

# Рассеяние плоской $H$ -поляризованной электромагнитной волны бесконечно протяженным двугранным клином, сопряженным с продольно-щелевым цилиндром

Е. В. Шепилко

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина  
e-mail: Yevgen.V.Shepilko@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 20 июня 2011 г.*

Задача о рассеянии плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны идеально проводящим и бесконечно протяженным двугранным клином, ребро которого размещено на оси кругового цилиндра с продольной щелью, в строгой постановке сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов фурье-разложений рассеянного поля. Показано, что при значении угла раскрыва щели, равном углу раскрыва клина, решение имеет аналитический вид. Приведены результаты вычислений поля в дальней зоне с заданной точностью. Показано, что при узком клине и узкой щели для определенных значений электрического диаметра цилиндра имеет место резкое возрастание сечения обратного рассеяния структуры. Построены диаграммы направленности рассеянного поля при различных значениях параметров структуры.

**Ключевые слова:** рассеяние, электромагнитная волна, двугранный клин, цилиндр, продольная щель

## 1. Введение

Влиянию формы ребра двугранного клина на его рассеивающие свойства как электромагнитного, так и акустического поля посвящено большое число работ, например, [1-7]. В работе [8] проведено исследование задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на двугранном клине с вершиной в виде цилиндра с продольной щелью. Однако представляет интерес исследование рассеивающих свойств двугранного клина, ребро которого охватывает круговой продольно-щелевой цилиндр. При произвольном угле раскрыва клина структура может быть модельной в исследовании как электромагнитного влияния цилиндрической полости с продольной щелью, охватывающей ребро полуплоскости или клина, так и рассеяния электромагнитного поля другими структурами, которые образуются при изменении в широких пределах характерных геометрических параметров.

## 2. Постановка задачи и метод исследования

Цель работы – строгое решение задачи рассеяния плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны на идеально проводящем бесконечно протяженном двугранном клине с ребром, размещенным на оси кругового цилиндра с продольной щелью.

Плоская электромагнитная волна падает перпендикулярно образующей цилиндра под произвольным углом  $\beta$  между волновым вектором  $\vec{k}_1$  ( $k_1 = 2\pi/\lambda$ ) падающей волны и линией отсчета угла  $\varphi$  в цилиндрической системе координат  $\rho, \varphi, z$  (рис. 1). Ось  $z$  совпадает как с ребром бесконечно протяженного двугранного клина, так и с осью цилиндра радиуса  $a$ . Углы  $2\pi\delta$  и  $2\pi\theta$  характеризуют, соответственно, величины раскрыва клина и продольной щели, при этом  $0 < \theta < \delta \leq 1$ . Зависимость поля от времени вида  $\exp(-i\omega t)$  в дальнейшем опу-

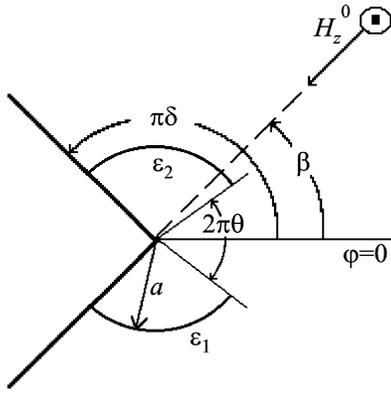


Рис. 1. Поперечное сечение структуры

цена;  $k_j = k_0 \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$ ,  $k_0 = \omega/c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $j = 1, 2$ ;  $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$  – диэлектрические и магнитные проницаемости окружающего пространства и среды, заполняющей пространство в цилиндре, соответственно.

Полное поле представляем как суперпозицию падающего и рассеянного полей, которым соответствуют обозначения с верхними индексами 0 или 1:

$$\vec{E} = \vec{E}^0 - \vec{E}^1, \quad \vec{H} = \vec{H}^0 - \vec{H}^1.$$

Рассмотрим случай  $H$ -поляризованной плоской волны (вектор поля  $\vec{H}^0$  – параллелен оси  $z$ ) с составляющей электрического поля единичной амплитуды. Представим падающее поле в виде разложения по цилиндрическим функциям Бесселя [9]:

$$H_z^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_1 \rho) \exp(in(\varphi - \beta)).$$

Поле внутри и вне цилиндра представим разложением в ряд Фурье по цилиндрическим функциям и  $z$ -составляющую рассеянного поля определим как

$$H_z^1 = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s J_{sv}(k_2 \rho) \cos[(\varphi + \pi\delta)sv], & \rho \leq a, |\varphi| \leq \pi\delta; \\ \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s H_{sv}^{(1)}(k_1 \rho) \cos[(\varphi + \pi\delta)sv], & \rho \geq a, |\varphi| \leq \pi\delta. \end{cases}$$

Здесь,  $\nu = 1/(2\delta)$ ,  $H_\lambda^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля 1-го рода, а  $\beta_s$  и  $\alpha_s$  – неизвестные коэффициенты фурье-разложения рассеянного поля. Остальные составляющие электромагнитного поля находятся из уравнений Максвелла.

Накладывая на полное поле граничные условия, а также применяя методику, приведенную в работах [6, 7], сведем решение поставленной задачи рассеяния к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов разложения:

$$X_s = \sum_{q=0}^{\infty} X_q \Phi_{sq}^\alpha + F_s^\alpha, \quad (1)$$

$$Y_s = \sum_{q=0}^{\infty} Y_q \Phi_{sq}^\beta + F_s^\beta. \quad (2)$$

Здесь  $s \in \mathbf{N}_0$ ,

$$X_s = \alpha_s H_{sv}^{(1)'}(k_1 a), \quad Y_s = \beta_s J_{sv}'(k_2 a);$$

$$\Phi_{sq}^\alpha = \frac{H_{qv}^{(1)}(k_1 a) J_{qv}'(k_2 a)}{H_{qv}^{(1)'}(k_1 a) J_{qv}(k_2 a)} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} G_{sv}^{\theta_{qv}},$$

$$\Phi_{sq}^\beta = \frac{H_{qv}^{(1)'}(k_1 a) J_{qv}(k_2 a)}{H_{qv}^{(1)}(k_1 a) J_{qv}'(k_2 a)} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} G_{sv}^{\theta_{qv}};$$

$$F_s^\alpha = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m'(k_1 a) \exp(-im\beta) Q_{sv}^{\theta m} - \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(k_1 a) \exp(-im\beta) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{J_{qv}'(k_2 a)}{J_{qv}(k_2 a)} G_{sv}^{\theta_{qv}} C_{qv}^{m\delta},$$

$$F_s^\beta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m'(k_1 a) \exp(-im\beta) Q_{sv}^{\theta m} - \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(k_1 a) \exp(-im\beta) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{H_{qv}^{(1)'}(k_1 a)}{H_{qv}^{(1)}(k_1 a)} G_{sv}^{\theta_{qv}} C_{qv}^{m\delta},$$

а штрих обозначает дифференцирование по аргументу цилиндрической функции.

Коэффициенты  $C_{sv}^{m\delta}$  определены в [8], а коэффициенты  $Q_{sv}^{\theta m}$  и  $G_{sv}^{\theta_{qv}}$  являются функциями углов раскрытия клина и щели в цилиндре и имеют следующий вид:

$$Q_{sv}^{\theta m} = \begin{cases} \frac{2}{\pi\delta} \frac{m \cos \tau \sin \psi - sv \sin \tau \cos \psi}{\xi} \cos \eta = Q_{sv}^{\theta(-m)}, & m \neq 0, m \neq sv, \quad s/2 \in \mathbf{Z}; \\ \left( \frac{\sin(2\tau)}{\pi s} + \frac{\theta}{\delta} \right) \cos \eta = Q_{sv}^{\theta(-m)}, & m \neq 0, m = sv, \quad s/2 \in \mathbf{Z}; \\ \frac{4 \sin \tau \cos \eta}{\pi s}, & m = 0, \quad s/2 \in \mathbf{Z}; \\ i \frac{m \cos \psi \sin \tau - sv \sin \psi \cos \tau}{\pi \delta \xi} 2 \sin \eta = -Q_{sv}^{\theta(-m)}, & m \neq 0, m \neq sv, \quad (s+1)/2 \in \mathbf{Z}; \\ i \left( \frac{\sin(2\tau)}{\pi s} - \frac{\theta}{\delta} \right) \sin \eta = -Q_{sv}^{\theta(-m)}, & m \neq 0, m = sv, \quad (s+1)/2 \in \mathbf{Z}; \\ 0, & m = 0, \quad (s+1)/2 \in \mathbf{Z}; \end{cases}$$

$$G_{sv}^{\theta qv} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{s \cos(q\tau) \sin(s\tau) - q \sin(q\tau) \cos(s\tau)}{\gamma} \cos \chi \cos \eta, & q \neq s, q/2, \quad s/2 \in \mathbf{Z}; \\ \left( \frac{\sin(2s\tau)}{\pi s} + \frac{\theta}{\delta} \right), & q = s, q/2 \in \mathbf{Z}; \\ \frac{4 \sin(s\tau) \cos \eta}{\pi s}, & q = 0, \quad s/2 \in \mathbf{Z}; \\ \frac{q \cos(q\tau) \sin(s\tau) - s \sin(q\tau) \cos(s\tau)}{\pi \gamma} 4 \sin \chi \sin \eta, & q \neq s, (q+1)/2, \quad (s+1)/2 \in \mathbf{Z}; \\ \left( -\frac{\sin(2s\tau)}{\pi s} + \frac{\theta}{\delta} \right), & q = s, \quad (s+1)/2 \in \mathbf{Z}; \\ 0, & q = 0, \quad (s+1)/2 \in \mathbf{Z}; \end{cases}$$

$$Q_0^{\theta 0} = G_0^{\theta 0} = \theta/\delta, \quad Q_{sv}^{\theta m} = \frac{\sin(m\pi\theta)}{m\pi\delta}, \quad s = 0.$$

Здесь  $\psi = m\pi\theta$ ,  $\tau = \pi\theta/(2\delta)$ ,  $\xi = m^2 - (sv)^2$ ,  $\gamma = s^2 - q^2$ ,  $\eta = s\pi/2$ ,  $\chi = q\pi/2$ , а  $\mathbf{Z}$  – множество положительных целых чисел, исключая нуль.

Таким образом, исследование задачи о рассеянии электромагнитного поля плоской волны сведено к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода.

### 3. Анализ решения

Система уравнений (1) позволяет исследовать внешнюю задачу – рассеяние волны структурой, а система уравнений (2) – внутреннюю, т. е. найти распределение поля в цилиндре со щелью и частью вершины клина.

Следует отметить, что система уравнений (1) допускает предельный переход, когда угол раскрытия щели становится равным углу раскрытия клина. В этом случае рассматриваемая структура превращается в клин с диэлектрической цилиндрической насадкой и решение внешней задачи можно получить в аналитической замкнутой форме. Так,

$$\begin{aligned} & \alpha_s [H_{sv}^{(1)}(k_1 a) J'_{sv}(k_2 a) p_{12} - H_{sv}^{(1)'}(k_1 a) J_{sv}(k_2 a)] = \\ & = p_{12} J'_{sv}(k_2 a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_1 a) \exp(-in\beta) C_{sv}^{n\delta} - \\ & - J_{sv}(k_2 a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J'_n(k_1 a) \exp(-in\beta) C_{sv}^{n\delta}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $p_{12} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_2 / (\epsilon_2 \mu_1)}$ .

Когда  $p_{12} = 1$  выражение (3) еще больше упрощается, и неизвестные коэффициенты  $\alpha_s$  определяются как

$$\alpha_s i / (\pi k_1 a) = J'_{sv}(k_1 a) \sum_{n \neq 0} (-i)^n J_n(k_1 a) \exp(-in\beta) C_{sv}^{n\delta} - J_{sv}(k_1 a) \sum_{n \neq 0} (-i)^n J'_n(k_1 a) \exp(-in\beta) C_{sv}^{n\delta}. \quad (4)$$

При получении выражения (4) использовано значение вронскиана для функций Бесселя и Ханкеля [10], и значения для коэффициентов  $C_{sv}^{n\delta}$ .

#### 4. Численное решение задачи и анализ рассеивающих свойств структуры

Проведем исследование внешней задачи. Решение системы уравнений (1) можно получить методом редукции. Анализ рассеивающего свойства структуры в дальней зоне проведем на основе решения системы уравнений (1) и вычисления сечения обратного рассеяния (COP),

$$\sigma_o = \frac{2}{\pi \lambda_1} \left| \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \exp(-isv\pi/2) \cos[(\beta + \pi\delta)sv] \right|^2 \delta, \quad (5)$$

а также вычисления распределения поля  $H_z^1$  по координате  $\varphi$  в дальней зоне ( $k_1 r \rightarrow \infty$ ), а именно – диаграммы направленности (ДН) рассеянного поля, которую определим выражением

$$A(\varphi) = \sqrt{2/(\pi k_1)} \exp(-i\pi/4) F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \left| \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \exp(-isv\pi/2) \cos[(\varphi + \pi\delta)sv] \right|.$$

Все вычисления по выражению (5) были проведены с относительной ошибкой, не превышающей 2 %, а параметры среды, без ограничения общности задачи, приняты равными  $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$ .

На рис. 2 приведена зависимость COP от параметра  $k_0 a$ . Кривая 1 соответствует значению угла полуоткрыва щели  $\pi\theta = 1^\circ$ , а кривая 2 –  $\pi\theta = 178^\circ$ . Для сравнения приведена зависимость 3 для случая  $\pi\theta = 0$ , которая построена на основе решения, приведенного в [7], и зависимость – штриховая кривая, которая соответствует аналитическому решению (4), когда угол открыва щели становится равным углу открыва щели клина.

Можно видеть, что наличие продольной щели в цилиндре в этом случае, в общем, существенно снижает значение COP. В длинноволновой области ( $k_0 a < 1$ ) на кривой 1 видны два максимума COP (в области  $k_0 a \approx 0.4$  и  $k_0 a \approx 2.4$ ), более выраженные, чем на кривой 3 (в области  $k_0 a \approx 0.4$  и  $k_0 a \approx 1.6$ ). В то же время при большом угле открыва щели ( $\pi\theta = 178^\circ$ ) наличие цилиндра снижает значение COP даже в сравнении со значениями этой величины для клина с цилиндром, угол открыва щели которого равен углу открыва щели клина, при  $\epsilon_2 = 1$  (штриховая кривая). Следует отметить, что наличие узкой щели в цилиндре приводит к возникновению резко выраженного резонансного рассеяния, когда значения  $k_0 a$  становятся близкими к нулям функции Бесселя  $J_0(x)$ .

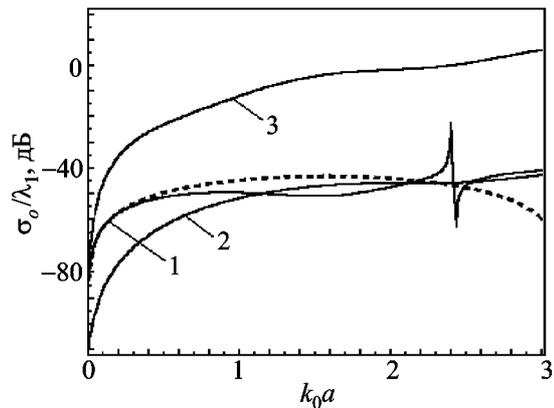


Рис. 2. Сечение обратного рассеяния ( $\epsilon_2 = \mu_2 = 1$ ;  $\pi\delta = 179^\circ$  и  $\beta = 0$ )

На рис.3 приведена зависимость СОР от параметра  $k_0a$ . Кривая 1 соответствует параметрам:  $\beta = 89^\circ$ ,  $\pi\delta = 179^\circ$ ,  $\pi\theta = 1^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ; для кривой 2 –  $\beta = 0$ ,  $\epsilon_2 = 2.59$ , а углы раскрытия щели в цилиндре и клина такие же, как и для кривой 1. Кривая 3 ( $\epsilon_2 = 2.59$ ) и кривая, обозначенная штриховой линией ( $\epsilon_2 = 1$ ), соответствуют клину с углом раскрытия  $\pi\delta = \pi\theta = 179^\circ$  с диэлектрической цилиндрической насадкой, при этом  $\beta = 89^\circ$ .

При сравнении кривых 1 на рис. 2 и рис. 3 можно видеть, что в приведенном диапазоне изменения параметра  $k_0a$  в случае узкой щели угол падения волны слабо влияет на СОР структуры, когда диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_2 = 1$ . В то же время наличие диэлектрической среды в цилиндре с  $\epsilon_2 > 1$  сгущает и сдвигает спектр резонансного рассеяния в длинноволновую область. Значение  $k_2a$  для второго резко выраженного максимума СОР близко к первому нулю функции Бесселя  $J_1(x)$ .

Следует отметить при сравнении кривой 3 и штриховой кривой на рис. 3, что наличие на ребре клина диэлектрического цилиндра с  $\epsilon_2 > 1$  приводит к заметному увеличению СОР и возникновению максимумов, хотя и слабо выраженных, в области значений  $k_0a$  приближенно равных 0.4 и 2.2.

На рис. 4 приведены нормированные ДН рассеянного поля. Кривая 1 соответствует  $\beta = 0$ ,  $\epsilon_2 = 1$ , а кривая 2 –  $\beta = 89^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 1$ , кривая 3 –  $\beta = 89^\circ$ ,  $\epsilon_2 = 2.59$ .

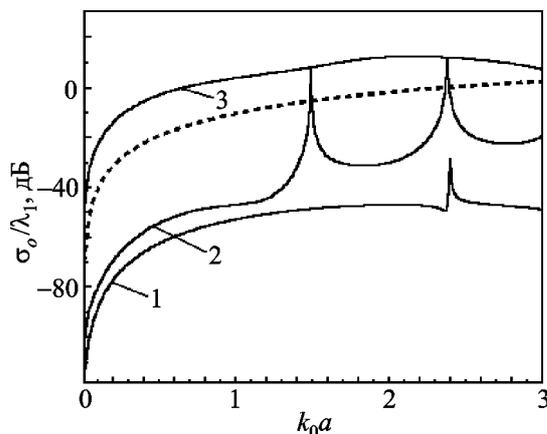


Рис. 3. Сечение обратного рассеяния ( $\pi\delta = 179^\circ$ ;  $\beta = 89^\circ$ )

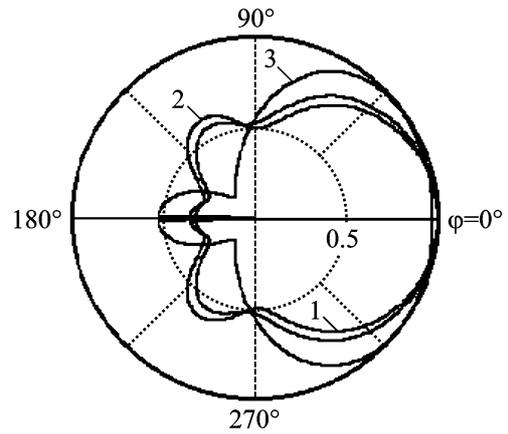


Рис. 4. Нормированные ДН рассеянного поля ( $\pi\delta = 179^\circ$ ,  $\pi\theta = 1^\circ$ ,  $k_0a = 2.4$ )

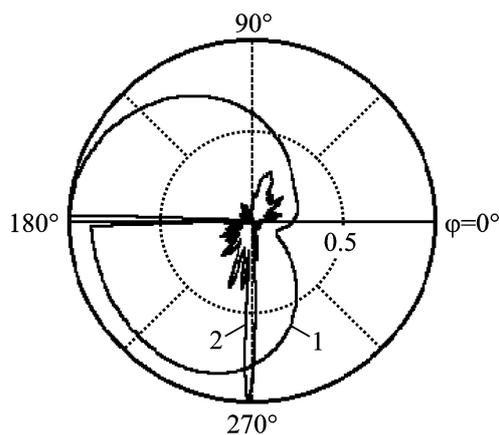
Диаграммы 1 и 2 демонстрируют, что при резонансном рассеянии ( $k_0a = 2.4$ ) направление главного максимума не зависит от угла падения волны и соответствует направлению  $\phi = 0$ . Тогда как известно, что для отдельного сплошного цилиндра направление главного максимума совпадает с направлением падения волны [11]. В то же время наличие диэлектрического заполнения (кривая 3) приводит к появлению максимума как в направлении падения волны, так и в обратном.

Диаграммы на рис. 5 иллюстрируют рассеяние электромагнитной волны на ребре узкого клина, покрытого диэлектрическим цилиндром: кривая 1 соответствует значению  $k_0a = 1.49$ , а кривая 2 –  $k_0a = 35$ .

Можно видеть, что при  $k_0a = 1.49$  направление главного максимума соответствует направлению  $\phi = 179^\circ$ , т. е. вдоль поверхности клина в “освещенной” области. Для больших значений  $k_0a$  ( $k_0a = 35$ ) направление главного максимума совпадает с направлением падения волны.

## 5. Заключение

В работе в строгой постановке решение задачи сведено к решению системы алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов фурье-разложений



**Рис. 5.** Нормированные ДН рассеянного поля ( $\pi\delta = \pi\theta = 179^\circ$ ,  $\beta = 89^\circ$ ,  $\varepsilon_2 = 2.59$ )

рассеянного поля. При определенных значениях параметров, когда структура превращается в клин с диэлектрической цилиндрической насадкой на ребре, выражения для неизвестных коэффициентов фурье-разложений рассеянного поля получены в аналитической замкнутой форме. В общем случае, при произвольных значениях параметров, проведены численное решение системы алгебраических уравнений, а также вычисления сечения обратного рассеяния и диаграмм направленности рассеянного поля исследуемой структуры, проведен анализ полученных результатов.

### Литература

1. Ross R. A. and Hamid M. A. K. Scattering by a wedge with rounded edge // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1971. – Vol. AP-19. – P. 507-516.
2. Hamid M. A. K. and Towaij S. J. Diffraction by a Half-Plane with a Cylindrical Dielectric Cap // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1972. – Vol. AP-26. – P. 663-664.
3. Hamid M. A. K. Diffraction Coefficeint of a Conducting Wedge Loaded with a Cylindrical Dielectric Slab at the Apex // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1973. – Vol. AP-34. – P. 398-399.
4. Киселев А. П. Дифракция на клине с круговой насадкой // Прикладная математика и механика. – 1977. – Т. 41, Вып. 5. – С. 953-956.
5. Yu Jong-Won and Myung Noh-Hoon. TM Scattering by a Wedge with Concaved Edge // IEEE

Trans. Antennas Propag. – 1997. – Vol. AP-45. – P. 1315-1316.

6. Шепилко Е. В. Дифракция плоской электромагнитной волны на бесконечно протяженном двугрбневом клине с диэлектрическим цилиндром на вершине // Изв. вузов. Радиофизика. – 2002. – Т. 45, №1. – С. 26-32.
7. Шепилко А. Е., Шепилко Е. В. Дифракция плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны на двугранном клине с вершиной в виде цилиндра // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2004. – Т. 47, №12. – С. 55-61.
8. Шепилко Е. В. Рассеяние поля плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны бесконечно протяженным двугранным клином с вершиной в виде цилиндра с продольной щелью // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2006. – Т. 49, №5. – С. 33-39.
9. Иванов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1979. – 832 с.
11. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1982. – 272 с.

### Розсіяння плоскої $H$ -поляризованої електромагнітної хвилі нескінченно протяжним двограним клином, сполученим з поздовжньо-щілинним циліндром

Є. В. Шепілко

Задача розсіяння плоскої  $H$ -поляризованої електромагнітної хвилі ідеально провідним і нескінченно протяжним двограним клином, ребро якого лежить на осі кругового циліндра з поздовжньою щілиною, у строгій постановці зведена до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів фур'є-розкладу розсіяного поля. Показано, що зі значенням кута розкриття щілини, рівному куту розкриття клина, розв'язок має аналітичний вид. Наведено результати розрахунків поля в дальній зоні із заданою точністю. Показано, що для вузького клина й вузької щілини для відповідних значень електричного діаметра циліндра має місце різке зростання перерізу зворотного розсіяння структури. Побудовано діаграми спрямованості розсіяного поля за різних значень параметрів структури.

**Scattering of  $H$ -Polarized Electromagnetic  
Wave by Infinite Dihedral  
Wedge Co-Axially Coupled  
with Slotted Cylinder**

**Y. V. Shepilko**

Scattering of a plane  $H$ -polarized electromagnetic wave by a perfectly conducting and infinitely extensive dihedral wedge, whose edge is placed on the axis of a circular cylinder with a longitudinal slot is in strict statement reduced to solving the system of linear algebraic equations of second kind with respect to the unknown coefficients of Fourier-expansions of the scattered field. It is shown that at the opening angle of a slot equal to the opening angle of a wedge, the solution is of analytical form. The calculation results for the field in the far zone are shown to the prescribed accuracy. It is also shown that for a narrow wedge and narrow slot for some values electrical diameters of a cylinder, the structure backscatter cross-section sharp increase takes place. The radiation patterns of a scattered field are constructed for different structure parameters.