_0$ .

Взаємозв'язок коефіцієнтів  $a_j(\omega)$  та  $b_j(\omega)$  у різних шарах структури можна встановити з умов неперервності функцій  $E$  та  $\sqrt{\epsilon} dE/d\tau$ , тобто з рівностей  $E(\tau_j - 0) = E(\tau_j + 0)$  та  $\sqrt{\epsilon(\tau_j - 0)} \frac{dE(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_j-0} = \sqrt{\epsilon(\tau_j + 0)} \frac{dE(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_j+0}$ .

Важливими параметрами при цьому є коефіцієнти розсіювання  $A_F(\omega)$  та  $B_F(\omega)$  всієї структури, які дорівнюють відповідно коефіцієнтам  $a_0(\omega)$  та  $b_0(\omega)$  безмежного шару з  $j=0$  за умови, що у безмежному шарі з  $j=N+1$

маємо  $a_{N+1}(\omega) = 1$  та  $b_{N+1}(\omega) = 0$ . Коефіцієнти розсіювання  $A_F(\omega)$  та  $B_F(\omega)$  визначають правосторонній  $R_F(\omega) = B_F(\omega)/A_F(\omega)$  та лівосторонній  $L_F(\omega) = -B_F(-\omega)/A_F(\omega)$  коефіцієнти відбиття, а також коефіцієнт проходження  $T_F(\omega) = 1/A_F(\omega)$ , що в сукупності складають матрицю розсіювання:

$$\mathbf{S}_F(\omega) := \begin{pmatrix} R_F(\omega) & T_F(\omega) \\ T_F(\omega) & L_F(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{A_F(\omega)} \begin{pmatrix} B_F(\omega) & 1 \\ 1 & -B_F(-\omega) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Елементи матриці розсіювання залежать від діелектричних проникностей шарів та їх товщин [5]:

$$\begin{pmatrix} A_F(\omega) & B_F(-\omega) \\ B_F(\omega) & A_F(-\omega) \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^N \frac{1}{2\rho_{j+1}} \times \begin{pmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) & (\rho_{j+1} - \rho_j) \exp(-i2\omega\tau_j) \\ (\rho_{j+1} - \rho_j) \exp(i2\omega\tau_j) & (\rho_{j+1} + \rho_j) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де  $\rho_j = \sqrt{\mu_\epsilon/\epsilon_\epsilon} \epsilon_j$  – характеристичний імпеданс  $j$ -го шару.

Завдяки властивості  $\overline{\mathbf{S}_F(\omega)} = \mathbf{S}_F(-\omega)$  та компактності носія функції  $(\epsilon(x)-1)$  елементи матриці розсіювання для безвратного середовища задовольняють для дійсних  $\omega$  рівностям:

$$|A_F(\omega)|^2 - |B_F(\omega)|^2 = 1 \quad \text{та} \\ |L_F(\omega)|^2 + |T_F(\omega)|^2 = 1.$$

Пряма задача розсіювання полягає у знаходженні невідомих коефіцієнтів  $R_F(\omega)$ ,  $L_F(\omega)$ ,  $T_F(\omega)$  матриці (2) для заданих параметрів середовища, тобто для відомої функції  $\epsilon(x)$ . На відміну від прямої в оберненій задачі діелектрична проникність  $\epsilon_j$  та товщина  $d_j$   $j$ -го шару, а також кількість шарів  $N$  є невідомими величинами. У класичному формулюванні оберненої задачі [1-5] частотні залежності коефіцієнта відбиття, який є комплексною функцією, розглядають як вихідні дані. У даній роботі обернену

задачу розсіювання сформульовано як задачу визначення дійсних параметрів  $\epsilon_j$ ,  $d_j$ ,  $N$  за абсолютними значеннями коефіцієнта проходження  $|T_F(\omega)|$ . Іншими словами, розвинуто ідею визначення цих параметрів за абсолютними значеннями коефіцієнтів розсіювання  $|A_F(\omega)| = 1/|T_F(\omega)|$  та  $|B_F(\omega)| = \sqrt{1 - |T_F(\omega)|^2} / |T_F(\omega)|$ .

Для відомих комплекснозначних функцій  $A_F(\omega)$  та  $B_F(\omega)$  параметри діелектричного шаруватого середовища можна обчислити згідно з запропонованою в роботі [6] рекурентною процедурою, здійснивши попередньо оцінку всіх параметрів ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  та  $M$ ) тригонометричних багаточленів:

$$A_F(\omega) := \sum_{p=1}^M \alpha(p) \exp(i\kappa(p)\omega), \quad (4)$$

$$\exp(-i\tau_0\omega) B_F(\omega) := \sum_{p=1}^M \beta(p) \exp(i\kappa(p)\omega). \quad (5)$$

Тут  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  – дійсні величини, причому  $\kappa(1) = 0$ ,  $\kappa(p) > 0$  при  $p > 1$  та  $\kappa(M) = \tau_N$ . Таким чином, досліджувана обернена задача зводиться до визначення комплекснозначних функцій  $A_F(\omega)$  та  $B_F(\omega)$  за їх абсолютними значеннями, які безпосередньо обчислюються за вихідними даними задачі – модулем частотної залежності коефіцієнта проходження  $|T_F(\omega)|$ .

### 3. Відновлення функції $A_F(\omega)$ за її абсолютним значенням

Задачу (1) можна трактувати як спектральну задачу для оператора  $H := \frac{1}{\mu_\epsilon \mu_\epsilon \epsilon_\epsilon(x)} \frac{d^2}{dx^2}$  який, як відомо з теорії операторів, має лише неперервний спектр, що заповнює додатну частину дійсної осі [1]. Оскільки кожен нуль функції  $A_F(\omega)$  у верхній комплексній півплощині  $\omega$  породжує власне значення  $\omega^2$  оператора  $H$ , функція  $A_F(\omega)$  не має нулів у верхній комплексній півплощині. У поєднанні з аналітичністю  $A_F(\omega)$  у верхній півплощині це дає можливість відновити фазу функції  $A_F(\omega)$  на дійсній осі за її модулем.

**Твердження 1.** Комплексне значення коефіцієнта  $A_F(\omega) = |A_F(\omega)| \exp(i\varphi_A(\omega))$  на дійсній осі

можна однозначно відновити за його абсолютним значенням  $|A_F(\omega)| = 1/|T_F(\omega)|$ .

В основі доведення твердження покладено властивості інтеграла Коші [17], який встановлює залежність між дійсною та уявною частинами аналітичної функції. Оскільки функція  $A_F(\omega)$  є аналітичною і не має нулів у верхній півплощині, її логарифм є також однозначною аналітичною функцією:

$$\log(A_F(\omega)) = \log|A_F(\omega)| + i\varphi_A(\omega). \quad (6)$$

Співвідношення між дійсною та уявною складовими у формулі (6) можна виразити через інтеграл Коші. Провівши контур через дійсну вісь і замкнувши його у безмежності у верхній півплощині, отримаємо співвідношення:

$$\varphi_A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|A_F(\omega')|^2}{\omega - \omega'} d\omega', \quad (7)$$

де  $\mathbf{P} \int d\omega$  – головне значення інтеграла. Твердження доведене.

**Зауваження.** Фазу  $\varphi_A(\omega)$  функції  $A_F(\omega)$  можна конструктивно знайти у вигляді

$$\varphi_A(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\vartheta_n \omega), \quad (8)$$

де коефіцієнти  $c_n$  та  $\vartheta_n$  можна обчислити аналітично за коефіцієнтами  $\alpha$  та  $\kappa$  ряду (4). Дійсно, в результаті перемноження тригонометричних багаточленів (4) із скінченною кількістю доданків отримуємо також багаточлен із скінченною кількістю доданків:

$$|A_F(\omega)|^2 = A_F(\omega)A_F(-\omega) = \sum_{p=1}^K u_p \exp(i\gamma_p \omega), \quad (9)$$

де коефіцієнти  $u_p$ ,  $\gamma_p$  та  $K$  можна обчислити безпосередньо за значеннями  $\alpha$ ,  $\kappa$  та  $M$ .

Багаточлен (9) завжди додатний на дійсній осі  $\omega$ , і його можна зобразити як  $|A_F(\omega)|^2 =$

$\sigma(1+r(\omega))$ , де  $\sigma$  – деяка стала, а  $r(\omega)$  – функція, що задовольняє умову  $|r(\omega)| < 1$ . Можливість такого зображення дозволяє скористатися розкладом логарифма функції у вигляді збіжного ряду:

$$\log(1+r(\omega)) = r(\omega) - \frac{r(\omega)^2}{2} + \frac{r(\omega)^3}{3} - \frac{r(\omega)^4}{4} + \dots \quad (10)$$

У свою чергу, логарифм функції у чисельнику підінтегральної функції виразу (7) матиме вигляд:

$$\log(A_F(\omega)A_F(-\omega)) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\vartheta_n \omega), \quad (11)$$

де коефіцієнти  $c_n$  та  $\vartheta_n$  можна обчислити з коефіцієнтів  $u_p$  та  $\gamma_p$ , належним чином сумуючи косинуси з однаковими аргументами при перемноженні тригонометричних рядів у виразі (10).

Щоб отримати вираз (8), підставимо ряд (11) у інтеграл (7) та скористаємося тотожністю

$$\sin(\theta\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\theta\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'.$$

Отже, за відомою абсолютною величиною  $|A_F(\omega)| = 1/|T_F(\omega)|$  процедура реконструкції фази (6) коефіцієнта розсіювання зводиться до знаходження коефіцієнтів скінченного та безмежного рядів, якими можна записати  $|A_F(\omega)|^2$  і  $\log(|A_F(\omega)|^2)$  відповідно.

Виділимо окремий випадок, коли значення оптичних товщ  $d_j \sqrt{\epsilon_j \epsilon_6 \mu_6}$  шаруватої структури належать деякій регулярній сітці з кроком  $\delta/2$ . Покладемо  $D = \tau_N/\delta$ , тоді  $\forall p \in \overline{1, M}$   $\exists t_p \in \overline{0, D} : \kappa(p) = t_p \delta$ , а  $A_F(\omega)$  можна подати як степеневий багаточлен змінної  $z = \exp(i\delta\omega)$ :

$$A_F(\omega) = w(0) + w(1)z^1 + \dots + w(D-1)z^{D-1} + w(D)z^D, \quad (12)$$

де  $w(t_p) = \alpha(p)$  у відповідності до виразу (4). Аналогічно можна записати тригонометричний поліном для виразу (9) як

$$A_F(\omega)A_F(-\omega) = |A_F(\omega)|^2 = (W(0) + W(1)z^1 + \dots + W(2D-1)z^{2D-1} + W(2D)z^{2D})z^{-D}, \quad (13)$$

з деякими коефіцієнтами  $W(q)$ ,  $q = \overline{0, (2D)}$ . Формула (13) дозволяє продовжити функцію  $A_F(\omega)A_F(-\omega)$  в усю комплексну площину за її відомими значеннями на дійсній осі.

З виразу (12) випливає, що при належності оптичних товщ шарів до регулярної сітки комплексні нулі функції  $A_F(\omega) \in 2\pi/\delta$ -періодичними і розташованими у нижній комплексній півплощині  $\mathbb{C}^-$  вздовж дійсної осі частот  $\omega$ . У даному випадку комплекснозначну функцію  $A_F(\omega)$  можна реконструювати за її модулем  $|A_F(\omega)|$ , знаходячи та належним чином відбираючи корені тригонометричного полінома (13) у смугі  $\Pi := \{\omega \in \mathbb{C} \mid -\pi/\delta < \Re(\omega) \leq \pi/\delta\}$ . Позначимо символом  $\Pi^\pm := \Pi \cap \mathbb{C}^\pm$  частини смуги  $\Pi$  у верхній/нижній півплощинах.

**Теорема 1.** Шуканий комплексний коефіцієнт розсіювання  $A_F(\omega)$  можна записати у вигляді

$$A_F(\omega) = w(D) \prod_{n=1}^D (z - \exp(i\delta f_n)), \quad (14)$$

де  $f_n$  – усі нулі функції (13) у півсмугі  $\Pi^-$ , а  $w(D) = (-1)^D \sqrt{W(2D)/\chi_1}$  з  $\chi_1 = (-1)^D \prod_{n=1}^D \exp(i\delta f_n)$ .

Для доведення цієї теореми використаємо властивість відсутності нулів функції  $A_F(\omega)$  у верхній комплексній півплощині  $\omega$ . Оскільки кожному нулеві функції  $A_F(\omega)$  відповідає симетричний відносно початку координат нуль функції  $A_F(-\omega)$ , добуток цих функцій  $A_F(\omega)A_F(-\omega)$  матиме нулі як у верхній, так і в нижній півплощинах. Тому для встановлення комплексної функції  $A_F(\omega)$  за її модулем  $|A_F(\omega)|$  необхідно знайти значення полінома  $|A_F(\omega)|^2$  на дійсній осі та визначити його коефіцієнти  $W(q)$ ,  $q = \overline{0, (2D)}$ . Це дає можливість знайти усі комплексні корені тригонометричного полінома (13) та вибрати з них лише ті, що належать до  $\Pi^-$ , оскільки всі корені з  $\Pi^+$  є коренями функції  $A_F(-\omega)$ .

Щоб знайти коефіцієнт  $W(2D)$ , зауважимо спершу, що  $W(2D) = w(0)w(D)$ . Порівнюючи

значення виразів (12) та (14) при  $z = 0$ , знаходимо, що  $w(0) = w(D)\chi_1$ , а тому  $(w(D))^2 = W(2D)/\chi_1$ . З формули (3) випливає, що  $w(0) > 0$ , що визначає вибір знаку перед коренем для функції  $w(D) = (-1)^D \sqrt{W(2D)/\chi_1}$ . Теорему доведено.

#### 4. Встановлення функції $B_F(\omega)$ за її абсолютним значенням

На відміну від коефіцієнта розсіювання  $A_F(\omega)$  коефіцієнт  $B_F(\omega)$  може мати нулі в усій комплексній площині. Тому ми не можемо застосувати міркування твердження 1 для розв'язання задачі про встановлення фази комплексного коефіцієнта  $B_F(\omega)$  за його абсолютним значенням

$|B_F(\omega)| = \sqrt{1 - |T_F(\omega)|^2} / |T_F(\omega)|$  на дійсній осі. Побудуємо за відомими значеннями амплітуди  $|B_F(\omega)|$  функцію

$$|B_F(\omega)|^2 = B_F(\omega)B_F(-\omega) = \sum_{p=1}^K y_p \exp(i\gamma_p \omega) \quad (15)$$

та продовжимо її цією формулою до аналітичної функції в усій комплексній площині. Проблемність задачі про відновлення фази полягає в тому, що кожен нуль відомої функції (15) може бути як нулем функції  $B_F(\omega)$ , так і нулем функції  $B_F(-\omega)$ , і це уможливує неєдиність розв'язку.

Покажемо спершу, що нулі  $B_F(\omega)$  на дійсній осі не спричиняють неєдиності. Для цього зауважимо, що тригонометричний многочлен  $B_F(\omega)$  має дійсні коефіцієнти, а тому його нулі симетричні відносно уявної осі. Таким чином, разом із кожним своїм дійсним нулем  $\omega_0$  функція  $B_F(\omega)$  має теж нуль  $-\omega_0$ . Отже, всі дійсні нулі функції (15) мають парну кратність, причому функції  $B_F(\omega)$  та  $B_F(-\omega)$  мають однакові дійсні нулі однакової кратності.

Як частковий приклад розглянемо задачу про встановлення фази функції з безмежною кількістю дійсних коренів  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ , що періодично розташовані з кроком  $\Delta_\omega$ . Таку функцію можна записати у вигляді  $B_F(\omega) = S(\omega)(\exp(i2\pi\omega/\Delta_\omega) - \exp(i2\pi\omega_0/\Delta_\omega))$ , де  $S(\omega) = |S(\omega)|\exp(i\varphi_S(\omega))$  – функція без дійсних нулів, а  $\omega_0$  може набувати значень 0 або  $\Delta_\omega/2$ . Квадрат модуля функції

$B_F(\omega)$ , заданий як вихідні дані у задачі відновлення, подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} |B_F(\omega)|^2 &= B_F(\omega)B_F(-\omega) = \\ &= |S(\omega)|^2 (\exp(i2\pi\omega/\Delta_\omega) - \exp(i2\pi\omega_0/\Delta_\omega)) \times \\ &\times (\exp(-i2\pi\omega/\Delta_\omega) - \exp(-i2\pi\omega_0/\Delta_\omega)) = \\ &= 4|S(\omega)|^2 \sin^2(\pi(\omega_0 - \omega)/\Delta_\omega). \end{aligned}$$

Фазу функції, квадрат абсолютного значення якої відповідає множнику  $4 \sin^2(\pi(\omega_0 - \omega)/\Delta_\omega)$  можна обчислити за допомогою інтеграла Коші:

$$\begin{aligned} \varphi_{\sin}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |4 \sin^2(\pi(\omega_0 - \omega')/\Delta_\omega)|}{\omega - \omega'} d\omega' = \\ &= \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |\sin(\pi(\omega_0 - \omega')/\Delta_\omega)|}{\omega - \omega'} d\omega'. \end{aligned} \quad (16)$$

У роботі [18] аналітично встановлено результат перетворення Гільберта такого класу функцій:

$$\frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |\sin(\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega' = \omega - \pi \left[ \frac{\omega}{\pi} \right] + \theta, \quad (17)$$

де  $[a]$  – ціла частина числа  $a$ , а  $\theta$  – сталий невизначений зсув. З виразів (16) та (17) випливає, що фаза є періодичною функцією, а саме

$$\varphi_{\sin}(\omega) = \pi \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Delta_\omega} \right) - \pi \left[ \frac{\omega - \omega_0}{\Delta_\omega} \right] + \theta.$$

Зауважимо, що  $2 \left| \sin(\pi(\omega_0 - \omega)/\Delta_\omega) \right| \exp(i\varphi_{\sin}(\omega)) = (\exp(2\pi i\omega/\Delta_\omega) - \exp(2\pi i\omega_0/\Delta_\omega)) \exp(i\theta')$  для деякого сталого зсуву фази  $\theta'$ . У результаті добутку  $S(\omega) 2 \left| \sin(\pi(\omega_0 - \omega)/\Delta_\omega) \right| \exp(i\varphi_{\sin}(\omega))$  дорівнює вихідній функції  $B_F(\omega)$  з точністю до сталого унімодулярного множника.

За допомогою схожих обчислень можна відновити фазу функції за її модулем і у випадку довільного розташування дійсних нулів (пор. [18]).

Розглянемо тепер недійсні нулі функції (15) та вкажемо причину неєдиності розв'язку задачі про відновлення фази функції  $B_F(\omega)$  за її модулем на дійсній осі.

**Твердження 2.** Нехай  $B_F(\omega)$  є розв'язком задачі про відновлення комплекснозначної функції за її модулем на дійсній осі, а  $\omega_0$  – недійсний нуль функції  $B_F(\omega)$ . Тоді існує “спряжений” розв'язок задачі  $\tilde{B}_F(\omega)$ , що відрізняється від  $B_F(\omega)$  фазовим множником  $\exp(i\varphi_{\omega_0}(\omega))$ , де

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega_0}(\omega) &= \\ &= \begin{cases} 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\Im(\omega_0)}{\omega - \Re(\omega_0)} \right), & \omega - \Re(\omega_0) > 0; \\ \pi \operatorname{sign}(\Im(\omega_0)), & \omega - \Re(\omega_0) = 0; \\ 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\Im(\omega_0)}{\omega - \Re(\omega_0)} \right) + \\ + 2\pi \operatorname{sign}(\Im(\omega_0)), & \omega - \Re(\omega_0) < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Для доведення використаємо теорему Вейерштрасса, яка говорить, що будь-яку цілу функцію  $B_F(\omega)$  з нулем у точці  $\omega_0$  можна записати у факторизованому вигляді  $B_F(\omega) = S(\omega)(\omega - \omega_0)$ . “Спряжену” функцію задамо рівністю

$$\tilde{B}_F(\omega) = S(\omega)(\omega - \bar{\omega}_0) = B_F(\omega) \frac{(\omega - \bar{\omega}_0)}{(\omega - \omega_0)}. \quad (19)$$

Іншими словами, функції  $B_F(\omega)$  та  $\tilde{B}_F(\omega)$  відрізняються множником Бляшке, а тому мають однакові модулі на дійсній осі. При цьому їхні фази відрізняються на фазу  $\varphi_{\omega_0}(\omega)$  множника Бляшке, що, як неважко переконатися, має вигляд (18).

Якщо функція (19) має  $N_{zero}$  нулів у верхній півплощині, то, зрозуміло, існуватиме  $2^{N_{zero}}$  різних аналітичних функцій із заданим модулем на дійсній прямій. Зауважимо, однак, що не кожна така функція буде коефіцієнтом розсіювання  $B_F(\omega)$  для якоїсь скінченної діелектричної структури. Причиною цього є те, що нулі для  $B_F(\omega)$  у верхній півплощині не можна вибирати

довільним чином. Приміром, у випадку співмірності оптичних товщ шарів досліджуваної структури з величиною  $\delta/2$  нулі функції  $B_F(\omega)B_F(-\omega)$  утворюватимуть  $2\pi/\delta$ -періодичні серії, і не можна вибирати лише частину котроїсь із них як нулі функції  $B_F(\omega)$ .

У зазначеному "періодичному" випадку можна описати усі розв'язки задачі відновлення фази функції  $B_F(\omega)$  за її абсолютними значеннями на дійсній осі. Процедуру знаходження фази розроблено з використанням властивості періодичності розташування нулів функції  $B_F(\omega)$ . За аналогією до аналізу, виконаного для коефіцієнта розсіювання  $A_F(\omega)$  за умови періодичності розташування його нулів, коефіцієнт розсіювання  $B_F(\omega)$  можна подати тригонометричним поліномом:

$$\begin{aligned} \exp(-i\tau_0\omega)B_F(\omega) &= \\ &= v(0) + v(1)z^1 + \dots + v(D-1)z^{D-1} + v(D)z^D, \end{aligned}$$

де  $v(t_p) = \beta(p)$  для такого цілого  $t_p$ , що  $\kappa(p) = t_p \delta$  згідно з виразом (5). Аналогічно можна записати тригонометричний поліном для виразу (19):

$$\begin{aligned} B_F(\omega)B_F(-\omega) &= |B_F(\omega)|^2 = (V(0) + \\ &+ V(1)z^1 + \dots + V(2D-1)z^{2D-1} + V(2D)z^{2D})z^{-D}. \end{aligned} \quad (20)$$

Багаточлен (20) є відомим на дійсній  $\omega$ -осі, що дозволяє знайти усі його коефіцієнти і продовжити функцію (20) в усю комплексну площину цією ж формулою.

Дослідимо тепер властивості нулів функції  $B_F(\omega)B_F(-\omega)$ . Оскільки коефіцієнти багаточлена  $B_F(\omega)$  є дійсними, то  $\overline{B_F(\omega)} = B_F(-\bar{\omega})$ , а нулі симетричні відносно уявної осі. Тому якщо  $\omega_0$  – нуль функції  $B_F(\omega)B_F(-\omega)$ , то її нулями будуть теж  $-\bar{\omega}_0$ ,  $-\omega_0$  та  $\bar{\omega}_0$ . Як уже зазначалося, нулі функції (20) утворюють  $2\pi/\delta$ -періодичні серії, що відповідають сталому значенню  $z$ . Отже, у смузі  $\Pi := \{\omega \in \mathbb{C} | -\pi/\delta < \Re(\omega) \leq \pi/\delta\}$  функція (20) має рівно  $2D$  нулів з урахуванням кратностей. Усі нулі у частині півсмуги  $\Pi^+$ , яку позначимо через  $\Pi_+^+ := \{\omega \in \mathbb{C} | 0 \leq \Re(\omega) \leq \pi/\delta, \Im(\omega) \geq 0\}$  можна розбити на три (можливо, порожні) групи:

- 1) невід'ємні нулі  $\omega_k = v_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n'$ , кратності 2 кожен,  $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{n'}$ ;
- 2) чисто уявні нулі  $\omega_k = i\eta_k$ ,  $k = (n'+1), \dots, (n'+n'')$ , з  $0 \leq v_{n'+1} \leq v_{n'+2} \leq \dots \leq v_{n'+n''}$ ;
- 3) нулі  $\omega_k = \xi'_k + i\xi''_k$ ,  $\xi'_k > 0$ ,  $\xi''_k > 0$ ,  $k = (n'+n''+1), \dots, n$ .

У кожній групі ми повторюємо кожен нуль відповідно до його кратності. Уведемо теж набори  $\sigma_m = \{\sigma_{k,m}\}$ ,  $k = (n'+1), \dots, n$ , де  $\sigma_{k,m} = 1$  або  $\sigma_{k,m} = -1$ .

Тоді має місце теорема про ідентифікацію всіх неоднозначних розв'язків сформульованої задачі.

**Теорема 2.** Усі можливі варіанти шуканого комплексного коефіцієнта розсіювання  $B_F(\omega)$  з точністю до невідомого коефіцієнта  $\exp(-i\tau_0\omega)$  можна визначити формулою

$$\begin{aligned} \exp(-i\tau_0\omega)B_{F,m}(\omega) &= \\ &= v_m(D) \prod_{k=1}^{n'} (z - \exp(i\delta v_k)) (z - \exp(-i\delta v_k)) \times \\ &\times \prod_{k=n'+1}^{n'+n''} (z - \exp(-\sigma_{k,m} \delta \eta_k)) \times \\ &\times \prod_{k=n'+n''+1}^n (z - \exp(i\sigma_{k,m} \delta (\xi'_k + i\xi''_k))) \times \\ &\times (z - \exp(i\sigma_{k,m} \delta (-\xi'_k + i\xi''_k))). \end{aligned}$$

Тут коефіцієнти  $v_m(D)$  та  $V(2D)$  співвідносяться як  $v_m(D) = \pm \sqrt{V(2D)/\chi_{2,m}}$ , де  $\chi_{2,m} = (-1)^n \prod_{k=n'+1}^{n'+n''} \exp(-\sigma_{k,m} \delta \eta_k) \prod_{k=n'+n''+1}^n \exp(-2\sigma_{k,m} \delta \xi''_k)$ . Кількість різних розв'язків дорівнює  $2^{n-n'}$ .

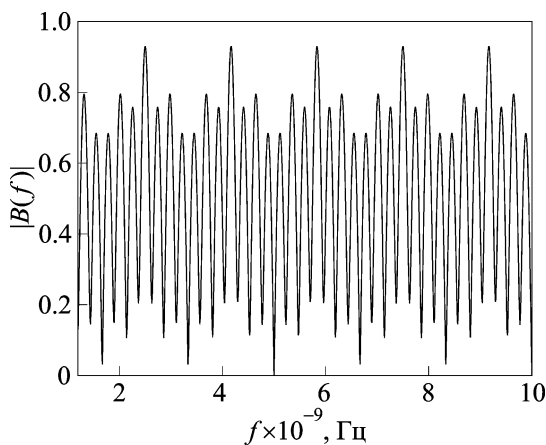
На відміну від функції  $A_F(\omega)$  у даному випадку доведення базується на твердженні про можливість розташування коренів  $B_F(\omega)$  в усій комплексній площині. Кожному нулеві функції  $B_F(\omega)$  відповідає симетричний відносно початку координат комплексної площини нуль функції  $B_F(-\omega)$ . Отже, добуток функцій  $B_F(\omega)B_F(-\omega)$  матиме нулі як у верхній, так і в нижній півплощині, при цьому належність недійсного нуля до  $B_F(\omega)$  чи до  $B_F(-\omega)$  встановити неможливо, як і неможливо встановити значення  $\tau_0$  за модулем  $|B_F(\omega)|$ . Якщо  $\sigma_{k,m} = 1$  для  $k = (n'+1), \dots, (n'+n'')$ , то відповідне чисто

уявне значення  $i\eta_k$  є нулем  $B_F(\omega)$ , інакше – нулем функції  $B_F(-\omega)$ . Аналогічно пара симетричних точок  $(\xi'_k + i\xi''_k)$  та  $(-\xi'_k + i\xi''_k)$ ,  $k > n' + n''$ , є нулями  $B_F(\omega)$  при  $\sigma_{k,m} = 1$  та нулями  $B_F(-\omega)$  інакше.

Значення коефіцієнта  $\nu_m(D)$  знайдемо як у доведенні теореми 1.

Оскільки всі побудовані таким чином тригонометричні багаточлени  $B_{F,m}(-\omega)$  мають дійсні коефіцієнти, вони справді є коефіцієнтами розсіювання для деяких діелектричних структур зі скінченною кількістю шарів. Таким чином, кількість різних розв'язків задачі про встановлення комплексної величини  $B_F(-\omega)$  за її модулем дорівнює кількості різних наборів  $\sigma_m$ , тобто  $2^{n-n'}$ . Теорему доведено.

На відміну від результатів аналізу подібної задачі у роботі [19] запис матриці розсіювання через коефіцієнти розсіювання  $A_F(-\omega)$  та  $B_F(-\omega)$  у вигляді скінченних тригонометричних поліномів дозволив окреслити випадки зі скінченною кількістю розв'язків оберненої задачі. Як приклад, на рис. 1 наведемо вихідні дані для оберненої задачі  $|B_F(\omega)|$ , яку розв'язано чисельно. Відповідна функція  $B_F(\omega)B_F(-\omega)$ , продовжена аналітично на всю комплексну площину, має у смузі  $\Pi$  три пари недійсних симетричних відносно уявної осі нулів, а тому породжує  $2^3 = 8$  різних структур. Нижче (рис. 2) ми наводимо чотири структури; інші чотири отримуються із них зміною напрямку  $z$  на протилежний.



**Рис. 1.** Абсолютне значення коефіцієнта розсіювання  $B_F(f)$  для частоти  $f = \omega/(2\pi)$ , який описується тригонометричним поліномом з шістьма періодичними серіями недійсних нулів

## 5. Однозначний розв'язок оберненої задачі проходження

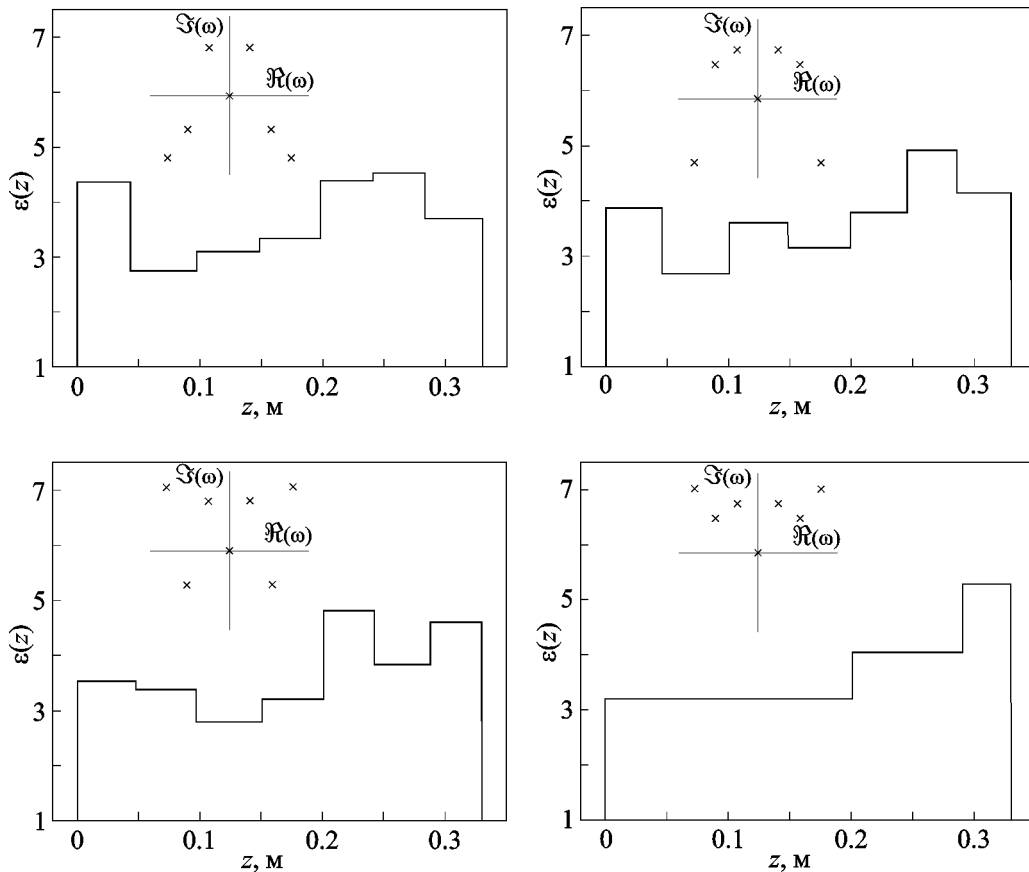
Описана процедура знаходження багатозначного розв'язку оберненої задачі є практично цінною лише умовно, оскільки не дозволяє єдино охарактеризувати досліджувану структуру за вимірними амплітудними характеристиками проходження електромагнітної хвилі. Тому важливою проблемою є регуляризація такої задачі шляхом накладання додаткових умов, які дозволяють однозначно її розв'язати.

Аналіз формули (3) показує, що діелектрична проникність  $\epsilon_1$  та товщина  $d_1$  першого шару є достатніми параметрами для однозначного розв'язання оберненої задачі проходження за заданим  $|T_F(\omega)|$  тільки тоді, коли всі значення оптичних товщ  $d_j \sqrt{\epsilon_j \epsilon_0 \mu_0}$  є несумірними (не належать вузлам будь-якої регулярної сітки). Варто зауважити, що за значеннями параметрів  $\gamma_p$  у виразі (9), які можна оцінити за вихідними даними  $1/|T_F(\omega)|^2$  оберненої задачі проходження, можна встановити оптичні товщі всіх шарів досліджуваної структури. Отже, за результатами вимірювань можна підтвердити або заперечити можливість однозначного розв'язання оберненої задачі проходження при апріорно відомих параметрах першого шару. На жаль, наявні похибки у вимірних значеннях коефіцієнта проходження  $|T_F(\omega)|$  та похибки оцінювання моделі (9) для коефіцієнта розсіювання  $|A_F(\omega)|^2 = 1/|T_F(\omega)|^2$  перекреслюють практичне значення такого розв'язку задачі, бо не дають змоги гарантувати несумірність оптичних довжин шаруватої структури за неточними даними. Це вказує на необхідність використання додаткових вихідних даних.

Одним з підходів до довізначення задачі є формування множини вихідних даних за результатами двох експериментів. Ідею такого підходу для визначення неперервних потенціалів в оберненій задачі розсіювання розвинуто в праці [20]. У випадку кусково-постійних функцій діелектричної проникності постають нові перспективи застосування такого підходу для розв'язання оберненої задачі проходження електромагнітних хвиль. Наступна теорема висвітлює сутність такого підходу.

**Теорема 3.** Для відомих діелектричної проникності  $\epsilon_1$  та товщини  $d_1$  першого шару одно-





**Рис. 2.** Приклад шаруватих структур та відповідне розташування коренів функцій  $B_F(\omega)$  у смузі  $\Pi$ , які отримано як розв'язки оберненої задачі для заданої функції  $|B_F(\omega)|$ , зображеної на рис. 1

значний розв'язок оберненої задачі проходження відносно параметрів шаруватої структури можна отримати за заданими абсолютними значеннями коефіцієнта проходження крізь усю структуру  $|T_F(\omega)| = 1/|A_F(\omega)|$  та коефіцієнта проходження  $|T_S(\omega)| = 1/|A_S(\omega)|$  крізь структуру без першого відомого шару.

Для доведення такої теореми розглянемо моделі проходження хвилі через досліджувану структуру в обох експериментах. Вираз (3) дає можливість записати матриці коефіцієнтів розсіювання для невідомої структури та для структури з першим відомим шаром у вигляді:

$$\begin{pmatrix} A_F(\omega) & B_F(-\omega) \\ B_F(\omega) & A_F(-\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(\omega) & B_1(-\omega) \\ B_1(\omega) & A_1(-\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_S(\omega) & B_S(-\omega) \\ B_S(\omega) & A_S(-\omega) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

де  $A_1(\omega)$  та  $B_1(\omega)$  – коефіцієнти розсіювання діелектричного шару товщиною  $d_1$  з діелектричною проникністю  $\epsilon_1$  у вільному просторі з проникністю  $\epsilon_0$ . Їх можна виразити як

$$\begin{pmatrix} A_1(\omega) \\ B_1(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4\rho_1\rho_0)^{-1} \left( (\rho_1 + \rho_0)^2 - (\rho_1 - \rho_0)^2 e^{2i\omega d_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_1}} \right) \\ (4\rho_1\rho_0)^{-1} (\rho_1^2 - \rho_0^2) \left( 1 - e^{2i\omega d_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_1}} \right) \end{pmatrix}.$$

Вважаємо, що результатами двох експериментів є частотні залежності коефіцієнтів проходження  $|T_F(\omega)| = 1/|A_F(\omega)|$  та  $|T_S(\omega)| = 1/|A_S(\omega)|$ , за якими можна обчислити комплексні величини  $A_S(\omega)$  та  $A_F(\omega)$ , як показано у зауваженні до

теореми 2. Виразивши реконструйовані комплексні значення  $A_S(\omega)$  та  $A_F(\omega) = A_1(\omega)A_S(\omega) + B_1(-\omega)B_S(\omega)$  згідно з виразом (21), знайдемо невідомий коефіцієнт розсіювання шаруватої структури:

$$B_S(\omega) = \frac{A_F(\omega) - A_1(\omega)A_S(\omega)}{B_1(-\omega)}. \quad (22)$$

Звідси також безпосередньо визначимо комплексний коефіцієнт відбиття  $R_S(\omega) = B_S(\omega)/A_S(\omega)$  для досліджуваної структури без першого відомого шару:

$$R_S(\omega) = \frac{1}{B_1(-\omega)} \left( \frac{A_F(\omega)}{A_S(\omega)} - A_1(\omega) \right). \quad (23)$$

Доведення теореми можна завершити посиланням на класичну теорію обернених задач розсіювання [3], де стверджується, що комплексна частотна залежність коефіцієнта відбиття є достатніми вихідними даними для єдиності розв'язку оберненої задачі. Більше того, за комплексними коефіцієнтами розсіювання  $A_S(\omega)$  та  $B_S(\omega)$ , заданими у обмеженому діапазоні частот, можна реконструювати параметри невідомої шаруватої структури, як показано в роботі [6].

Варто зазначити, що для числових обчислень вираз (22) краще записати як рівняння  $B_S(\omega)B_1(-\omega) = A_F(\omega) - A_1(\omega)A_S(\omega)$  відносно невідомого значення  $B_S(\omega)$ , а його розв'язок шукати, застосувавши один з регуляризаційних підходів, наприклад:

$$\tilde{B}_S(\omega) = \frac{(A_F(\omega) - A_1(\omega)A_S(\omega))B_1(\omega)}{B_1(-\omega)B_1(\omega) + \alpha_{reg}},$$

де  $\alpha_{reg}$  – коефіцієнт регуляризації, який визначено з розв'язку екстремальної задачі  $\alpha_{reg} = \arg \min_{\alpha} |A_S(\omega)A_S(-\omega) - \tilde{B}_S(\omega)\tilde{B}_S(-\omega) - 1|$ .

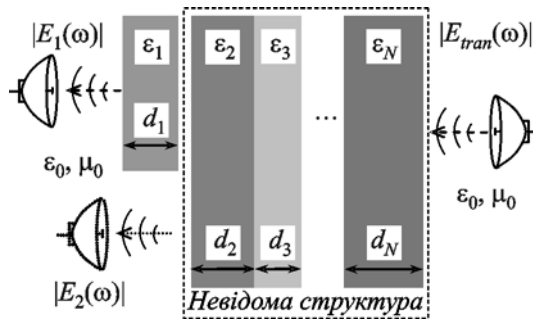
Регуляризований розв'язок дає можливість зменшити чутливість знаходження  $B_S(\omega)$  до похибок у вихідних даних. Аналогічну процедуру регуляризації можна застосувати до встановлення комплексного коефіцієнта відбиття  $R_S(\omega)$ , визначеного виразом (23).

З доведення теореми можна зробити висновок, що розвинутий метод розв'язання оберненої задачі проходження є “дискретним” варіантом підходу “двох шарів”, описаного в роботі [20]. Завдяки тому що відомі параметри першого шару безпосередньо визначають його характеристики розсіювання, підхід “двох шарів” [20] зведено до реконструкції фази за модулем аналітичних функцій  $|A_S(\omega)|$  та  $|A_F(\omega)|$ , що у випадку кусково-постійного потенціалу вимагає лише оцінки параметрів скінченних тригонометричних рядів та операцій з їх коефіцієнтами.

Як частковий випадок розглянемо задачу встановлення параметрів діелектричного шару у вільному просторі за характеристиками проходження плоскої нормально падаючої електромагнітної хвилі. Коефіцієнти розсіювання такого шару можна аналітично знайти за абсолютними значеннями коефіцієнта проходження  $|B_1(\omega)|^2 = |A_1(\omega)|^2 - 1 = (1/|T_1(\omega)|^2) - 1$ . При цьому знайдені функції є тригонометричними поліномами першого порядку, коефіцієнти якого цілком визначають параметри шару, зокрема

$$\begin{aligned} \frac{1}{|T_1(\omega)|^2} - 1 &= |B_1(\omega)|^2 = \\ &= \frac{(\rho_1^2 - \rho_0^2)^2}{8(\rho_1\rho_0)^2} \left( 1 - \cos(2\omega d_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_1}) \right). \end{aligned}$$

Вищенаведені теоретичні результати покладемо в основу опрацювання результатів вимірювання для систем неруйнівного контролю шаруватих структур. На рис. 3 наведено схеми експериментів для визначення частотних залежностей абсолютних значень коефіцієнта проходження, за якими потрібно встановлювати параметри шаруватої структури. У першому експерименті визначається абсолютне значення коефіцієнта проходження для усїєї структури, а в другому – для структури без першого шару з відомими параметрами. Для цього можна скористатися взірцевим плоским діелектричним листом з відомою діелектричною проникністю та товщиною або виконати окремий експеримент, який дозволить визначити параметри та-



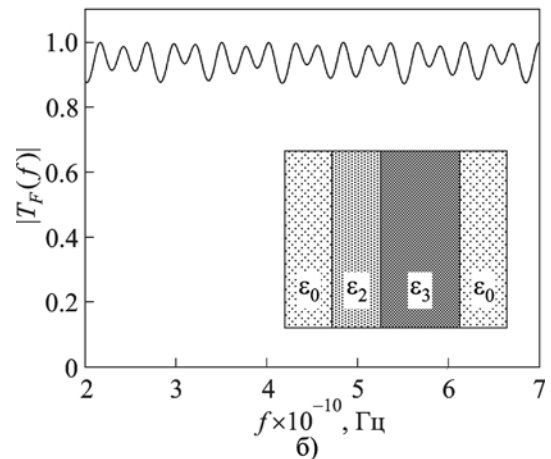
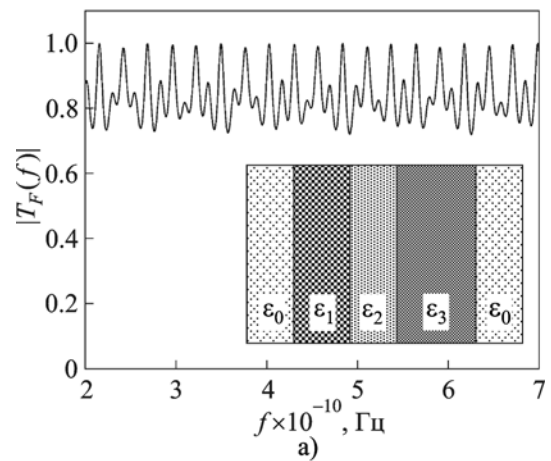
**Рис. 3.** Схема вимірювання абсолютних значень коефіцієнтів проходження  $|T_F(\omega)| = |E_1(\omega)|/|E_{tran}(\omega)|$  та  $|T_S(\omega)| = |E_2(\omega)|/|E_{tran}(\omega)|$  з метою визначення параметрів шаруватої діелектричної структури

кого діелектричного листа, як показано на вищенаведеному прикладі.

Для підтвердження вірогідності результатів, отриманих теоретично, виконано числовий експеримент, в якому змодельовано проходження електромагнітної хвилі крізь діелектричну структуру, перший шар якої має відомі параметри, наведені у табл. 1. На рис. 4, а показано частотну залежність модуля коефіцієнта проходження крізь таку структуру, а на рис. 4, б – коефіцієнт проходження для структури без першого шару. Регуляризований розв'язок задачі знаходження коефіцієнтів розсіювання  $A_S(\omega)$  та  $B_S(\omega)$  використано як вихідні дані для оберненої задачі розсіювання. Останню розв'язано відомим методом [6], а результати наведено у табл. 1 для порівняння з точними параметрами діелектричної проникності та товщини шарів. Незначну відмінність між оригінальними та відновленими параметрами структури можна пояснити процесом регуляризації, який спрямований на знаходження наближеного розв'язку. Загалом, результати числового експерименту свідчать про вірність тверджень, покладених в основу запропонованого методу розв'язку оберненої задачі та забезпечення єдиності її розв'язку.

**Таблиця 1.** Результати встановлення параметрів двошарової діелектричної структури за вимірними абсолютними значеннями коефіцієнтів проходження

Номер шару (j)	1	2	3
Точні значення $\epsilon_j/d_j$ , мм	7.8000/20	2.9000/20	2.1000/15
Обчислені значення $\epsilon_j/d_j$ , мм	7.8000/20	2.8933/20.023	2.0960/15.014



**Рис. 4.** Функції модуля коефіцієнта проходження для шаруватої структури (а) та для цієї ж структури без першого шару (б)

## 6. Висновок

Виконаний аналіз дозволив відшукати причину некоректності оберненої задачі проходження плоскої хвилі крізь шарувате діелектричне середовище, записаної відносно абсолютного значення коефіцієнта проходження, а також обґрунтувати алгоритм знаходження її єдиного розв'язку. Показано, що кожен недійсний нуль коефіцієнта розсіювання породжує неоднозначність розв'язку обер-

неної задачі. При цьому відмінність знайдених розв'язків визначається лише фазою відповідного множника Бляшке. Наявність періодично розташованих нулів на дійсній осі у функції модуля коефіцієнта відбиття пов'язана зі стрибками фази комплекснозначної функції коефіцієнта відбиття і не впливає на однозначність розв'язку. У випадку, коли нулі аналітичного продовження абсолютного значення коефіцієнта відбиття розташовані періодично, можна знайти всі можливі розв'язки задачі відновлення фази коефіцієнтів розсіювання за абсолютним значенням коефіцієнта проходження і, таким чином, усі розв'язки оберненої задачі.

Як показано, такі обернені задачі можна звести до однозначних за умови їх довизначення вихідними даними у вигляді абсолютного значення коефіцієнта проходження крізь структуру з частково відомими параметрами. В основу методу розв'язання оберненої задачі для багатослоєвої структури покладено твердження про можливість вираження елементів матриці розсіювання через скінченні тригонометричні ряди, співвідношення коефіцієнтів яких визначає параметри розривів шуканої функції діелектричної проникності, а аргументи комплексних експонент – відстань між цими розривами, або товщину шарів структури.

### Література

1. Khruslov E. Ya. and Shepelsky D. G. Review article: Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory // *Inverse problems*. – 1994. – Vol. 10, No. 1. – P. 1-37.
2. Gladwell G. M. L. *Inverse Problems in Scattering: An Introduction*. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 380 p.
3. Newton R. G. Inversion of reflection data for layered media: a review of exact methods // *Geophys. J. Int.* – 1982. – Vol. 69, No. 2. – P. 571-572.
4. Burridge R. The Gelfand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi integral equations of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems // *Wave Motion*. – 1980. – Vol. 2, Is. 4. – P.305-323.
5. Aktosun T., Klaus M., and van der Mee C. Recovery of discontinuities in a non-homogeneous medium // *Inverse Problems*. – 1996. – Vol. 12, No. 1. – P. 1-25.
6. Назарчук З. Т., Синявський А. Т. Визначення характеристик шаруватої структури за реконструйованою з коефіцієнтів відбиття матрицею розсіювання // *Радиофизика и Радиоастрономия*. – 2010. – Т. 15, №3. – С. 295-313.
7. Bryant G. H. *Principles of microwave measurements*. – London: IEE Electrical Measurement, 1993. – 415 p.
8. Джала В. Р., Капко Л. І. Радіохвильова діагностика плоскочарових діелектриків на підставі розв'язку оберненої задачі // *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. – 2009. – Т. 45, №3. – С. 117-122.
9. Roome S. J. Analysis of quadrature detectors using complex envelope notation // *IEE Proc. F: Radar and Signal Processing*. – 1989. – Vol. 136, Is. 2. – P. 95-100.
10. Klivanov M. V., Sacks P. E., and Tikhonravov A. V. The phase retrieval problem // *Inverse Problems*. – 1995. – Vol. 11, No. 1. – P. 1-28.
11. Claerbout J. F. Synthesis of a layered medium from its acoustic transmission response // *Geophysics*. – 1968. – Vol. 33. – P. 264-269.
12. Yagle A. E. The lattice algorithm of linear prediction applied to the inverse scattering problem given transmission data // *Int. Conf. proc. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-88*. – New York (USA). – 1988. – Vol. 3. – P. 1655-1658.
13. Jijun L. and Yuanming W. On Uniqueness of an Inverse Problem for a 1-D Wave Equation from Transmission Data // *SIAM J. Appl. Math.* – 1997. – Vol. 57, No. 1. – P. 195-204.
14. Rakesh and Sacks P. Impedance inversion from transmission data for the wave equation // *Wave Motion* – 1996. – Vol. 24, Is. 3. – P. 263-274.
15. Carroll R. and Santossa F. Impedance profile recovery from transmission data // *J. Acoustic Soc. Am.* – 1984. – Vol. 76, No. 3. – P. 935-941.
16. Тихонов А. Н., Тихонравов А. В., Трубецков М. К. Методы оптимизации второго порядка в задачах синтеза многослойных покрытий // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*. – 1993. – Т. 33, №10. – С. 1518-1535.
17. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 749 с.
18. Mashreghi J. Hilbert transform of  $\log |f|$  // *Proc. Am. Math. Soc.* – 2002. – Vol. 130, No. 3. – P. 683-688.
19. Tikhonravov A. V., Klivanov M. V., and Zuev I. V. Numerical study of the phaseless inverse scattering problem in thin-film optics // *Inverse Problems*. – 1995. – Vol. 11, No. 1. – P. 251-270.
20. Aktosun T. and Sacks P. E. Inverse problem on the line without phase information // *Inverse Problems*. – 1998. – Vol. 14, No. 2. – P. 211-224.

### Решение обратной задачи прохождения нормально падающей электромагнитной волны сквозь слоистую структуру

**З. Т. Назарчук, Р. О. Гринив, А. Т. Синявский**

Проанализирована одномерная обратная задача прохождения электромагнитных волн сквозь слоистую диэлектрическую структуру, исходны-

ми даними для котрої являються абсолютні значення коефіцієнта проходження нормально падаючої плоскості хвилі, задані в обмеженому діапазоні частот. Установлено причиною неоднозначності рішення оберненої задачі відносно невідомих параметрів шаруватої діелектричної структури. Представлено методику вимірювань і обробки результатів, що дозволяє однозначно ідентифікувати параметри багатошарової структури за частотними залежностями абсолютних значень коефіцієнтів проходження, визначених в двох окремих експериментах з використанням тестового діелектричного шару.

### **Inverse Transmission Problem for Plane Electromagnetic Wave with Normal Incidence onto a Layered Dielectric Structure**

**Z. T. Nazarchuk, R. O. Hryniv,  
and A. T. Synyavskyy**

We discuss a one-dimensional inverse problem of electromagnetic wave transmission through a layered dielectric structure, which is to be identified from the absolute values of the transmission coefficient for a plane wave of normal incidence measured in a bounded frequency bandwidth. A reason of non-uniqueness in the inverse problem of recovering the unknown structure parameters is explained. Methods of measurement and data processing are suggested that allow to identify uniquely the structure parameters based on frequency dependence of absolute values of transmission coefficients obtained in two separate experiments using a reference dielectric slab.