

## Дифракция $H$ -волн на системе щелей в общей стенке двух параллельно расположенных прямоугольных волноводов

М. Е. Калиберда, С. А. Погарский

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина  
E-mail: Sergey.A.Pogarsky@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 23 июня 2010 г.*

Решается задача дифракции  $H$ -волн на системе щелей в общей стенке двух прямоугольных волноводов с применением операторного метода. Щели имеют прямоугольную форму. Исследован характер взаимодействия волноводов при вариации геометрических размеров щелей и их местоположения в волноводе. Полученные результаты позволяют определить закономерности изменения полос частот, в пределах которых исследуемая структура может применяться в качестве направленного ответвителя и делителя мощности. Проведено сравнение результатов, полученных данным методом, с результатами, полученными другими авторами.

### 1. Введение

Изучение дифракции волн на системах щелей в стенках прямоугольных волноводов представляет несомненный интерес для техники СВЧ, так как на основе таких структур возможно создание делителей мощности, направленных ответвителей, фильтров и др. [1-3]. Одними из первых работ, в которых рассматривались одиночные щели в волноводе, были статьи [4, 5]. Для расчета многощелевых ответвителей была предложена модификация метода эквивалентных цепей [6]. В этой работе показано, что синтез ответвителей с сильной связью может быть сведен к решению задачи по определению параметров цепи, состоящей из набора емкостей, индуктивностей и сопротивлений. Таким образом, направленному ответвителю может быть поставлена в соответствие электрическая цепь. Недостатком данного метода является то, что он применим только к щелям, характерный размер которых мал по сравнению с длиной волны. Метод получил развитие во множестве работ, в частности в [7].

Метод моментов был предложен в работе [8] для исследования сочленения прямоугольных волноводов через щель в общей стенке. Однако в случае длинной по сравнению с длиной волны щели при достаточном ее смещении от центра волноводов наблюдался значительный рост погрешности решения. Это связано с тем, что поле в щели принималось постоянным вдоль одной из координатных осей, а аппроксимирующая функция вдоль щели недостаточно точно описывала распределение поля в ней. Структуры со щелями в общей стенке прямоугольных волноводов, пересекающихся под прямым углом, исследовались в работе [9] при помощи метода частичных областей и в работе [10] при помощи метода сеток.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции  $H$ -поляризованных электромагнитных волн на системе прямоугольных щелей в общей стенке двух бесконечных прямоугольных волноводов. Система координат и геометрия структуры показаны на рис. 1. Стенки волноводов считаются идеально проводящими и бесконечно тонкими, а прот-

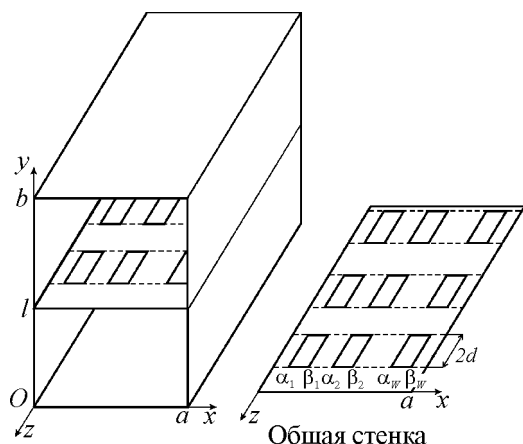


Рис. 1. Геометрия исследуемой структуры

ранство внутри волноводов заполнено воздухом ( $\epsilon = \mu = 1$ ). Поперечные размеры волноводов равны соответственно  $a, l$  и  $a, (b-l)$ . Зависимость полей от времени примем в виде  $e^{-i\omega t}$ . Определим одиночную ячейку, содержащую неоднородности, как множество точек  $M_0 = \{(x; y; z), 0 < x < a, 0 < y < b, -d_1 < z < d_1\}$  и обозначим  $P = \bigcup_{q=1}^W (\alpha_q; \beta_q) \subset (0; a)$  след множества щелей одиночной ячейки на плоскости  $xOy$ , где  $2d_1$  – длина щелей,  $\alpha_q$  и  $\beta_q$  –  $x$ -координаты края  $q$ -й щели,  $W$  – количество щелей в ячейке.

Для решения поставленной задачи будем использовать подход, предложенный в работах [11, 12], который состоит в том, что операторы рассеяния на системе одинаковых препятствий определяются в несколько этапов. Вначале решается задача дифракции на полубесконечной в продольном направлении неоднородности. Далее с использованием операторных уравнений определяются операторы рассеяния одиночного препятствия (щели) и конечной системы препятствий. На первом этапе нам необходимо знать собственные волны двух волноводов, связанных системой бесконечных параллельных друг другу щелей, которые мы определим методом сингулярных интегральных уравнений. Будем рассматривать эти волноводы как единый нерегулярный волновод.

## 2. Собственные волны волноводов, связанных системой бесконечных щелей

Рассмотрим бесконечные в продольном направлении (ось  $Oz$ ) параллельные щели, прорезанные в общей стенке прямоугольных волноводов. След множества щелей на плоскости  $xOy$  совпадает с множеством  $P$ . Представим компоненту  $H_z$  магнитного поля  $n$ -й собственной волны единого нерегулярного волновода в виде

$$H_{z,n} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos(\eta_{m,n} y) e^{ik\gamma_{n,3} z}, & 0 < y < l; \\ \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,n} \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos(\eta_{m,n} (y-b)) e^{ik\gamma_{n,3} z}, & l < y < b; \end{cases} \quad (1)$$

где  $A_{m,n}$  и  $B_{m,n}$  – амплитуды Фурье;  $\eta_{m,n} = k\sqrt{1 - (\gamma_{n,3})^2 - \left(\frac{\pi m}{ka}\right)^2}$ ,  $\text{Re}\eta_{m,n} \geq 0, \text{Im}\eta_{m,n} \geq 0$ ,  $\gamma_{n,3}$  – неизвестные постоянные распространения собственных волн ячейки, причем  $\text{Im}\gamma_{n,3} < \text{Im}\gamma_{n+1,3}$  и  $\text{Re}\gamma_{n,3} > \text{Re}\gamma_{n+1,3}$ ,  $m, n = 0, 1, \dots$ . Остальные компоненты электрического и магнитного полей могут быть найдены из уравнений Максвелла. Будем предполагать, что  $\alpha_1 > 0, \beta_W < a$ . Из условия равенства касательных компонент электрического поля при  $y=l$  следует, что

$$B_{m,n} = A_{m,n} \frac{\sin(\eta_{m,n} l)}{\sin(\eta_{m,n} (l-b))}, \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Из условий равенства нулю касательных компонент электрического поля вне щелей и равенства касательных компонент магнитного поля в щелях при  $y=l$  после введения безразмерных величин  $b_1 = \frac{b\pi}{a}, l_1 = \frac{l\pi}{a}, k_1 = \frac{ka}{\pi}$ ,

$\mu_{m,n} = \frac{\eta_{m,n}a}{\pi}$ ,  $\varphi = x \frac{\pi}{a}$ ,  $P_1 = P \frac{\pi}{a} \subset (0; \pi)$  и обо- значения

$$C_{m,n} = A_{m,n} \eta_{m,n} \sin(\eta_{m,n}l), \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

получаем парные сумматорные уравнения:

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{m,n} \cos(m\varphi) = 0, \quad \varphi \notin P_1, \quad (4)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{m,n} \frac{1}{\mu_{m,n}} G_{m,n} \cos(m\varphi) = 0, \quad \varphi \in P_1, \quad (5)$$

где

$$G_{m,n} = \frac{1}{2} \frac{\sin(\mu_{m,n}b_1)}{\sin(\mu_{m,n}l_1) \sin(\mu_{m,n}(l_1 - b_1))}.$$

Следуя работе [13], сведем парные сумматорные уравнения (4), (5) к сингулярному интегральному уравнению с дополнительными условиями. Введем неизвестную функцию

$$F(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,n} \cos(m\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (6)$$

которая ищется в классе функций, определяемом условием на ребре. На каждом интервале  $\left(\frac{\alpha_q \pi}{a}; \frac{\beta_q \pi}{a}\right)$ ,  $q = 1, \dots, W$ , функцию  $F(\varphi)$  можно представить в виде

$$F(\varphi) \Big|_{(\alpha_q \pi/a; \beta_q \pi/a)} = \frac{u_q(\varphi)}{\sqrt{(\varphi - \alpha_q \pi/a)(\beta_q \pi/a - \varphi)}}, \quad (7)$$

где  $u_q(\xi)$  – гладкая функция.

Из уравнения (3) следует, что

$$F(\varphi) = 0, \quad \varphi \notin P_1. \quad (8)$$

Применяя обратное преобразования Фурье к выражению (6) и используя условие (8), получим:

$$C_{m,n} = \frac{2}{\pi} \int_{P_1} F(\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$C_{0,n} = \frac{1}{\pi} \int_{P_1} F(\varphi) d\varphi.$$

После преобразований уравнения (5), приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_{P_1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \varphi} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{P_1} K(\zeta; \varphi) F(\zeta) d\zeta = 0, \quad \varphi \in P_1, \quad (9)$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{\pi} \int_{P_1} Q(\zeta; \varphi_q) F(\zeta) d\zeta = 0, \quad q = 1, \dots, W, \quad (10)$$

где  $\varphi_q$  – фиксированная точка интервала  $\left(\frac{\alpha_q \pi}{a}; \frac{\beta_q \pi}{a}\right)$ . Ядра  $K(\zeta; \varphi)$  и  $Q(\zeta; \varphi)$  имеют вид:

$$K(\zeta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{m}{\mu_{m,n}} G_{m,n} - 1 \right] \left[ \sin(m(\zeta - \varphi)) - \sin(m(\zeta + \varphi)) \right] - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\zeta + \varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[ \operatorname{ctg} \left( \frac{\zeta - \varphi}{2} \right) - \frac{2}{\zeta - \varphi} \right], \quad (11)$$

$$Q(\zeta, \varphi) = \frac{G_{0,n}}{\mu_{0,n}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{m,n}}{\mu_{m,n}} \left[ \cos(m(\zeta - \varphi)) - \cos(m(\zeta + \varphi)) \right]. \quad (12)$$

Применяя метод дискретных особенностей [14] к сингулярному интегральному уравнению (9) с дополнительными условиями (10), получим систему линейных алгебраических уравнений. Значения  $\gamma_{n,3}$ , при которых определитель этой системы уравнений обращается в ноль, соответствуют постоянным распространения собственных волн. При каждом фиксированном  $n = n_0$ , положив  $A_{j,n_0} = 1$ , из (9) и (10), используя обозначение (3), можно определить амплитуды собственных волн  $A_{m,n_0}$ .

При выводе выражения (2) не рассматривались волны, у которых поперечные волновые числа удовлетворяют условию  $\sin(\eta_{m_0,n}(l-b)) = 0$ . Поэтому к системе собственных волн необходимо также добавить волны, у которых

$$\sin(\eta_{m,n}l) = 0 \quad \text{и} \quad \sin(\eta_{m_0,n}(l-b)) = 0. \quad (13)$$

Обозначим постоянные распространения таких волн как  $\gamma_{m,n,4} = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi m}{ka}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{kb}\right)^2}$ , а их амплитуды Фурье как  $A_{m,n,0}$ . Заметим, что при  $m > 1$  эти волны существуют лишь в случае, когда можно записать  $l = \frac{l_1}{l_2}b$ , где  $l_1$  и  $l_2$  – целые числа.

В случае  $\alpha_1 = 0$  и  $\beta_W = a$  вместо обозначений (3) следует ввести обозначения

$$C_{m,n} = A_{m,n} \frac{\sin(\eta_{m,n}b)}{\sin(\eta_{m,n}(l-b))}, \quad m, n = 0, 1, \dots,$$

и ввести функцию

$$F(\varphi) = -\sum_{m=1}^{\infty} m C_{m,n} \sin(m\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

а дополнительные условия (10) и ядро (11) переписать в виде:

$$\int_{\alpha_q}^{\beta_q} F(\zeta) d\zeta = 0, \quad q = 1, \dots, W,$$

$$\begin{aligned} K(\zeta, \varphi) &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\mu_{m,n}}{mG_{m,n}} - 1 \right] \left[ \sin(m(\zeta + \varphi)) - \sin(m(\zeta - \varphi)) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\zeta + \varphi}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[ \operatorname{ctg}\left(\frac{\zeta - \varphi}{2}\right) - \frac{2}{\zeta - \varphi} \right] + 2\zeta \frac{\mu_{0,n}}{G_{0,n}}. \end{aligned}$$

В случае если  $\alpha_1 = 0$  и  $\beta_W < a$  или  $\alpha_1 > 0$  и  $\beta_W = a$ , сходимость метода значительно ухудшается. Это связано с тем, что представление (7) функции  $F(\varphi)$  при  $q = 1$  или  $q = W$  неадекватно отображает поведение поля вблизи ребра.

### 3. Одиночная ячейка

Рассмотрим стык двух полубесконечных прямоугольных волноводов с общей стенкой и двух полубесконечных прямоугольных волноводов со множеством полубесконечных щелей в общей стенке. Схематическое изображение структуры представлено на рис. 2, а, где  $I, II, III$  – частичные области. Пунктирной линией в области  $III$  обозначена общая стенка, содержащая щели. Будем предполагать, что щели прорезаны в широких стенках волноводов, однако полученные результаты могут быть перенесены и на другие случаи. Запишем систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд Фурье в каждой из областей.

В силу линейности задачи рассеянное поле в каждой из областей можно представить в виде суперпозиции полей, возбужденных волнами, набегающими из области  $I$  с амплитудами  $D_{m,n}^0$ , из области  $II$  с амплитудами  $C_{m,n}^0$ ,  $m + n \neq 0$ , а также из области  $III$  с амплитудами  $A_{m,n}^0$ ,  $A_{m,n,0}^0$ ,  $m, n = 0, 1, \dots$ . Подставляя в решение последовательно вместо амплитуды одной из падающих волн 1, а вместо двух других 0, получим элементы операторов рассеяния данной структуры.

Представим компоненту  $H_z$  магнитного поля в каждой из областей в виде:

в области  $I$

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi m}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{l-b}(y-b)\right) \times$$

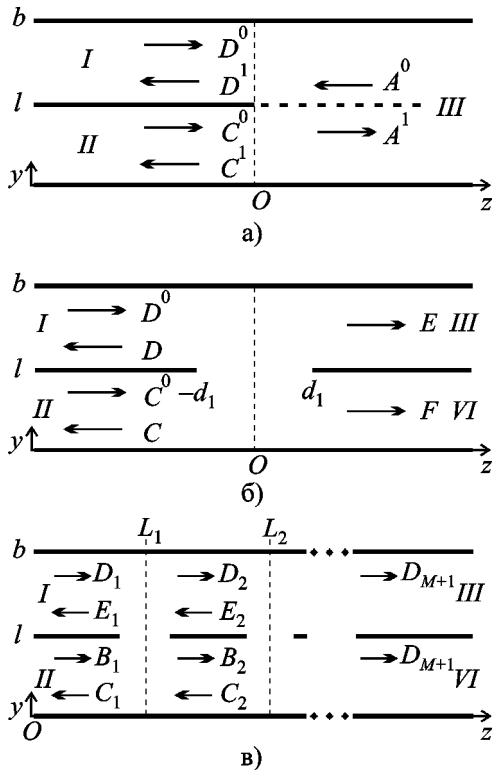


Рис. 2. Стык полубесконечных волноводов (а); одиночная ячейка (б) и конечная система ячеек (в)

$$\times [D_{m,n}^0 \exp(ik\gamma_{m,n,1}z) + D_{m,n}^1 \exp(-ik\gamma_{m,n,1}z)];$$

в области II

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{l} y\right) \times [C_{m,n}^0 \exp(ik\gamma_{m,n,2}z) + C_{m,n}^1 \exp(-ik\gamma_{m,n,2}z)];$$

в области III

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos(\eta_{m,n}y) \times [A_{m,n}^0 \exp(-ik\gamma_{n,3}z) + A_{m,n}^1 \exp(ik\gamma_{n,3}z)] + \sum_m \sum_m \cos\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \times$$

$$\times [A_{m,n,0}^0 \exp(-ik\gamma_{m,n,4}z) + A_{m,n,0}^1 \exp(ik\gamma_{m,n,4}z)], \quad 0 < y < l;$$

где  $\gamma_{m,n,1} = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi m}{ka}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{k(b-l)}\right)^2}$ ,  $\gamma_{m,n,2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi m}{ka}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{kl}\right)^2}$ . Во второй сумме в выражении для области III индексы  $m$  и  $n$  выбраны так, чтобы выполнялись условия (13).

Выражение для компоненты  $H_z$  в области III при  $l < y < b$  можно получить, используя формулы (1) и (2). Остальные компоненты электрического и магнитного полей могут быть найдены из уравнений Максвелла.

Введем скалярное произведение двух вектор-функций в сечении  $z = 0$  при помощи скалярного интеграла:

$$(\vec{E}_{m,n}^v; \vec{E}_{m,p}^w) = \int_{a_v}^{b_v} \int_0^a \left( E_{x,m,n}^v E_{x,m,p}^w + \frac{a}{b_v - a_v} \frac{n + \delta_{m,0}}{m + \delta_{m,0}} E_{y,m,n}^v E_{y,m,p}^w \right) dx dy, \quad (14)$$

$$(\vec{H}_{m,n}^v; \vec{H}_{m,p}^w) = \int_{a_v}^{b_v} \int_0^a \left( H_{y,m,n}^v H_{y,m,p}^w + \frac{a}{b_v - a_v} \frac{n + \delta_{m,0}}{m + \delta_{m,0}} H_{x,m,n}^v H_{x,m,p}^w \right) dx dy,$$

где  $E_{x,m,n}^v$ ,  $E_{y,m,n}^v$ ,  $H_{x,m,n}^v$ ,  $H_{y,m,n}^v$  – выражения для  $x$ - или  $y$ -компоненты поля  $H_z$  при фиксированных индексах  $m$  и  $n$ . Пределы интегрирования  $\{a_v, b_v\}$ , равны  $\{l, b\}$ ,  $\{0, l\}$  или  $\{0, b\}$ . Индексы  $w, v$  соответствуют номеру области I, II или III.

Обозначим

$$D_{m,n}^{j,1} = \frac{D_{m,n}^j}{k^2 - (\gamma_{m,n,1})^2}, \quad C_{m,n}^{j,1} = \frac{C_{m,n}^j}{k^2 - (\gamma_{m,n,2})^2},$$

$$A_{m,n}^{j,1} = \frac{A_{m,n}^j}{k^2 - (\gamma_{n,3})^2}, \quad A_{m,n,0}^{j,1} = \frac{A_{m,n,0}^j}{k^2 - (\gamma_{n,4})^2},$$

где  $j = 0, 1$ . Перенумеруем постоянные распространения волноводных волн  $\gamma_{p,j} = \gamma_{m_p, n_p, j}$  так, чтобы  $\text{Im} \gamma_{p,j} < \text{Im} \gamma_{p+1, j}$ ,  $\text{Re} \gamma_{p,j} > \text{Re} \gamma_{p+1, j}$ ,  $p = 0, 1, \dots$ ,  $j = 1, 2, 4$ .

Приравняв касательные компоненты электрического и магнитного полей при  $z = 0$  и взяв их скалярные произведения, определенные по формуле (14), приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которую можно решить методом редукции:

$$bA_{m_0,0,0}^{1,1} = (b-l)D_{m_0,0}^{0,1} + lB_{m_0,0}^{0,1}; \quad (15)$$

$$\gamma_{0,1}D_{m_0,n_0}^{0,1} - \gamma_{0,2}B_{m_0,n_0}^{0,1} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{b \sin(\eta_{m_0,q}) \eta_{m_0,q}}{2k^2 l (b-l)} \times \left[ \frac{A_{m_0,q}^{1,1}}{\gamma_{q,3} - \gamma_{0,1}} - \frac{A_{m_0,q}^{0,1}}{\gamma_{q,3} + \gamma_{0,1}} \right]; \quad (16)$$

$$\gamma_{p,1}D_{m_p,n_p}^{0,1} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta_{m_p,q}) \eta_{m_p,q}}{2k^2 (b-l)} \times \left[ \frac{A_{m_p,q}^{1,1}}{\gamma_{q,3} - \gamma_{p,1}} - \frac{A_{m_p,q}^{0,1}}{\gamma_{q,3} + \gamma_{p,1}} \right], \quad p = 1, 2, \dots; \quad (17)$$

$$\gamma_{p,2}B_{m_p,n_p}^{0,1} = - \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta_{m_p,q}) \eta_{m_p,q}}{2k^2 l} \times \left[ \frac{A_{m_p,q}^{1,1}}{\gamma_{q,3} - \gamma_{p,2}} - \frac{A_{m_p,q}^{0,1}}{\gamma_{q,3} + \gamma_{p,2}} \right], \quad p = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Для определенности здесь принято  $n_0 = 0$ .

Коэффициенты  $D_{m,n}^{j,1}$  и  $C_{m,n}^{j,1}$  могут быть определены из формул:

$$(1 + \delta_{p,0}) \gamma_{p,1} D_{m_p, n_p}^{1,1} = - \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta_{m_p,q}) \eta_{m_p,q}}{k^2 (b-l)} \times \left[ \frac{A_{m_p,q}^{1,1}}{\gamma_{q,3} + \gamma_{p,1}} - \frac{A_{m_p,q}^{0,1}}{\gamma_{q,3} - \gamma_{p,1}} \right] + \gamma_{0,1} A_{m_0,0}^{0,1} \delta_{p,0};$$

$$(1 + \delta_{p,0}) \gamma_{p,2} B_{m_p, n_p}^{1,1} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta_{m_p,q}) \eta_{m_p,q}}{k^2 l} \times \left[ \frac{A_{m_p,q}^{1,1}}{\gamma_{q,3} + \gamma_{p,2}} - \frac{A_{m_p,q}^{0,1}}{\gamma_{q,3} - \gamma_{p,2}} \right] + \gamma_{0,2} A_{m_0,0}^{0,1} \delta_{p,0},$$

$p = 0, 1, \dots$

Уравнения (15)-(18) записаны в предположении иррациональности соотношения  $l/b$ . Однако, осуществив предельный переход по параметру  $l/b$ , из уравнений (15)-(18) можно получить уравнения для рационального соотношения  $l/b$ .

Рассмотрим теперь одиночную ячейку  $M_0$  (рис. 2, б). Обозначим векторы амплитуд Фурье падающего из областей  $I, II$  поля как  $D^0$  и  $C^0$ , а рассеянного в областях  $I, II, III, IV$  поля как  $D, C, E, F$ . Стрелками на рис. 2, б указаны направления распространения волн. Векторы амплитуд связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= e^- t_{31} e^+ A_1, \\ F &= e^- t_{32} e^+ A_1, \\ D &= e^- t_{31} e^+ A_2 + e^- t_{21} e^- C^0 + e^- t_{11} e^- D^0, \\ C &= e^- t_{32} e^+ A_2 + e^- t_{22} e^- C^0 + e^- t_{12} e^- E^0, \\ A_1 &= (\hat{I} - e^+ t_{33} e^+ e^+ t_{33} e^+)^{-1} (e^+ t_{13} e^- D^0 + e^+ t_{23} e^- C^0), \\ A_2 &= e^+ t_{33} e^+ A_1, \end{aligned}$$

где  $t_{ij}$  – операторы преобразования волны из области  $i$  в область  $j$  структуры, представленной на рис. 2, а. Индексы  $i, j$  соответствуют номеру области  $I, II$  или  $III$ . Оператор  $e^\pm$  имеет диагональный вид и определяет изменение комплексных амплитуд пространственных гармоник поля при смещении плоскости отсчета на величину  $d_1$  в положительном или отрицательном направлении оси  $Oz$ ,  $\hat{I}$  – единичный оператор.

#### 4. Конечная система ячеек

Рассмотрим конечную систему ячеек, схематическое изображение которой представлено на рис. 2, в. Обозначим векторы амплитуд

Фурье падающего поля как  $D_1$  и  $B_1$ , а рассеянного между  $(k-1)$ -й и  $k$ -й ячейкой поля как  $D_k$ ,  $E_k$ ,  $C_k$  и  $B_k$ . Запишем уравнения для определения амплитуд Фурье отраженного, прошедшего полей и поля между ячейками для структуры, состоящей из  $M$  ячеек:

$$D_k = t_{13}e_{k-1}^+e_{k-2}^-D_{k-1} + t_{11}e_{k-1}^-e_k^+E_k + t_{21}e_{k-1}^-e_k^+C_k + t_{23}e_{k-1}^+e_{k-2}^-B_{k-1};$$

$$B_k = t_{14}e_{k-1}^+e_{k-2}^-D_{k-1} + t_{12}e_{k-1}^-e_k^+E_k + t_{22}e_{k-1}^-e_k^+C_k + t_{24}e_{k-1}^+e_{k-2}^-B_{k-1}, \quad k = 2, \dots, M+1;$$

$$E_k = t_{11}e_k^+e_{k-1}^-D_k + t_{13}e_k^-e_{k+1}^+E_{k+1} + t_{23}e_k^-e_{k+1}^+C_{k+1} + t_{21}e_k^+e_{k-1}^-B_k; \quad (19)$$

$$C_k = t_{12}e_k^+e_{k-1}^-D_k + t_{14}e_k^-e_{k+1}^+E_{k+1} + t_{24}e_k^-e_{k+1}^+C_{k+1} + t_{22}e_k^+e_{k-1}^-B_k, \quad k = 1, \dots, M;$$

$$C_{M+1} = 0;$$

$$E_{M+1} = 0;$$

где  $t_{ij}$  – операторы преобразования волны из области  $i$  в область  $j$  одиночной ячейки (см. рис. 2, б). Индексы  $i, j$  соответствуют номерам областей  $I, II, III$  или  $IV$ . Операторы  $e_k^\pm$  имеют диагональный вид и определяют изменение комплексных амплитуд пространственных гармоник поля при смещении плоскости отсчета на величину  $L_k$  в положительном или отрицательном направлении оси  $Oz$ ,  $e_0^\pm = \hat{I}$ .

Таким образом, получены операторные уравнения (19) для определения параметров прямоугольных волноводов, связанных произвольным количеством щелей в общей стенке.

### 5. Численные результаты

Обозначим  $|t_{ij}|$  модуль амплитуды волны  $H_{10}$  в области  $j$  конечноэлементной структуры (см. рис. 2, в), при условии, что на систему щелей набегают  $H_{10}$ -волна единичной амплитуды из области  $i$ . На рис. 3. представлена зависимость модуля амплитуды  $|t_{14}|$  от частоты  $f$  для структуры, содержащей одну щель, центр которой отстоит от центра широкой стенки

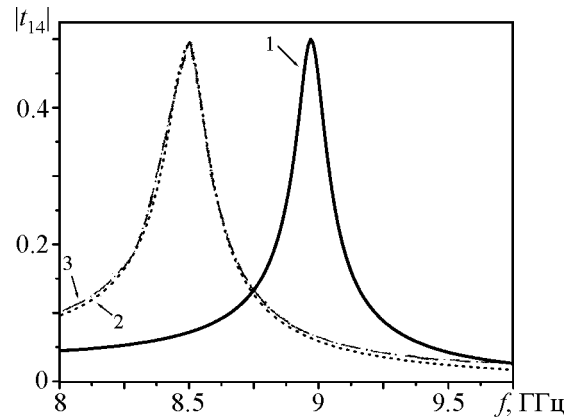
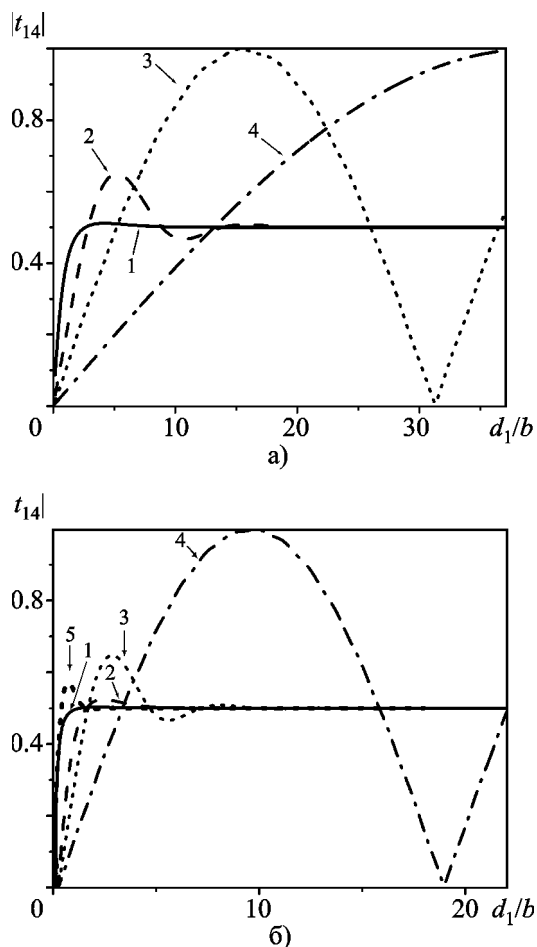


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды  $|t_{14}|$  волны  $H_{10}$  от частоты  $f$  для структуры, содержащей одну щель, при  $h_0 = 0.3$  см,  $a = 2.286$  см,  $l = b - l = 1.016$  см,  $d = 0.1$  см: кривая 1 –  $d_1 = 0.746$  см, кривая 2 –  $d_1 = 0.8$  см, кривая 3 – из работы [8]

волноводов на расстоянии  $h_0 = 0.3$  см. Волноводы имеют одинаковые поперечные размеры,  $l = b - l = b/2$ , ширина щели  $d = 0.1$  см. Результаты, полученные описанным методом, сравниваются с результатами из работы [8]. Совпадение оказывается достаточно хорошим.

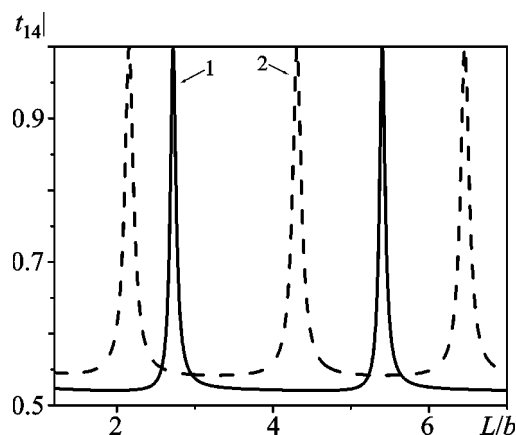
На рис. 4. представлена зависимость модуля амплитуды  $|t_{14}|$  от длины щелей  $2d_1$  при симметричном расположении щелей относительно центра широкой стенки,  $x = a/2$ , и при различных расстояниях между щелями и волновых числах. Волноводы имеют одинаковые поперечные размеры,  $l = b - l = b/2$ . Расстояние между щелями вдоль оси  $Ox$  обозначено как  $h$ . В случае, когда щель расположена по центру широкой стенки, при небольшом размере щели взаимодействие волноводов практически отсутствует. Взаимодействие волноводов растет при удалении щелей от центра или при изменении длины щели. Так, существуют интервалы значений параметра  $d_1$ , при которых коэффициент  $|t_{14}|$  приближается к единице. При значениях длин волн, близких к критической длине волны  $H_{10}$  прямоугольного волновода, и значениях  $d_1/b \gg 1$  коэффициенты  $|t_{ii}| \approx |t_{jj}| \approx 1/2$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ .

На рис. 5 представлена зависимость модуля амплитуды  $|t_{14}|$  от расстояния между ще-



**Рис. 4.** Зависимость модуля амплитуды  $|t_{14}|$  волны  $H_{10}$  от нормированной длины щелей при  $a/b = 2.3$ ,  $l/b = (b-1)/b$  для одной щели,  $d/b = 0.3$  (а); для двух щелей, симметрично расположенных относительно центра широкой стенки,  $d/b = 0.15$ ,  $h/b = 0.3$  (б): кривые 1 –  $kb = 1.37$ ; кривые 2 –  $kb = 1.4$ ; кривые 3 –  $kb = 1.5$ ; кривые 4 –  $kb = 2$ ; кривая 5 –  $kb = 2$ ,  $h/b = 1.8$

лями  $L = L_2 - L_1$  для структуры, состоящей из четырех щелей. Одиночная ячейка состоит из двух симметрично расположенных щелей, отстоящих друг от друга на расстоянии  $h/b = 1.8$ . Графики построены для двух значений параметра  $k$ . Изменение этого параметра приводит к сдвигу максимумов зависимостей вдоль оси  $L/b$ . Зависимости носят практически периодический характер с периодом  $L/\lambda_g \approx 0.5$ , где  $\lambda_g$  – длина волны в волноводе. Отклонение от периодичности вызвано влиянием затухающих волн.



**Рис. 5.** Зависимость модуля амплитуды  $|t_{14}|$  волны  $H_{10}$  от нормированного продольного расстояния между щелями  $L$  для структуры, состоящей из четырех щелей, при  $M = 2$ ,  $d/b = 0.15$ ,  $h/b = 1.8$ ,  $d_1/b = 0.5$ ,  $a/b = 2.3$ ,  $l/b = (b-1)/b$ : кривая 1 –  $kb = 1.8$ , кривая 2 –  $kb = 2$

## 6. Заключение

В работе построено строгое решение задачи дифракции на произвольном множестве прямоугольных щелей в общей стенке двух прямоугольных волноводов. Представленные результаты позволяют определить закономерности изменения полос частот, в которых структура может применяться как направленный ответвитель и как делитель мощности, при изменении числа щелей, их размеров и положения. Совпадение результатов, полученных описанным методом с результатами, представленными в работе [8], оказалось достаточно хорошим. Моделирование характеристик такого рода структур позволяет прогнозировать создание направленных ответвителей и делителей мощности с высокими интегральными характеристиками.

## Литература

1. Ball J. A. R. and Sulda T. M. Small aperture crossed waveguide broad-wall directional couplers // IEE Proc. Microwave Antennas Propag. – 2000. – Vol. 147, No. 4. – P. 249-254.
2. Jiang Z., Shen Z., and Shan X. Mode-Matching Analysis of Waveguide T-Junction Loaded With an



- $H$ -Plane Dielectric Slab // Progress In Electromagnetics Research, PIER. – 2002. – Vol. 36. – P. 319-335.
3. Jia H., Yoshitomi K., and Yasumoto K. Rigorous and Fast Convergent Analysis of a Rectangular Waveguide Coupler Slotted In Common Wall // Progress in Electromagnetics Research, PIER. – 2004. – Vol. 46. – P. 245-264.
  4. Bethe H. A. Theory of diffraction by slots // Phys. Rev. – 1944. – Vol. 66, No. 7, 8. – P. 163-182.
  5. Cohn S. B. Microwave Coupling by Large Apertures // Proc. IRE. – 1952. – Vol. 40, No. 6. – P. 696-699.
  6. Levy R. Analysis and Synthesis of Waveguide Multi-aperture Directional Couplers // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1968. – Vol. 16, No. 12. – P. 995-1006.
  7. Dong-Jin Kim and Jeong-Hae Lee Partial  $H$ -Plane Filters With Multiple Transmission Zeros // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 2008. – Vol. 56, No. 7. – P. 1693-1698.
  8. Datta A., Rajeev A. M., Chakrabarty A., and Das B. N. S Matrix of a Broad Wall Coupler Between Dissimilar Rectangular Waveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1995. – Vol. 43, No. 1. – P. 56-62.
  9. Zhihua Jiang and Zhongxiang Shen. Full-Wave Analysis of Cross-Aperture Waveguide Couplers // IEEE Microwave Wireless Components Lett. – 2002. – Vol. 12, No. 7. – P. 267-269.
  10. Wu Ren, Ben-Qing Gao, Zheng-Hui Xue, Wei-Ming Li, and Bo Liu. Full-Wave Analysis of Broad Wall Slot's Characteristics in Rectangular Waveguides // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2004. – Vol. 52, No. 9. – P. 2436-2444.
  11. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. Н., Погарский С. А. Дифракция волн типа  $H_{0m}$  и  $E_{0m}$  на системе аксиально-симметричных неоднородностей в коаксиальном тракте // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55, №5. – С. 539-545. (Kaliberda M. E., Lytvynenko L. M., and Pogarsky S. A. Diffraction of  $H_{0m}$  and  $E_{0m}$  Modes by a System of Axially Symmetric Discontinuities in a Coaxial Circuit // J. Comm. Tech. Electron. – 2010. – Vol. 55, No. 5. – P. 505-511).
  12. Калиберда М. Е., Литвиненко Л. Н., Погарский С. А. Операторный метод в задаче дифракции электромагнитных волн на плоских экранах // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54, №9. – С. 1029-1036. (Kaliberda M. E., Litvinenko L. N., and Pogarskii S. A. Operator Method in the Analysis of Electromagnetic Wave Diffraction by Planar Screens // J. Comm. Tech. Electron. – 2009. – Vol. 54, No. 9. – P. 975-981.)
  13. Zaginaylov G. I., Gandel Y. V., Kamyshan O. P., Kamyshan V. V., Hirata A., Thumvongskul T., and Shiozawa T. Full-wave analysis of the field distribution of natural modes in the rectangular waveguide grating based on singular integral equation method //

- IEEE Trans. Plasma Sci. – 2002. – Vol. 30, No. 3. – P. 1151-1159.
14. Nosich A. A. and Gandel Y. V. Numerical Analysis of Quasioptical Multireflector Antennas in 2-D With the Method of Discrete Singularities: E-Wave Case // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2007. – Vol. 55, No. 2. – P. 399-406.

### Дифракція $H$ -хвиль на системі щілин у спільній стінці двох паралельно розташованих прямокутних хвилеводів

М. Є. Калиберда, С. О. Погарський

Розв'язується задача дифракції  $H$ -хвиль на системі щілин у спільній стінці двох прямокутних хвилеводів з використанням операторного методу. Щілини мають прямокутну форму. Досліджено характер взаємодії хвилеводів при варіації геометричних розмірів щілин та їх положення у хвилеводі. Отримані результати дозволяють визначити закономірності зміни смуг частот, у межах яких досліджувана структура може використовуватися у якості спрямованого відгалужувача та подільника потужності. Виконано порівняння результатів, отриманих цим методом, з результатами, отриманими іншими авторами.

### Diffraction of $H$ -modes by a System of Slots in a Common Wall of Two Parallel Rectangular Waveguides

M. E. Kaliberda and S. A. Pogarsky

The diffraction of  $H$ -modes by a system of slots in a common wall of two rectangular waveguides is solved using the operator approach. The slots are rectangular. The waveguides interaction behavior, when slot size and position in waveguide are varied, is investigated. The results obtained allow to determine the laws of variation of frequency bands when the structure under investigation may be used as directional coupler and power divider. Thus obtained results were compared with those obtained by other authors.