

Метод регуляризації у дослідженні майже поперечних хвиль у передфрактальних системах мікροстрічкових ліній

Г. І. Кошовий

Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського,
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070 Україна
E-mail: k405@d4.khai.edu

Стаття надійшла до редакції 4 червня 2009 р.

Поставлено та перетворено на основі методу інтегральних рівнянь задачу поширення електромагнітних хвиль у передфрактальній системі мікροстрічкових ліній. У вивченні сингулярних інтегральних рівнянь, що визначають головні характеристики майже поперечних хвиль у зазначеній системі, успішно застосовується метод регуляризації Векуа–Карлемана. Детально розглядається вузькострічкове наближення даної задачі. Наводяться числові результати.

1. Вступ

Методи аналітичної регуляризації широко застосовуються у розв'язанні крайових задач електродинаміки [1-3]. У даній статті пропонується до використання метод регуляризації Векуа–Карлемана (РВК) у дослідженні та розв'язанні систем інтегральних рівнянь (ІР), що описують поширення електромагнітних хвиль у передфрактальній системі мікροстрічкових ліній (МСЛ) [4, 5]. Фрактальність системи відкритих стрічкових ліній зі спільною діелектричною основою полягає у тому, що стрічки розташовуються у відповідності з відрізками, які утворюють певну стадію побудови досконалої множини Кантора (ДМК) зі змінною фрактальною розмірністю [6]. ДМК є одним з найпростіших прикладів самоподібних фракталів – множин, топологічна розмірність яких є меншою ніж інші розмірності, зокрема, хаусдорфова розмірність. Для знаходження характеристик майже поперечних електромагнітних хвиль, які можуть поширюватись у даній системі МСЛ, використовують математичні моделі у вигляді систем ІР першого роду [7]. Такі моделі виникають завдяки застосуванню методу ІР, який без втрати точності не лише зменшує розмірність задачі, але й зводить

зовнішню задачу електродинаміки до задачі в обмеженій області.

2. Постановка задачі

Система МСЛ складається з трьох елементів: діелектричної основи; стрічкової решітки на цій основі; металеві площини, що заземлює основу знизу. Основою є нескінченний шар діелектрика певної товщини d . Органічні діелектрики, використовувані при цьому, мають відносно діелектричну проникність ϵ , яка змінюється від значення 2.0 ± 0.1 (фольгований фторопласт) до 16.0 ± 0.8 (полістирол з наповненням двоокисом титану) [8]. Решітка складається з 2^m абсолютно провідних та нескінченно тонких стрічок з паралельними краями. Їх розташування диктується законом творення ДМК, натуральний параметр m вказує на стадію його побудови. Шукаємо розв'язки рівнянь Максвелла, які визначають електромагнітні хвилі з залежністю $e^{i(hz - \omega t)}$, де h – стала поширення, z – координата уздовж стрічок, ω – кругова частота. Внаслідок того що решітка є плоскою і розташована у площині $y = d$, електромагнітне поле зручно подати з допомогою лише двох компонент векторного електричного потенціалу:

$$A_{x,z}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} F_{x,z}(w) \frac{\sin(vy)}{\sin v}, \quad 0 < y < 1 \\ G_{x,z}(w) e^{-\gamma(y-1)}, \quad y > 1 \end{array} \right\} \times e^{iwx} dw. \quad (1)$$

Тут $v = \sqrt{\chi^2 \varepsilon - v^2 - w^2}$, $\gamma = \sqrt{v^2 - \chi^2 + w^2}$, $\chi = kd = 2\pi d/\lambda$, $v = hd$, k – хвильове число вільного простору; виконано також перехід до безрозмірних величин. Користуючись граничними умовами у площині $y = 1$ для вектора напруги електричного поля, а також виразами для щільності поверхневих струмів на стрічках через стрибок напруги магнітного поля, отримуємо співвідношення між перетвореннями Фур'є:

$$F_x(w) = \frac{\varepsilon}{K(w)} \left[\hat{j}_z(w) \frac{\varepsilon - 1}{\gamma} v w + \hat{j}_x(w) K_x(w) \right], \quad (2)$$

$$F_z(w) = \frac{\varepsilon}{K(w)} \left[\hat{j}_z(w) K_z(w) + \hat{j}_x(w) \frac{\varepsilon - 1}{\gamma} v w \right].$$

Тут $\hat{j}_{x,z}(w)$ – перетворення Фур'є компонент щільності поверхневих струмів,

$$K_x(w) = \varepsilon(v \operatorname{ctg} v + \gamma) - v^2 \frac{\varepsilon - 1}{\gamma},$$

$$K_z(w) = \varepsilon v \operatorname{ctg} v - \frac{v^2}{\gamma} + v^2 \frac{\varepsilon - 1}{\gamma},$$

$$K(w) = \varepsilon(v \operatorname{ctg} v + \gamma) \left(\varepsilon v \operatorname{ctg} v - \frac{v^2}{\gamma} \right).$$

На стрічках дотичні компоненти вектора напруги електричного поля дорівнюють нулеві, внаслідок чого маємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + k^2 \varepsilon A_x + ih \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0,$$

$$ih \frac{\partial A_z}{\partial x} + g^2 A_z = 0.$$

Її загальний розв'язок є досить простим:

$$A_x(x, 1) = A \sin(gx) + B \cos(gx), \quad (3)$$

$$A_z(x, 1) = -i \frac{v}{g} (A \cos(gx) - B \sin(gx)).$$

Зрозуміло, що сталі A і B є такими в межах відрізка, поперечного перетину стрічки. Вони визначаються умовами збудження хвилі та умовами на ребрах стрічок, які забезпечують скінченність енергії поля в обмеженій області.

Далі до лівої частини (3) підставимо (1) з урахуванням (2), перейдемо від перетворення Фур'є до компонент щільності поверхневих струмів та поміняємо порядок інтегрування. В результаті виникне система ІР першого роду, яку у дещо перетвореному вигляді можна записати так:

$$\int_l [j_z(\xi) T(x - \xi) - iv j_x(\xi) S(x - \xi)] d\xi = \Phi(v, x), \quad (4)$$

$$\int_l [-iv j_z(\xi) S(x - \xi) + j_x(\xi) R(x - \xi)] d\xi = -\frac{i}{v} \Phi'_x(v, x).$$

Тут $x \in l = \bigcup_{k=1}^{2^m} l_k$ – об'єднання відрізків m -ї стадії побудови ДМК;

$$T(u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwu} dw}{v \operatorname{ctg} v + \gamma} + v^2 P(u);$$

$$P(u) = 2(\varepsilon - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwu} dw}{(v \operatorname{ctg} v + \gamma)(\varepsilon v \operatorname{ctg} v - v^2/\gamma)};$$

$$S(u) = P'(u);$$

$$R(u) = 2\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwu} dw}{\varepsilon v \operatorname{ctg} v - v^2/\gamma} - v^2 P(u);$$

$$\Phi(v, x) = A^\kappa \cos(gx) - B^\kappa \sin(gx), \quad x \in l_\kappa.$$

У знаменниках функцій під знаком інтегралів, є множники, які визначають поперечні хвилі в екранованому діелектричному хвилеводі (та сама структура, проте без решітки).

Об'єктом дослідження статті є майже поперечні хвилі, для яких можна вважати виконаною умову $\chi \ll 1$, тому надалі користуємось методом малого параметру (методом Релея).

3. Метод Релея

Завдяки співвідношенню між ядрами $R(u) - T(u) = S'(u) - v^2 P(u)$ рівняння (4) можуть бути перетворені до простіших рівнянь:

$$\int_l q_\varepsilon(t) \mathfrak{R}_\varepsilon(x-t) dt = \chi^2 \Phi(v, x), \quad (5)$$

$$\int_l [j_z(t) \mathfrak{R}_1(x-t) + q_\varepsilon(t) P(x-t)] dt = \Phi(v, x),$$

$$x \in l,$$

де

$$q_\varepsilon(t) = -iv [j'_x(t) + iv j_z(t)], \quad (6)$$

$$\mathfrak{R}_\varepsilon(u) = 2\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwu} dw}{\varepsilon v \operatorname{ctg} v - v^2/\gamma},$$

$$\mathfrak{R}_1(u) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwu} dw}{v \operatorname{ctg} v + \gamma}.$$

Вони будуть рівнозначні попереднім рівнянням (4) за виконання умов

$$\int_l [iv j_x(t) R(\rho_k - t) - v^2 j_z(t) S(\rho_k - t)] dt = \Phi'(v, \rho_k),$$

де ρ_k – нормована на d координата центра k -ї стрічки. Ці умови разом зі співвідношеннями

$$v^2 = \frac{\int_{l_m} q_\varepsilon(t) dt}{\int_{l_m} q_1(t) dt}, \quad (7)$$

що впливають з (6) інтегруванням, використовуються у визначенні невідомих сталих v , A^m , B^m .

Для застосування методу Релея скористаємось розкладаннями відомих функцій $\mathfrak{R}_\varepsilon(u)$, $\mathfrak{R}_1(u)$, та $P(u)$ за степенями малого частотного параметру χ . Далі, враховуючи ці розкладання та рівняння (5), беремо відповідні розкладання шуканих величин. В результаті прирівнювання виразів для відповідних степенів χ отримуємо послідовності IP першого роду, які у випадку найпростішої передфрактальної системи МСЛ можна записати таким чином:

$$\sum_{i=1}^{2^m} \int_{-1}^1 q_{n\varepsilon}^i(t) G_\varepsilon(\rho_{\kappa i} + \alpha_m(x-t)) dt = A_n^\kappa + F_{n\varepsilon}(\rho_\kappa + \alpha_m x), \quad |x| < 1, \quad \kappa = 1, \dots, 2^m.$$

Тут індекс n вказує на коефіцієнти в асимптотичних розкладаннях відомих і невідомих величин за малим частотним параметром, а індекс m визначає стадію творення ДМК $\rho_{mi} = \rho_m - \rho_i$, α_m – нормована на d півширина стрічки.

Функція, що задає ядра цих систем, може бути наведена у вигляді як інтеграла Фур'є

$$G_\varepsilon(u) = 2\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwu} dw}{|w|(\varepsilon \operatorname{cth}|w| + 1)}, \quad (8)$$

так і ряду типу геометричної прогресії

$$G_\varepsilon(u) = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \sum_{m=0}^{\infty} q^m \ln \frac{4(m+1)^2 + u^2}{4m^2 + u^2}, \quad (9)$$

$$\text{де } q = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Права частина систем має невідомі сталі A_n^κ , при цьому функції $F_{n\varepsilon}(\rho_\kappa + \alpha_m x)$ слід вва-

жати відомими, зокрема, для $n = 0.1$ вони є нульовими. Отже початковою системою ІР є така електростатична система:

$$\sum_{i=1}^{2^m} \int_{-1}^1 q_{0\epsilon}^i(t) G_\epsilon(\rho_{\kappa i} + \alpha_m(x-t)) dt = A_0^\kappa. \quad (10)$$

Тут невідомі функції $q_{0\epsilon}^i(t)$ визначають щільність поверхневих зарядів на стрічках, а сталі A_0^κ – потенціали на них відносно заземленого нижнього екрана.

Як очевидно з виразу (9), функція $G_\epsilon(u)$ має логарифмічну особливість для $u = 0$, яка проявляється у вигляді такої ж особливості для діагональних ядер ІР: $\rho_{\kappa\kappa} = 0$, $\tau = t$. Позадіагональні ядра, завдяки нерівності $\rho_{\kappa i} + 2\alpha_m > 0$ для $\kappa \neq i$, будуть обмеженими та неперервними. Зазначена нерівність впливає з геометрії системи МСЛ, та вона є суттєвою у застосуванні методу РВК і має враховуватись у числових розрахунках. Отже, маємо системи сингулярних ІР першого роду, які є основою дослідження майже поперечних електромагнітних хвиль у передфрактальній системі МСЛ.

4. Схема визначення характеристик майже поперечних хвиль

Розглянемо електромагнітні хвилі, що мають нульову критичну частоту, тобто вони завжди наявні у системі, і тому їх називають основними. Завдяки певній структурі поля їх також називають майже поперечними або квазі-Т-хвилями. Для визначення їх основних характеристик застосовуємо відому схему, яку можна вважати класичною [8]. Вона ґрунтується на розв'язанні систем сингулярних ІР першого роду з відомою правою частиною такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{2^m} \int_{-1}^1 q_\epsilon^{in}(t) G_\epsilon(\rho_{\kappa i} + \alpha_m(x-t)) dt = \delta_{\kappa n}, \quad (11)$$

$$|x| < 1, \quad \kappa = 1, \dots, 2^m.$$

Тут індекс n вказує на стрічку з одиничним потенціалом (котрий теж змінюється від 1 до N)

і визначає певну електростатичну задачу: знайти розподіл щільності поверхневих зарядів на стрічках за умови, що потенціали на них, окрім n -ї, є нульовими. Тобто маємо N систем ІР з майже нульовою правою частиною: $\delta_{\kappa n}$ – символ Кронекера.

Для того щоб пов'язати системи (10) та (11) між собою, слід довести, що їх розв'язок є єдиним. Звернемось до однорідної системи і запишемо її у вигляді одного рівняння

$$\int_l q(t) G_\epsilon(x-t) dt = 0, \quad x \in l.$$

Тут l означає об'єднання відрізків. За їх межами невідома функція буде нульовою. Далі скористаємось перетворенням Фур'є для згортки функцій $q(t)$ та $G_\epsilon(t)$. В результаті замість ІР виникає функціональне співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}(w) \hat{G}_\epsilon(w) e^{-iwx} dw = 0, \quad x \in l,$$

і, відповідно за межами відрізків, буде виконуватись друге співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}(w) e^{-iwx} dw = 0,$$

що доповнює перше. Оскільки згідно з (8)

$$\hat{G}_\epsilon(w) = \frac{1}{\pi |w| (\epsilon \operatorname{cth}|w| + 1)},$$

рівність Парсеваля для функцій $\hat{q}(w) \hat{G}_\epsilon(w)$ та $\hat{q}(w)$ має вигляд

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{q}(w)|^2 dw}{|w| (\epsilon \operatorname{cth}|w| + 1)} = 0.$$

$$q(t) = 0.$$

Тепер, порівнюючи системи (10) та (11), отримаємо зв'язок між їх розв'язками у такому вигляді:

$$q_{0\epsilon}^i(t) = \sum_{n=1}^{2^m} A_0^n q_\epsilon^{in}(t).$$

Інтегрування цієї рівності призведе до іншої, $q_{0\varepsilon}^i = \sum_{n=1}^{2^m} A_0^n q_\varepsilon^{in}$, де $q_{0\varepsilon}^i = \int_{-1}^1 q_{0\varepsilon}^i(t) dt$. Далі використовуємо співвідношення $q_{0\varepsilon}^i = v_0 q_{01}^i$, які походять з (7) і пов'язують розв'язки системи (10) для $\varepsilon > 1$ та $\varepsilon = 1$. Коли до них підставити відповідні суми, то отримаємо

$$\sum_{n=1}^{2^m} A_0^n (q_\varepsilon^{in} - v_0 q_1^{in}) = 0, \quad i = 1, \dots, 2^m. \quad (12)$$

У матричній формі запису маємо $(Q_\varepsilon - v_0 Q_1) \vec{A}_0 = 0$.

Отже, задача про визначення сталих поширення майже поперечних електромагнітних хвиль та відповідного розподілу щільності поверхневих струмів на стрічках зведена до розв'язання узагальненої проблеми власних значень пари матриць Q_ε, Q_1 , утворених елементами q_ε^{in} для $\varepsilon > 1$ та $\varepsilon = 1$. Ці матриці є симетричними та позитивно визначеними. Доведемо останнє, скориставшись перетвореннями Фур'є та рівністю Парсеваля знову.

Запишемо системи (11) у вигляді

$$\int_l q_\varepsilon^n(t) G_\varepsilon(x-t) dt = \delta_{\kappa i}, \quad x \in l_\kappa.$$

Для довільного набору чисел ξ_ε^n маємо

$$\int_l q_\varepsilon(t) G_\varepsilon(x-t) dt = \xi_\varepsilon^\kappa, \quad x \in l_\kappa, \text{ де } q_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{2^m} \xi_\varepsilon^n q_\varepsilon^n(t).$$

Далі застосуємо теорему про згортку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}_\varepsilon(w) \hat{G}_\varepsilon(w) e^{-iwx} dw = \xi_\varepsilon^\kappa, \quad x \in l_\kappa.$$

При цьому $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}_\varepsilon(w) e^{-iwx} dw = 0, \quad x \notin l$. За рівністю Парсеваля

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{q}_\varepsilon(w)|^2 \hat{G}_\varepsilon(w) e^{-iwx} dw = \sum_{\kappa=1}^{2^m} \xi_\varepsilon^\kappa \int_{l_\kappa} q_\varepsilon(t) dt.$$

$$\text{Тобто } \sum_{\kappa=1}^{2^m} \xi_\varepsilon^\kappa \sum_{n=1}^{2^m} \xi_\varepsilon^n q_\varepsilon^{\kappa n} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{q}(w)|^2 dw}{|w|(\varepsilon \text{ch}|w| + 1)} \geq 0,$$

що й забезпечує додатну визначеність матриці Q_ε і, зокрема, Q_1 , яка відіграє суттєву роль у дослідженні узагальненої задачі на власні значення [9]. Таким чином доводиться наявність додатних власних значень, що визначають головні доданки сповільнення певних типів майже поперечної хвилі. Відповідні власні вектори при цьому визначають розподіл щільності поверхневих струмів за відомими формулами [7].

5. Метод РВК

Зведемо базові системи ІР першого роду (11) до вигляду, необхідного для застосування методу РВК. Оскільки в цьому методі виключення особливого інтеграла здійснюється шляхом розв'язання відповідного характеристичного рівняння, найперш слід виділити особливості у найпростішому вигляді. Як випливає з формули (9), лише діагональні ядра мають логарифмічну особливість, отже запишемо

$$G_\varepsilon(\alpha_m u) = \frac{4}{\varepsilon + 1} [-\ln|u| + R_{ii}(\alpha_m u)],$$

$$\text{де } R_{ii}(\alpha u) = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{4 + \alpha^2 u^2}{\alpha^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} q^m \ln \frac{4(m+1)^2 + \alpha^2 u^2}{4m^2 + \alpha^2 u^2} \right]. \text{ Відтак, систему}$$

(11) можна записати у вигляді

$$\int_{-1}^1 q_\varepsilon^{\kappa n}(t) \ln|x-t| dt = \\ = -\frac{\varepsilon+1}{4} \delta_{\kappa i} + \sum_{i=1}^{2^m} \int_{-1}^1 q_\varepsilon^{in}(t) R_{\kappa i}(x-t) dt,$$

де $R_{\kappa i}(u) = \frac{\varepsilon+1}{4} G(\rho_{\kappa i} + \alpha_m u)$ для $\kappa \neq i$. Позначивши суму у правій частині через $f_{\kappa i}(x)$ і застосувавши формулу обернення Карлемана, отримаємо

$$q_{\varepsilon}^{kn}(x) = \frac{\varepsilon+1}{4 \ln 2} \frac{\delta_{kn}}{\pi \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \times$$

$$\times \left[\text{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-x} f'_{kn}(\tau) d\tau - \frac{1}{\ln 2} \int_{-1}^1 \frac{f_{kn}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \right].$$

Нарешті підставимо вирази $f_{kn}(x)$ та поміняємо суми з інтегралами. Це призведе до системи ІР другого роду

$$q_{\varepsilon}^{kn}(x) + \sum_{i=1}^{2^m} \int_{-1}^1 q_{\varepsilon}^{in}(t) \mathfrak{R}_{ki}(x,t) dt = \frac{\varepsilon+1}{4 \ln 2} \frac{\delta_{kn}}{\pi \sqrt{1-x^2}}. \quad (13)$$

Нові ядра матимуть такий вигляд:

$$\mathfrak{R}_{ki}(x,t) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \left[\frac{1}{\ln 2} \int_{-1}^1 \frac{R_{ki}(\tau-t)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau - \right.$$

$$\left. - \text{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-x} R'_{ki}(\tau-t) d\tau \right]. \quad (14)$$

Виконаємо дослідження цих ядер враховуючи передфрактальність системи МСЛ. Для цього зведемо функції $R_{ki}(u)$ до більш зручного вигляду:

$$R_{ki}(u) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \sigma(u, \rho_{ki}, \alpha_m) - \ln(\rho_{ki} + \alpha_m u), \quad k \neq i;$$

$$R_{ii}(u) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \sigma(u, 0, \alpha_m) - \ln \alpha_m.$$

Тут $\sigma(u, \rho, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j \ln [4(j+1)^2 + (\rho + \alpha u)^2]$.

Функція $\sigma(u, \rho, \alpha)$ є гладкою за першим аргументом на сегменті $[-2, 2]$ за можливих з геометричної точки зору значень параметрів α, ρ . Графік цієї функції для $\alpha = 0.4$ та $\rho \in [0, 5]$ наведений на рис. 1. Значення діелектричної сталої взяте середнім для полімерів стиролу з двоокисом титану як напов-

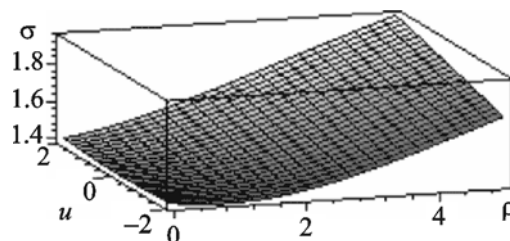


Рис. 1. Графік функції $\sigma(u, \rho, 0.4)$

нювача [8]. Враховуючи вирази для $R_{ki}(u)$, де замість ρ_{ki} доречніше поставити 2ρ , перший інтеграл правої частини (14) можна визначити інтегралами у вигляді

$$I_j(t) = \int_{-1}^1 \frac{\ln(4(j+1)^2 + (2\rho + \alpha(\tau-t))^2)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau,$$

які є збіжними і оцінюються знизу величиною $\pi \ln(4(j+1)^2 + (2\rho - 2\alpha)^2)$, а зверху – $\pi \ln(4(j+1)^2 + (2\rho + 2\alpha)^2)$. Тобто для великих значень натурального числа j поведуть себе як $\ln j$ і не погіршують суттєво збіжність геометричної прогресії зі знаменником $q = (1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$. Слід також вказати на можливість значного поліпшення збіжності ряду за рахунок згортання різниці логарифмів до логарифму частки, що використовується з виконанням числових розрахунків. Другий інтеграл правої частини (14) має похідну $R'_{ki}(u)$, яку тепер досить легко знайти. Для $k \neq i$ маємо

$$R'_{ki}(u) = \frac{-\alpha_m}{\rho_{ki} + \alpha_m u} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \sigma'_u(u, \rho_{ki}, \alpha_m) \quad \text{та}$$

$$R'_{ii}(u) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \sigma'_u(u, 0, \alpha_m).$$

Тут $\sigma'_u(u, \rho, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{2\alpha(\rho + \alpha u)}{4(j+1)^2 + (\rho + \alpha u)^2}$. Звідси легко помітити, що інтеграл типу Коші правої частини (14) визначається того ж типу, але простішими інтегралами

$$I_j(x, t) = \text{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-x} \frac{2\alpha(2\rho+\alpha(\tau-t))}{4(j+1)^2+(2\rho+\alpha(\tau-t))^2} d\tau.$$

Це розбіжні інтеграли, однак розглядаємо тільки їх головні значення, які існують, про що можна переконатись подібно до того, як це зроблено у роботі [10].

Отриманими системами ІР другого роду (13) власне і закінчується метод регуляризації, далі застосовують той чи інший метод розв'язку ІР другого роду. Тут ефективним може бути проєкційний метод із застосуванням поліномів Чебишева першого роду у якості координатних функцій [10].

6. Системи МСЛ з вузькими стрічками

У процесі творення фракталу поперечні розміри стрічок суттєво зменшуються, тому природно приділити певної уваги вузькострічковому наближенню. По-перше, тому що при цьому виникає можливість явного розв'язання систем ІР (13), а по-друге, можна детальніше розібратись з ядрами (14) у подальшому застосуванні числових методів. У припущенні $\alpha \ll 1$ до інтегралів, що визначають ядро, можна застосувати степеневі ряди для $\ln(1+u)$ та $1/(1+u)$ для $|u| < 1$. При цьому, якщо обмежитись лише двома доданками в рядах за параметром α , то отримаємо такі вирази для ядер:

$$\mathfrak{R}_{ii}(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\ln 2} [\sigma_0 - \ln 2],$$

$$\mathfrak{R}_{ki}(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\ln 2} \sigma_0(\rho_{ki}) + \alpha \left(\frac{t}{\ln 2} - x \right) \sigma_1(\rho_{ki}) \right].$$

$$\text{Тут } \sigma_0 = \ln \frac{4}{\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} q^m \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right),$$

$$\sigma_0(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} q^m \ln \frac{4(m+1)^2 + \rho^2}{4m^2 + \rho^2},$$

$$\sigma_1(\rho) = \frac{1}{2\rho} - \frac{\varepsilon\rho}{\varepsilon+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{4(m+1)^2 + \rho^2}.$$

Тобто, застосувавши метод послідовних наближень, можна знайти розв'язання систем ІР у вигляді суми $q_\varepsilon^{in}(x) = q_{\varepsilon 0}^{in}(x) + \alpha q_{\varepsilon 1}^{in}(x)$. Тут $q_{\varepsilon 0}^{in}(x) = \frac{q_{\varepsilon 0}^{in}}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $q_{\varepsilon 0}^{in}$ – визначаються за правилом Крамера. Наприклад, якщо взяти систему МСЛ, що відповідає другій стадії побудови ДМК, то для визначення $q_{\varepsilon 0}^{in}$ отримаємо такі системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$q_{\varepsilon 0}^{kn} \sigma_0 + \sum_{i \neq k}^4 q_{\varepsilon 0}^{in} \sigma_0(\rho_{ki}) = \frac{\varepsilon+1}{4} \delta_{kn}.$$

Для першої з них ($n=1$) маємо $q_{\varepsilon 0}^{i1} = \frac{\varepsilon+1}{4} \frac{\Delta_{li}}{\Delta}$, де $\Delta = \sigma_0 \Delta_{11} + \sum_{i=2}^4 \sigma_0(\rho_{li}) \Delta_{li}$, Δ_{li} – алгебраїчні доповнення елементів першого рядка матриці коефіцієнтів СЛАР. При цьому функції, що визначають поправки першого порядку, відшукуються за формулами:

$$q_{\varepsilon 1}^{in}(x) = \frac{x \ln 2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sum_{i \neq k}^4 q_{\varepsilon 0}^{in} \sigma_0(\rho_{ki}).$$

Тут, очевидно, $q_{\varepsilon 1}^{in} = 0$. Таким чином, отримані СЛАР визначають елементи матриць узагальненої проблеми власних значень (12) з точністю $O(\alpha^2)$.

Для виконання числових експериментів доречно взяти параметри α та ε сталими, а змінювати ρ , враховуючи вищевказані припущення. Окрім того, у розрахунках слід взяти до уваги залежність $\sigma_0 = \sigma_0(\alpha_2)$ та співвідношення $\rho_{12} = 2\rho_2$, $\rho_{13} = 2\rho$, $\rho_{14} = 2(\rho + \rho_2)$, які пов'язані з передфрактальністю системи МСЛ. Параметри $\alpha_2 = \alpha/K$, $\rho_2 = \rho/K$, де $K = 1 + \rho/\alpha$ – коефіцієнт подібності, що визначає фрактальну розмірність за формулою $d_f = \ln 2 / \ln K > 0$. Оскільки розглядатимемо першу електростатичну задачу, величини $q_{\varepsilon 0}^{11}$,

$q_{\varepsilon 0}^{21}$ значно перевищують $q_{\varepsilon 0}^{31}$, $q_{\varepsilon 0}^{41}$, тому їх залежності від ρ для $\alpha=0.1$ та $\varepsilon=10$ наведені окремо на рис. 2 і 3; суцільні лінії відповідають величинам з першими парними індексами.

7. Висновки

Методом ІР задача про поширення електромагнітних хвиль у передфрактальній системі МСЛ зведена до розв'язку систем ІР відносно компонент щільності поверхневих струмів на стрічках. Обмежуючи дослідження лише основними типами майже поперечної хвилі та використовуючи метод Релея задачу можна спростити до систем ІР першого роду з електростатичними ядрами. Надалі у дос-

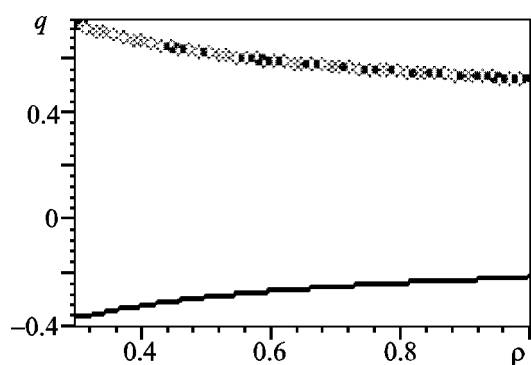


Рис. 2. Графіки $q_{\varepsilon 0}^{11}$, $q_{\varepsilon 0}^{21}$

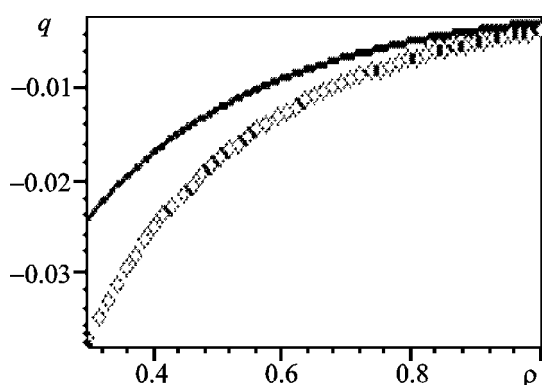


Рис. 3. Графіки $q_{\varepsilon 0}^{31}$, $q_{\varepsilon 0}^{41}$

лідженні цих систем пропонується використувати метод РВК. Доведено можливість коректного застосування цього методу у визначенні основних характеристик можливих типів майже поперечної хвилі за класичною схемою. Розглядається випадок вузьких стрічок для якого є явний розв'язок у вигляді степеневого ряду за геометричним параметром. Виконано числові експерименти, пов'язані з першою електростатичною задачею, що відповідає другій стадії побудови ДМК.

Література

1. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд. ХГУ, 1975. – 287 с.
2. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы в задачах дифракции волн на плоских экранах. – Киев: Наук. Думка, 1984. – 240 с.
3. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. – Харьков: Основа, 1997. – 283 с.
4. Кошовий А. Г., Кошовий Г. І. Про дослідження основних квазі-Г-хвиль у передфрактальній системі мікροстрічкових ліній // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2008. – Т.13, № 1. – С. 29-33.
5. Кошовий Г. І. Майже статична модель дофрактальних систем МСЛ // Радиотехника. Всеукр. міжвед. научн.-техн. сб. – Харьков: ХНУРЕ. – 2008. Випуск 155. – С. 282-287.
6. Кошевой Г. И. Некоторые классы самоподобных фракталов и их использование в радиофизике // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т.12, №11. – С. 28-32.
7. Кошевой Г. И., Сологуб В. Г. Дисперсия квази-Г-волн в многополосковой линии: Препр. / АН УССР. Ин-т радиофизики и электроники; №322. – Харьков: 1986. – 39 с.
8. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств / С. И. Бахарев, В. И. Вольман, Ю. Н. Либ и др. / Под ред. В. И. Вольмана. – М.: Радио и связь, 1982. – 328 с.
9. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. – М.: Мир, 1983. – 384 с.
10. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль передфрактальними системами циліндричних стрічок // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2007. – Т. 12, №1. – С. 141-147.

**Метод регуляризации в исследовании
почти поперечных волн
в предфрактальных системах
микрополосковых линий**

Г. И. Кошевой

Поставлена и преобразована на основе метода интегральных уравнений задача распространения электромагнитных волн в предфрактальных системах микрополосковых линий. Для исследования сингулярных интегральных уравнений, определяющих основные характеристики почти поперечных волн в данной системе, успешно применяется метод регуляризации Векуа–Карлемана. В деталях рассматривается узкополосковое приближение данной задачи. Приводятся численные результаты.

**A Regularization Method for Investigating
Quasi-Transverse Waves in Pre-Fractal
System of Microstrip Lines**

G. I. Koshovy

The problem of electromagnetic wave propagation in pre-fractal system of microstrip lines has been formulated and transformed by employing the integral equation technique. The Carleman–Vekua method of regularization has been successfully used to examine singular integral equations which determine the main characteristics of quasi-transverse waves in the said systems. A narrow strip approximation of the problem is considered in detail. Numerical results are presented too.