

## Операторный метод в задаче излучения из системы щелей в плоском волноводе

М. Е. Калиберда, С. А. Погарский

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина  
E-mail: Sergey.A.Pogarsky@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 15 июня 2011 г.*

Операторным методом получено решение задачи по определению характеристик конечно-элементной и полубесконечной системы щелей в одной из стенок плоского волновода. Учтено взаимное влияние щелей по свободному пространству. Приведены диаграммы направленности излученного поля собственных волн волновода. Проведено сравнение с результатами, полученными методом дискретных особенностей.

**Ключевые слова:** плоский волновод, операторные уравнения, полубесконечная структура

### 1. Введение

При проектировании и создании высокоэффективных функциональных устройств СВЧ диапазона, таких, как частотно-селективные устройства и антенные системы, возникает необходимость изучения вопросов трансформации полей волноводных волн или их излучения во внешнее пространство на участке волновода со щелью. Особый интерес представляют электродинамические системы с периодическими последовательностями такого типа неоднородностей [1, 2].

Щелевые структуры исследуются достаточно давно. В работе [3] задача дифракции для одиночной щели в стенке плоского волновода сведена к парным интегральным уравнениям. При решении предполагалось, что щель мала по сравнению с длиной волны. Развитием такого подхода явилась работа [4], в которой рассмотрено взаимодействие многоэлементной щелевой структуры, выполненной на основе плоского волновода, с основной волной – волной типа  $T$ . Взаимодействие многощелевой структуры с волнами высших типов плоского волновода исследовалось в [5]. В работах [6, 7] решается задача дифракции волн на плоском

волноводе с импедансными стенками конечной толщины. Задача сводится к модифицированному уравнению Винера–Хопфа второго рода. В работе [8] в одномодовом приближении рассматривается решетка плоских волноводов с импедансными фланцами. Взаимодействие волноводов по свободному пространству учитывается при помощи вариационного метода. В работе [9] решается обратная задача – задача определения геометрических параметров решетки плоских волноводов по требуемой диаграмме направленности. Строится функционал, определяющий среднеквадратичное отклонение полученной диаграммы направленности по отношению к требуемой, который минимизируется. В некоторых случаях достаточными для практических приложений оказываются приближенные решения, которые, как правило, строятся в предположении бесконечно малого взаимного влияния щелей по свободному пространству. При этом используются матричные, а не интегральные операторы.

Решать электродинамические задачи дифракции собственных волн на бесконечных, полубесконечных и ограниченных периодических последовательностях неоднородностей целесообразно с помощью операторного метода

[10-13] в силу его универсальности при решении задач дифракции на структурах, в которых, в частности, неоднородности располагаются вдоль направления распространения волны. Оптимальной моделью для исследования разрезанных волноводов является плоский волновод с бесконечной щелью, прорезанной в поперечном направлении относительно направления распространения волноводной волны. Свойства такой модели, с одной стороны, близки к свойствам реальных волноводов, а с другой стороны, соответствующая двумерная электродинамическая задача допускает строгое решение.

В работе [14] метод дискретных особенностей [15] был использован при решении сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции волн на конечноэлементной системе щелей в стенке плоского волновода.

Целью настоящей работы является развитие операторного метода (как одной из реализаций метода частичного обращения) в приложении к задачам дифракции электромагнитных волн с произвольным спектром. С помощью данного подхода можно исследовать как конечноэлементные, так и полубесконечные структуры.

## 2. Конечная система щелей

Запишем операторные уравнения, позволяющие учесть взаимное влияние щелей по свободному пространству. В случае, когда влиянием щелей по свободному пространству пренебрегают, касательные компоненты электрического поля, излученного одной щелью, равны нулю на всех остальных щелях. При строгой постановке задачи касательные компоненты электрического и магнитного полей должны удовлетворять условию непрерывности на щели. Алгоритм построения операторных уравнений подробно описан в работе [13].

Рассмотрим плоский волновод с системой из  $N$  незквидистантно расположенных щелей различной ширины. Схематическое изображение волновода и направления распространения волн представлены на рис. 1. Будем предполагать, что волновод заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ .

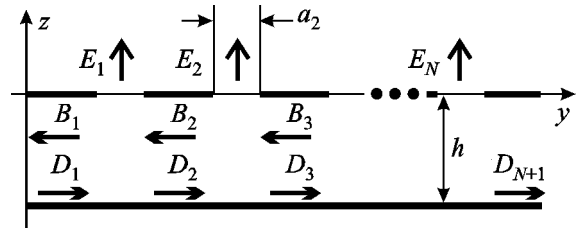


Рис. 1. Геометрия исследуемой структуры

Введем матричные операторы прохождения,  $t_n$ , отражения,  $r_n$ , возбуждения,  $f_n^\pm$ , собственных волн волновода, а также интегральные операторы излучения,  $f_n^\pm$ , из  $n$ -й щели в волноводе, которые можно получить, решив соответствующие интегральные уравнения методом моментов [13] или методом дискретных особенностей, как это сделано в работе [14]. Для того чтобы описать действие этих операторов, рассмотрим плоский волновод с одной  $n$ -й щелью, расположенной так, чтобы центр щели совпадал с осью  $Ox$ . Вектор амплитуд Фурье собственных волн плоского волновода с одной щелью, набегающих из области  $y < 0$ , обозначим как  $D_n$ , прошедших в область  $y > 0$  как  $D_{n+1}$ , а отраженных в область  $y < 0$  как  $B_n$ . Пусть  $E_n(\xi)$  – спектральная функция Фурье излученного из волновода поля. Тогда

$$D_{n+1} = t_n D_n,$$

$$B_n = r_n D_n,$$

$$E_n = f_n^- D_n,$$

или в функциональном виде

$$E_n(\xi) = (\mathbf{f}_n^-(\xi))^* D_n,$$

где  $\mathbf{f}^-(\xi)$  – бесконечномерный вектор, знак “\*” означает транспонирование. Если волна с вектором амплитуд Фурье  $B_{n+1}$  набегаёт из области  $y > 0$ , то

$$E_n = f_n^+ B_{n+1}.$$

Предположим теперь, что на волновод с  $n$ -й щелью из области  $z > 0$  падает плоская волна со спектральной функцией Фурье  $q(\xi)$ . Вектор амплитуд Фурье волн плоского волновода, бегущих от щели в направлении  $y = -\infty$ , обозначим как  $B_n$ , а в направлении  $y = +\infty$  как  $D_{n+1}$ , тогда

$$B_n = t_n^- q, \quad D_{n+1} = t_n^+ q,$$

или в интегральном виде

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t_n^-(\xi) q(\xi) d\xi,$$

$$D_{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t_n^+(\xi) q(\xi) d\xi,$$

где  $t_n^\pm(\xi)$  – бесконечномерный вектор.

Решение задачи для волновода с  $N$  щелями можно получить по следующей схеме. Обозначим вектор амплитуд Фурье набегающего поля как  $D_1$ , отраженного и прошедшего поля как  $B_1$  и  $D_{N+1}$ , поля между щелями как  $B_n$  и  $D_n$ ,  $n = 2, \dots, N$ , а спектральную функцию амплитуд излученного  $n$ -й щелью поля как  $E_n$ . Они связаны между собой следующими уравнениями:

$$B_1 = r_1 e_1^+ D_1 + t_1 e_2^+ e_1^- B_2 + \sum_{m=2}^N t_m^- e_1^+ e_m^- E_m; \quad (1)$$

$$B_n = r_n e_n^+ e_{n-1}^- D_n + t_n e_{n+1}^+ e_n^- B_{n+1} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N t_m^- e_n^+ e_m^- E_m, \quad (2)$$

$$n = 2, \dots, N;$$

$$D_n = t_{n-1} e_{n-1}^+ e_{n-2}^- D_{n-1} + r_{n-1} e_n^+ e_{n-1}^- B_n + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n-1}}^N t_m^+ e_{n-1}^+ e_m^- E_m, \quad (3)$$

$$n = 2, \dots, N + 1;$$

$$E_n = f_n^- e_n^+ e_{n-1}^- D_n + f_n^+ e_{n+1}^+ e_n^- B_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N;$$

$$B_{N+1} = 0.$$

Здесь операторы  $e_n^\pm$  определяют изменение комплексных амплитуд пространственных гармоник поля при смещении плоскости отсчета на расстояние  $M_n$ , равное расстоянию от начала координат до середины  $n$ -й щели, в положительном или отрицательном направлениях оси  $Oz$ ;  $e_0^\pm = I$ ,  $I$  – единичный оператор. Действие операторов  $e_n^\pm$  на функцию  $q(\xi)$  или вектор  $A = (A_l)_{l=1}^\infty$  сводится к умножению на экспоненту:

$$(e_n^\pm q)(\xi) = \exp(\pm ik\xi M_n) q(\xi),$$

$$e_n^\pm A = (\exp(\pm ik\beta_l M_n) A_l)_{l=1}^\infty,$$

где  $\beta_l = \sqrt{1 - (\pi l / (kh))^2}$  – постоянные распространения собственных волн плоского волновода,  $k$  – волновое число.

В случае пренебрежимо малого взаимного влияния щелей по свободному пространству из уравнений (1)-(3) можно исключить последние суммы.

### 3. Полубесконечная система щелей

Рассмотрим полубесконечную периодическую систему щелей, простирающуюся в сторону больших значений  $y$ . Обозначим  $t = t_n$ ,  $r = r_n$ ,  $t^\pm = t_n^\pm$ ,  $f^\pm = f_n^\pm$ ,  $e = e_n^+ e_{n-1}^-$ ,  $e_1 = I$ ,  $e_n = e^{n-1}$ ,  $e_n^- = (e_n)^{-1}$ . Введем оператор отражения полубесконечной структуры,  $R^1$ , и оператор излучения из полубесконечной структуры,  $F$ .

Для дальнейших преобразований целесообразно представить оператор  $R^1$  в виде

$$R^1 D_1 = R D_1 + t^- (E - E_1), \quad (4)$$

где  $E(\xi)$  – спектральная функция Фурье поля, излученного полубесконечной системой щелей, неизвестный оператор  $R$  описывает отраже-

ние от полубесконечной структуры без учета влияния щелей полубесконечной структуры на первую щель по свободному пространству. Второе слагаемое в (4) учитывает такое влияние. Тогда

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} e_m^- E_m = e_2^- F e D_2 + E_1 = F D_1, \quad (5)$$

$$B_1 = r D_1 + t e B_2 + t^- (E - E_1) = R D_1 + t^- (E - E_1), \quad (6)$$

$$B_2 = R e D_2 + t^- (e E - E_2), \quad (7)$$

$$D_2 = r D_1 + r e B_2 + t^+ (E - E_1), \quad (8)$$

$$E_1 = f^- D_1 + f^+ e B_2 = f D_1, \quad (9)$$

$$E_2 = f e D_2, \quad (10)$$

где  $f$  – неизвестный вспомогательный оператор. После преобразований уравнений (5)-(10) получаем систему нелинейных операторных уравнений второго рода, содержащую как матричные, так и интегральные операторы, для определения неизвестных операторов  $R$ ,  $F$  и  $f$ .

$$F = e_2^- F e (I - A_1)^{-1} A_2 + f^- + f^+ e A_5, \quad (11)$$

$$R = r + t e A_5, \quad (12)$$

$$f = e_2^- F e (1 - A_3)^{-1} A_4 - F. \quad (13)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$A_1 = r e R e - r e t^- f e - f^+ e R e + f^+ e t^- f e,$$

$$A_2 = t + t^+ F - t^+ f^- + r e t^- e F - t^+ f^+ e t^- e^+ F,$$

$$A_3 = r e R e - r e f e,$$

$$A_4 = t + t^+ F - t^+ f + r e t^- e^+ F,$$

$$A_5 = R e (I - A_1)^{-1} A_2 + t^- e F - f e (I - A_1)^{-1} A_2.$$

Форма записи уравнений (11)-(13) выбрана в таком виде для удобства их численного решения итерационными методами.

В случае пренебрежимо малого влияния щелей по свободному пространству можно положить  $t^\pm = 0$ . Тогда уравнения (11)-(13) приводятся к виду [10]

$$R = r + t e R e (I - r e R e)^{-1} t. \quad (14)$$

А для определения оператора излучения можно использовать уравнение

$$F = e_2^- F e (I - r e R e)^{-1} t + f^- + f^+ e R e (I - r e R e)^{-1} t. \quad (15)$$

#### 4. Численные результаты

С использованием приведенных выше уравнений была проведена серия расчетов диаграмм направленности излученного поля.

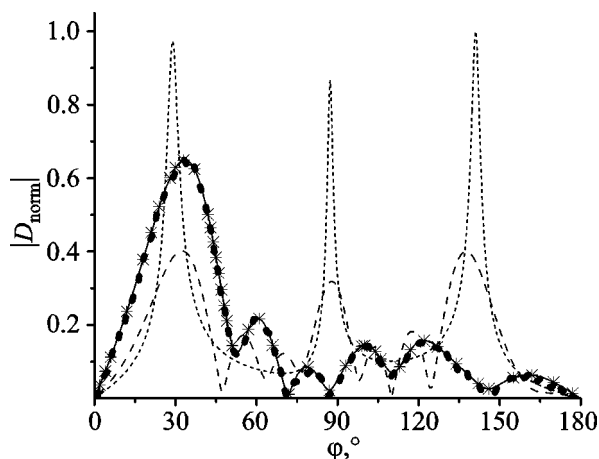
Предположим, что из полупространства  $y < 0$  на систему щелей набегают  $H_{01}$ -волна плоского волновода с компонентой электрического поля

$$E_x^i = e^{ik\beta_1 y} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right).$$

На рис. 2 представлены нормированные диаграммы направленности структуры, состоящей из четырех эквидистантно расположенных идентичных щелей, и полубесконечной структуры щелей. Ширина щели –  $a$ , расстояние между стенками волновода –  $h$ , период структуры –  $L$ . Нормировка осуществляется по максимуму диаграммы направленности полубесконечной структуры. Угол  $\varphi$  отсчитывается от положительного направления оси  $Oy$ . Диаграмму направленности можно вычислить по формуле [16]

$$D^1(\varphi) = \sqrt{2\pi/kd} (-\cos(\varphi)) \sin(\varphi) e^{-i\pi/4},$$

$$\varphi \in [0, \pi], \quad d(\xi) = \sum_{n=1}^N E_n(\xi) \exp(-ikM_n \xi).$$

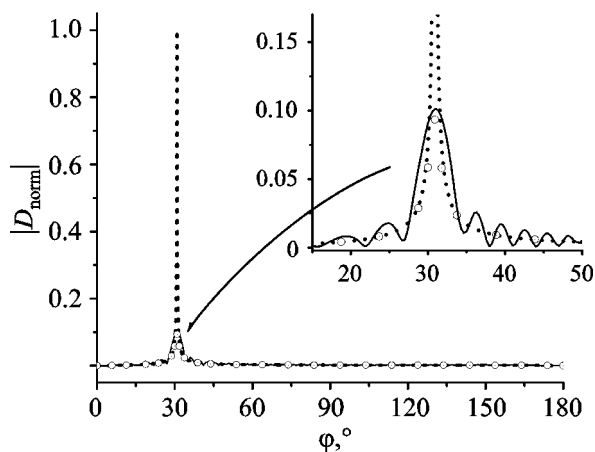


**Рис. 2.** Нормированные диаграммы направленности структуры, состоящей из четырех эквидистантно расположенных одинаковых щелей ( $a = h$ ,  $kh = 6$ , т. е.  $h/\lambda = a/\lambda = 0.955$ ): сплошная кривая –  $L = 1.01h$ ; пунктирная кривая –  $L = 1.265h$ ; маркеры в виде крестиков – результаты, полученные методом дискретных особенностей при  $L = 1.01h$ ; маркеры в виде точек – результаты, полученные без учета взаимодействия по свободному пространству при  $L = 1.01h$ . Нормированная диаграмма направленности полубесконечной структуры ( $a = h$ ,  $kh = 6$ ,  $L = 1.265h$ ) – короткий пунктир

Маркерами в виде точек на графике обозначены результаты, рассчитанные без учета взаимного влияния щелей по свободному пространству. Как видно из рисунка, кривые, полученные с учетом и без учета такого влияния, совпадают с графической точностью, поэтому в данном случае этим влиянием можно пренебречь. Маркерами в виде крестиков обозначены результаты, полученные методом дискретных особенностей в работе [14]. За счет изменения числа узлов интерполирования и количества учитываемых затухающих волноводных волн удалось добиться совпадения результатов с любой наперед заданной степенью точности. При этом для совпадения результатов с точностью  $10^{-4}$  при применении метода дискретных особенностей использовалось 100 узлов интерполирования, а при применении операторного метода учитывались шесть затухающих волноводных волн. В рассматриваемом случае, в случае малого взаимодействия щелей по свободному пространству, достаточным оказалось бесконечный интервал интегриро-

вания заменять конечным,  $[-2; 2]$ , на котором использовалось 50 узлов интерполирования. Для волновода, у которого щели находятся достаточно близко друг к другу ( $L = 1.01h$ ), в диаграмме направленности наблюдается наличие одного главного лепестка, максимум которого смещен от продольной оси структуры на угол  $\varphi = 33^\circ$ . Это смещение свидетельствует о фазовом распределении поля на щелях, близком к линейному. При увеличении периода  $L$  появляются дополнительные лепестки. Так, при  $L = 1.265h$  их уже три. Углы наклона главных лепестков диаграммы направленности полубесконечной и конечноэлементной структуры, состоящей из четырех щелей, практически совпадают.

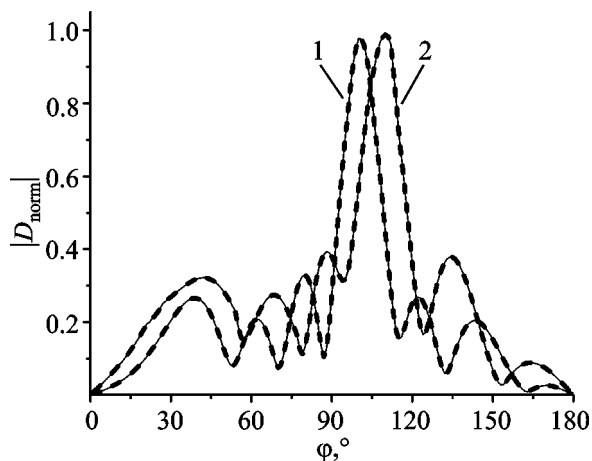
На рис. 3 представлены нормированные диаграммы направленности полубесконечной структуры, вычисленные с использованием уравнений (14), (15) для случаев  $\epsilon'' = 0$  и  $\epsilon'' = 0.01$ , и структуры, состоящей из 60 щелей, при  $\epsilon'' = 0$ . Расчеты проводились для значений параметров  $kh = 6$ ,  $a = 0.2h$ ,  $L = 0.5h$ . Нормировка осуществлялась по максимуму диаграммы направленности полубесконечной структуры. Как и в случае, представленном на рис. 2, при данном значении параметра  $L$



**Рис. 3.** Нормированные диаграммы направленности полубесконечной структуры при  $\epsilon'' = 0$  (кривая из точек) и  $\epsilon'' = 0.01$  (кружки) и структуры, состоящей из 60 эквидистантно расположенных одинаковых щелей, при  $\epsilon'' = 0$  (сплошная кривая). Параметры структур:  $a = 0.2h$ ,  $kh = 6$ ,  $L = 0.5h$ . На вставке показан увеличенный для наглядности участок зависимостей

в диаграммах направленности наблюдается один главный лепесток, который смещен от продольной оси структуры на угол  $\varphi = 31^\circ$ . Увеличение значения параметра  $L$  приводит к появлению дополнительных лепестков. Угол смещения главного лепестка относительно продольной оси структуры совпадает для полубесконечных и конечноэлементных структур. Увеличение числа щелей ведет к росту максимума главного лепестка, который стремится к максимуму главного лепестка диаграммы направленности полубесконечной структуры. Диаграмма направленности полубесконечной структуры стремится к диаграмме направленности ограниченной структуры при внесении потерь в диэлектрик, заполняющий пространство волновода.

Нарушения периодичности следования и условия идентичности излучателей позволяет получать диаграммы направленности со сканируемым главным лепестком. На рис. 4 приведены диаграммы направленности четырехэлементной структуры при перемещении крайней щели вдоль оси  $Oy$  в интервале значений  $L_1/\lambda_g = 0.04 \div 0.325$ , где  $L_1$  – расстояние между последней и предпоследней щелью. Для верификации результатов приведены также пунктирные кривые диаграмм направленности, полученные методом дискретных особенностей в работе [14]. Результаты совпадают с графической точностью.



**Рис. 4.** Нормированные диаграммы направленности неперiodических структур. Параметры структур:  $kh = 6$ , кривые 1 –  $L_1/\lambda_g = 0.325$ , кривые 2 –  $L_1/\lambda_g = 0.04$

## 5. Выводы

В работе построено решение задачи дифракции на произвольном ограниченном и полубесконечном периодическом множестве щелей в одной из стенок плоского волновода. Учтено взаимное влияние щелей по свободному пространству. Совпадение результатов, полученных операторным методом и методом дискретных особенностей, позволяет судить об их достоверности. Предлагаемый подход дает возможность исследовать как конечноэлементную, так и полубесконечную структуру. Полученные результаты могут найти применение при создании систем автоматизированного проектирования антенных и других функциональных устройств СВЧ диапазона.

## Литература

1. Encinar J. A. Mode-Matching and Point-Matching Techniques Applied to the Analysis of Metal-Strip-Loaded Dielectric Antennas // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1990. – Vol. 38, No. 9. – P. 1405-1412.
2. Yang H.-Y. D. and Jackson D. R. Theory of Line-Source Radiation from a Metal-Strip Grating Dielectric-Slab Structure // Dig. IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp., 13-18 Jul, 1997. – Montreal (Canada). – 1997. – Vol. 3. – P. 1740-1743.
3. Millar R. E. Radiation and Reception Properties of a Wide Slot in a Parallel Plate Transmission Line I and II // Can. J. Phys. – 1959. – Vol. 37, No. 2. – P. 144-169.
4. Auda H. A. Quasistatic Characteristics of Slotted Parallel-Plate Waveguides // IEE Proc. H. Microwaves Antennas Propag. – 1988. – Vol. 135, No. 4. – P. 256-262.
5. Lee J.-I., Cho U.-H., and Cho Y.-K. Analysis for a Dielectrically Filled Parallel-Plate Waveguide with Finite Number of Periodic Slots in its Upper Wall as a Leaky-Wave Antenna // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1999. – Vol. 47, No. 4. – P. 701-706.
6. Hames Y. and Tayyar I. H. Plane Wave Diffraction by Dielectric Loaded Thick-Walled Parallel-Plate Impedance Waveguide // Progress In Electromagnetics Research. – 2004. – Vol. 44. – P. 143-167.
7. Cinar G. and Buyukaksoy A. A Hybrid Method for the Solution of Plane Wave Diffraction by an Impedance Loaded Parallel Plate Waveguide // Progress In Electromagnetics Research. – 2006. – Vol. 60. – P. 293-310.
8. Scherbinin V.V. A Flange Surface Impedance Influence on Radiation Efficiency of Finite Plane Waveguide Array // Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET), 6-8 Sept, 2010. – Kyiv (Ukraine). – 2010. – P. 1-4.
9. Andriychuk M. and Tkachuk V. Modeling of Plane Waveguide Array Using the Variational Approach and

- Aperture Orthogonal Polynomials Method // 11th Int. Conf. The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), 23-25 Feb, 2011. – Polyana-Svalyava (Ukraine). – 2011. – P. 235 - 238.
10. Литвиненко Л. М., Резник І. І., Литвиненко Д. Л. Дифракція хвиль на напівнескінченних періодичних структурах // Доповіді АН Української РСР. – 1991. – №6. – С. 62-66.
11. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Анализ дифракции волн на последовательности идентичных ленточных решеток. Многоволновый режим // Радиофизика и радиоастрономия. – 1999. – Т. 4, № 3. – С. 276-286.
12. Воробьев С. Н., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Операторный метод в задаче дифракции электромагнитных волн на полубесконечных ленточных решетках // Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т. 10, № 3. – С. 273-283.
13. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – Киев: Наукова думка, 1984. – 239 с.
14. Калиберда М. Е., Погарский С. А. Электродинамические характеристики плоского волновода с системой поперечных щелей // Радиофизика и радиоастрономия. – 2008. – Т. 13, № 4. – С. 263-269.
15. Nosich A. A. and Gandel Y. V. Numerical Analysis of Quasioptical Multireflector Antennas in 2-D With the Method of Discrete Singularities: E-Wave Case// IEEE Trans. Antennas Propag. – 2007. – Vol. 55, No. 2. – P. 399-406.
16. Mittra R. and Lee S. W. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. – N.Y.: Macmillan, 1971. – 302 p.

### **Операторний метод в задачі випромінювання з системи щілин у плоскому хвилеводі**

**М. Є. Калиберда, С. О. Погарський**

Операторним методом отримано розв'язок задачі щодо визначення характеристик скінченноелементної та напівнескінченної системи щілин в одній зі стінок плоского хвилеводу. Враховано взаємний вплив щілин вільним простором. Наведено діаграми спрямованості випроміненого поля власних хвиль хвилеводу. Виконано порівняння з результатами, отриманими методом дискретних особливостей.

### **Operator Approach in the Problem of Radiation by a System of Slots in a Plane Waveguide**

**M. E. Kaliberda and S. A. Pogarsky**

The problem of determining the characteristics of bounded element and semiinfinite system of slots in one wall of a plane waveguide is solved by the operator approach. The mutual influence of slots through free space is taken into consideration. The directional patterns of waveguide eigenwaves radiated field are presented. Our results have been compared with those obtained by the method of discrete singularities.