

## Статистика поля антенны с круглой апертурой

Я. С. Шифрин, В. В. Должиков

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61166, Украина  
E-mail shifrin@kture.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 7 сентября 2009 г.*

Рассмотрена статистика поля антенны с круглой апертурой, сфокусированной в зону Френеля, при наличии в ее апертуре фазовых флуктуаций. Основные соотношения сформулированы в виде, инвариантном относительно расположения точки фокуса (фокусировки). Это позволяет использовать их при изучении поля как сфокусированных, так и несфокусированных (“обычных”) антенн в их зоне Френеля и в дальней зоне. Приведены формулы для средних и флуктуационных характеристик поля и графики, иллюстрирующие зависимость этих характеристик от дисперсии и радиуса корреляции флуктуаций. Результаты, полученные для круглой апертуры, сопоставлены с результатами, ранее полученными авторами для линейной антенны.

### Введение

Характерной особенностью реальных излучающих систем (ИС) является наличие в их апертуре случайностей в распределении источников, обусловленных теми или иными внутренними или внешними причинами. В особой мере это присуще крупным и сложным ИС. Случайности в распределении источников заметно ухудшают параметры антенн, ограничивают их потенциальные возможности. Исследование этих вопросов составляет предмет статистической теории антенн (СТА), появившейся на рубеже 70-х гг. прошлого столетия. Основы этой теории изложены в монографии [1]. В ней даны основные понятия и определения СТА, методика решения прямых внешних задач, суть которых состоит в нахождении статистики поля излучения антенны по заданной статистике источников. Изучены средние, флуктуационные и корреляционные характеристики поля в дальней зоне антенны. Исследование проводилось на примере простейшей антенны – линейной непрерывной антенны.

Следующий естественный шаг – обобщение СТА на зону Френеля. Помимо теорети-

ческого интереса важность такого обобщения обусловлена резким увеличением в последнее время числа ситуаций, когда интересующие нас объекты находятся друг относительно друга в зоне Френеля, и обострением проблемы электромагнитной совместимости. Первоначально (начало 90-х гг. прошлого столетия) была изучена статистика поля обычной несфокусированной линейной антенны в ее зоне Френеля. Позднее (середина 90-х гг.) была рассмотрена также статистика поля линейной антенны, сфокусированной в зону Френеля. Результаты этих исследований в обобщенном виде приведены в работах [2]. Оставались неизученными двумерные излучающие системы и прежде всего наиболее распространенные антенны с круглой апертурой. Хотя из работ по линейным антеннам основные эффекты качественно были ясны, тем не менее, несмотря на объемность предстоящих исследований, их нужно было провести и для антенн с круглой апертурой. Стимулировалось это практической значимостью количественных оценок для антенны с круглой апертурой и желанием сравнить результаты для линейных и двумерных ИС.

Отмеченные причины привели к появлению в период с 2002 по 2008 г. работ [3-6], посвященных статистике поля антенны с круглой апертурой. Основные результаты проведенных авторами исследований, а также ряд новых результатов, полученных ими, излагаются в настоящей статье.

### 1. Исходные соотношения

Рассматривается круглая синфазная апертура с амплитудой поля возбуждения  $E_A = \text{const}$  (рис. 1). Электрическое поле считается поляризованным вдоль оси  $x$ . Тогда для  $x$ -компоненты электрического поля в точке  $P(r, \theta, \varphi)$  в приближении малых углов имеем [7]

$$E_0(r, \theta, \varphi) = i \frac{kE_A}{2\pi r} e^{-ikr} \int_s e^{i \left[ k\rho_1 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_1) - \frac{k\rho_1^2}{2r} \right]} ds, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве;  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты точки наблюдения;  $\rho_1, \varphi_1$  – полярные координаты текущей точки на апертуре;  $s$  – площадь апертуры.

Введем на апертуре дополнительное фазовое распределение  $k\rho_1^2/2r_f$ , где  $r_f$  – расстояние до фокуса, и новые переменные:

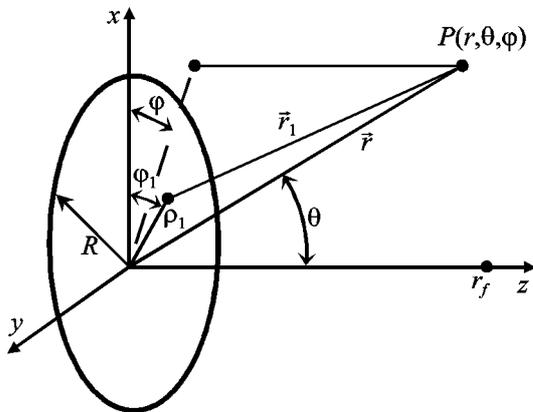


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\psi = kR \sin \theta, \quad u = \rho_1/R, \quad \chi = r/r_{\text{дз}},$$

$$r_{\text{дз}} = 8R^2/\lambda, \quad \chi_0 = r_f/r_{\text{дз}},$$

а также обобщенную радиальную координату

$$\zeta = \frac{\pi}{16\chi_0} (1 - \chi_0/\chi),$$

где  $r_{\text{дз}}$  – расстояние до границы дальней зоны.

Опуская далее множитель  $iE_A \pi e^{-ikr}/8$ , из (1) получим выражение для поля сфокусированной системы:

$$E_0(\zeta, \psi) = \frac{1}{\chi} F_0(\zeta, \psi), \quad (2)$$

где

$$F_0(\zeta, \psi) = 2 \int_0^1 e^{i2\zeta u^2} J_0(\psi u) u du,$$

а  $J_0(\psi u)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Интенсивность поля будет иметь вид:

$$P_0(\zeta, \psi) = \frac{1}{\chi^2} \int_0^1 \int_0^1 e^{i2\zeta(u^2 - u'^2)} J_0(\psi u) J_0(\psi u') u u' du du'. \quad (3)$$

Важно отметить, что при введении координаты  $\zeta$  выражения (2) и (3) инвариантны относительно величины фокусного расстояния. Соответственно, результаты последующего анализа пригодны как для сфокусированных, так и для несфокусированных ИС (в их зоне Френеля и в дальней зоне). Заметим, что при исследовании линейной антенны эти ИС изучались порознь.

При наличии фазовых флуктуаций, описываемых функцией  $\Phi(u, \varphi_1)$ , вместо (2) и (3) имеем для поля и его интенсивности следующие выражения:

$$E(\zeta, \psi, \varphi) = \frac{1}{\pi\chi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{i\Phi(u, \varphi_1)} e^{i[2\zeta u^2 + u\psi \cos(\varphi - \varphi_1)]} u du d\varphi_1, \quad (4)$$

$$P(\zeta, \psi, \varphi) = \frac{1}{\pi^2 \chi^2} \int_S \int_{S'} e^{i[\Phi(u, \varphi_1) - \Phi(u', \varphi'_1)]} \times e^{i\{2\zeta(u^2 - u'^2) + \psi[u \cos(\varphi - \varphi_1) - u' \cos(\varphi - \varphi'_1)]\}} uu' du du' d\varphi_1 d\varphi'_1. \quad (5)$$

Будем далее считать, что  $\Phi(u, \varphi_1)$  – однородная по раскрытию случайная с нормальным распределением функция со средним значением  $\overline{\Phi(u, \varphi_1)} = 0$ , дисперсией  $\overline{\Phi^2(u, \varphi_1)} = \sigma^2(u, \varphi_1) = \alpha = \text{const}$  и с гауссовым коэффициентом корреляции

$$r_{\text{кор}} = \frac{\overline{\Phi(u, \varphi_1) \cdot \Phi(u', \varphi'_1)}}{\alpha} = e^{-\frac{u^2 + u'^2 - 2uu' \cos(\varphi_1 - \varphi'_1)}{c^2}}. \quad (6)$$

Числитель в показателе экспоненты выражения (6) – квадрат расстояния между точками  $(u, \varphi_1)$  и  $(u', \varphi'_1)$ , а знаменатель – квадрат радиуса корреляции  $c$  (в относительных единицах), связанного с реальным радиусом корреляции  $\rho_0$  соотношением  $c = \rho_0 / R$ .

Усреднив (4) и (5) по ансамблю функций  $\Phi(u, \varphi_1)$ , получим исходные выражения для среднего поля и средней интенсивности:

$$\overline{E(\zeta, \psi, \varphi)} = \frac{1}{\chi} e^{-\alpha/2} F_0(\zeta, \psi), \quad (7)$$

$$\overline{P(\zeta, \psi, \varphi)} = e^{-\alpha} \frac{1}{\chi^2} \left[ |F_0(\zeta, \psi)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n(c_n, \zeta, \psi) \right], \quad (8)$$

где

$$T_n(c_n, \zeta, \psi) = 4 \int_0^1 \int_0^1 e^{i2\zeta(u^2 - u'^2) - \frac{u^2 + u'^2}{c_n^2}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) I_m \left( \frac{2uu'}{c_n^2} \right) J_m(\psi u) J_m(\psi u') uu' du du',$$

$c_n = c / \sqrt{n}$ ,  $\delta_{0m}$  – символ Кронекера, а  $J_m(x)$  и  $I_m(x)$  – функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Бесселя  $m$ -го порядка соответственно.

Заметим, что правые части (7) и (8) в отличие от правых частей (4) и (5) не зависят от  $\varphi$ . Это обусловлено предположением об однородности фазовых флуктуаций на апертуре и их усреднением.

Если в (8) раскрыть скобки, то первое слагаемое даст квадрат модуля среднего поля  $|\overline{E(\zeta, \psi)}|^2$ , а второе – дисперсию флуктуаций поля  $|\overline{\delta E(\zeta, \psi)}|^2$ .

В общем виде выражение (8) достаточно громоздко. Поэтому далее вычислительные аспекты исследований будут опускаться. Основное внимание будет уделено графикам, отражающим результаты вычислений, и соотношениям для предельных случаев – малых  $\alpha$  и радиусов корреляции  $c \ll 1$  и  $c \gg 1$ .

Вначале рассмотрим угловое распределение средней интенсивности (УРСИ) поля на фокальной сфере, а затем продольное распределение средней интенсивности (ПРСИ) на фокальной оси.

## 2. Средняя интенсивность поля на фокальной сфере

Полагая в (8)  $\zeta = 0$ , получим

$$\overline{P(0, \psi)} = e^{-\alpha} \frac{1}{\chi_0^2} \left[ |F_0(0, \psi)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n(c_n, 0, \psi) \right], \quad (9)$$

где  $F_0(0, \psi) = 2J_1(\psi) / \psi$  – множитель системы для круглой апертуры в отсутствие флуктуаций.

Формула (9) позволяет определить: интенсивность поля на фокальной сфере сфокусированной системы; интенсивность поля несфокусированной системы в ее дальней зоне; интенсивность поля в фокальной плоскости антенны с круглой апертурой, если на раскрыв падает

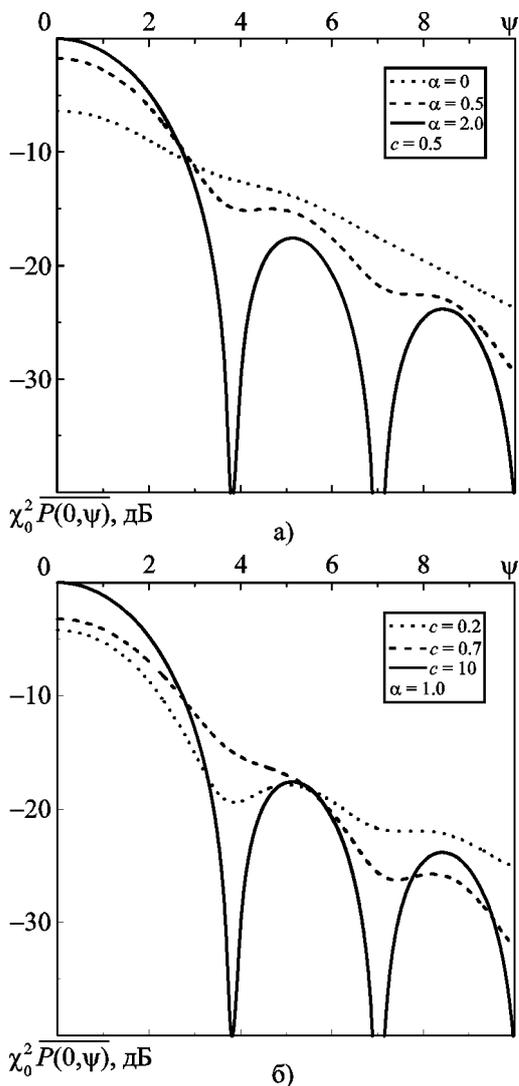
волна с фазовыми флуктуациями. Столь широкие возможности этой формулы связаны с использованием обобщенной координаты  $\zeta$ , равной нулю на фокальной сфере.

**Характер кривых УРСИ**

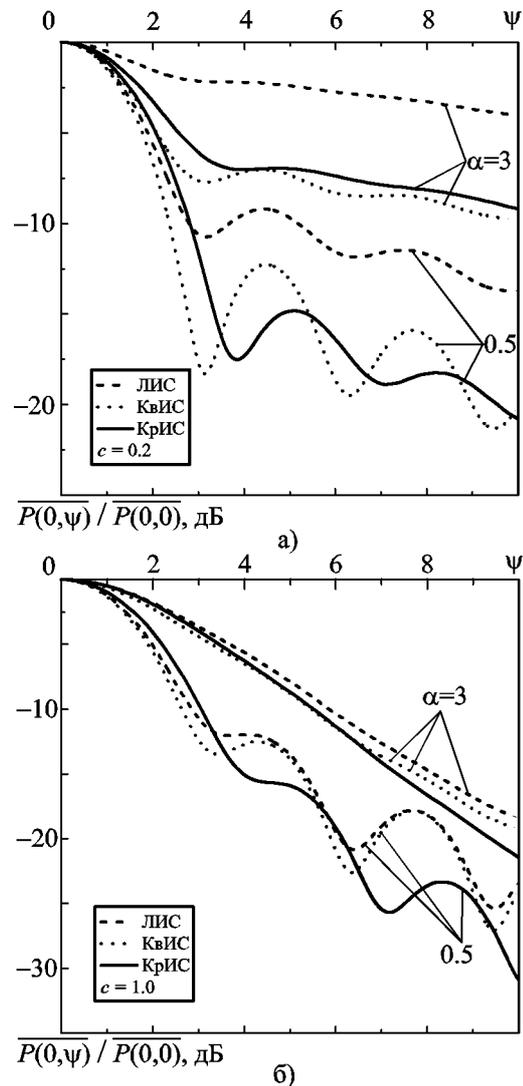
Рассчитанные по формуле (9) кривые УРСИ приведены на рис. 2, а, б, из которых видно, что наличие флуктуаций приводит к “замыванию” нулей УРСИ и уменьшению интенсивности поля в направлении главного максимума, что по мере увеличения дисперсии

флуктуаций характер кривых УРСИ меняется от осциллирующего к монотонно убывающему и что по мере увеличения радиуса корреляции флуктуаций кривые УРСИ приближаются к распределению в отсутствие флуктуаций.

Качественно эти результаты совпадают с приведенными в книге [1] результатами для средних ДН линейной системы. Количественные различия иллюстрируются рис. 3, а, б, на которых приведены нормированные УРСИ для ИС с линейной (ЛИС), круглой (КрИС) и квадратной (КвИС) апертурой.



**Рис. 2.** Кривые УРСИ: а) – при различных значениях  $\alpha$  и  $c = 0.5$ , б) – при различных значениях  $c$  и  $\alpha = 1.0$



**Рис. 3.** Сравнение нормированных УРСИ круглой, квадратной и линейной ИС при различных значениях радиуса корреляции: а) –  $c = 0.2$ , б) –  $c = 1.0$

Как видно из рис. 3, а, при малых радиусах корреляции кривые УРСИ для линейных и апертурных антенн значительно различаются. Это легко объяснимо. При малых  $c$  непрерывные антенны можно разбить на  $N$  элементов с размерами порядка  $2\rho_0$  и на площадки с площадью порядка  $4\rho_0^2$  для линейной и апертурной антенн соответственно. Флуктуации фазы в элементах можно считать независимыми. Фон, создаваемый такой дискретной моделью, обратно пропорционален числу элементов в ней [1]. У линейных антенн  $N$  много меньше, фон существенно больше и, соответственно, больше искажения УРСИ. С увеличением  $c$  различия в характере воздействия флуктуаций в апертуре на УРСИ разных типов ИС ослабевают (рис. 3, б), что особенно хорошо видно на примере сопоставления кривых УРСИ линейной и квадратной ИС, для которых невозмущенные кривые УРСИ одинаковы.

**Средняя интенсивность в фокусе**

Средняя интенсивность в фокусе определяется соотношением (9) при  $\psi = 0$ :

$$\begin{aligned} \overline{P(0,0)} &= \frac{1}{\chi_0^2} \overline{|F(0,0)|^2} = \\ &= e^{-\alpha} \frac{1}{\chi_0^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\alpha^n}{n!} T_n(c_n, 0, 0) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

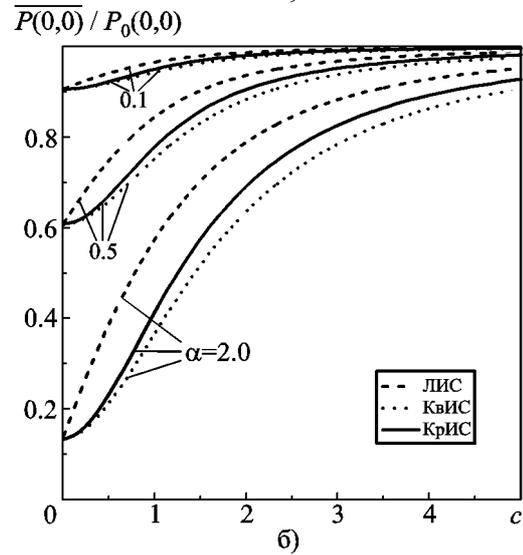
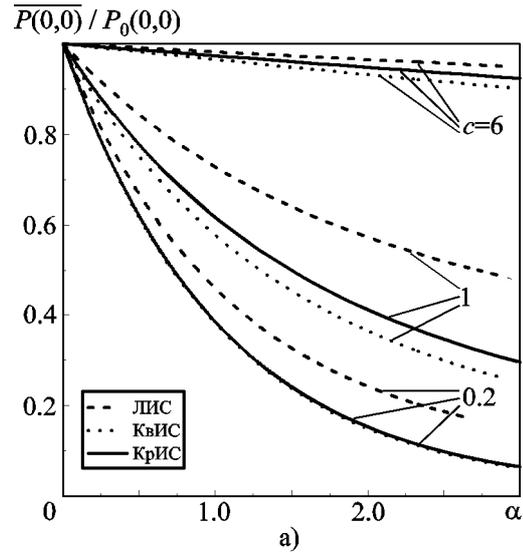
где

$$T_n(c_n, 0, 0) = c_n^2 \left[ 1 - e^{-\frac{2}{c_n^2}} \left[ I_0\left(\frac{2}{c_n^2}\right) + I_1\left(\frac{2}{c_n^2}\right) \right] \right].$$

Рассчитанные по формуле (10) значения  $P^{\text{нор}}(0,0) = \overline{P(0,0)}/P_0(0,0)$  приведены на рис 4, а, б. В соответствии со сказанным ранее эти же кривые определяют также среднюю мощность излучения в направлении главного максимума синфазной антенны с круглой апертурой при наличии в ней флуктуаций.

Аналогичные кривые для линейной антенны и антенны с квадратной апертурой, заимствованные из [1], также приведены на рис 4, а, б.

Зачастую мощность излучения антенны при наличии флуктуаций не меняется. Тогда приве-

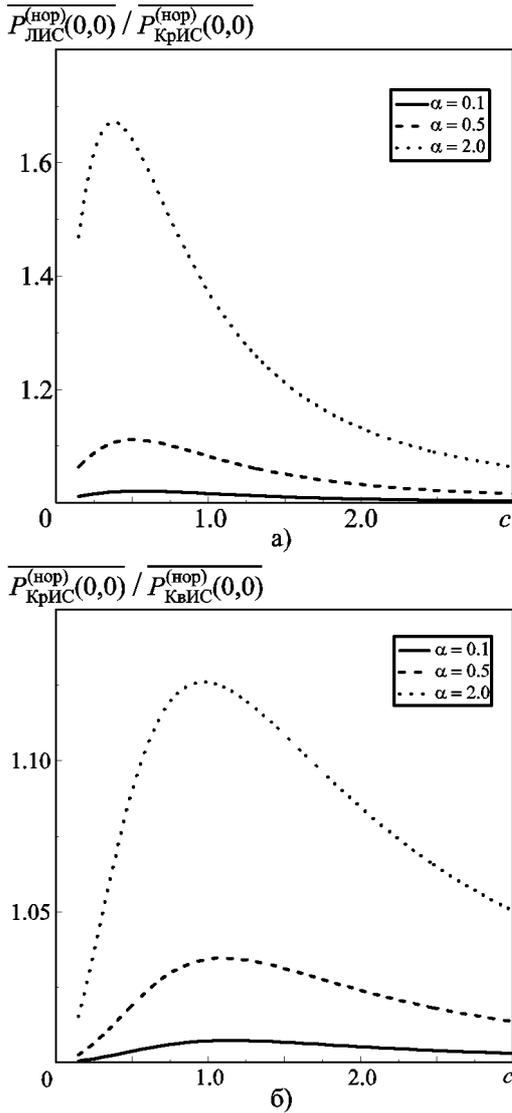


**Рис. 4.** Зависимость средней интенсивности в фокусе (направлении главного максимума) от  $\alpha$  при различных  $c$  (а), от  $c$  при различных  $\alpha$  (б)

денные на рис. 4, а, б данные определяют величину среднего КНД  $\overline{D}$  (точнее величину  $\overline{D}/D_0$ , где  $D_0$  – КНД в отсутствие флуктуаций). Степень влияния флуктуаций на средний КНД разных ИС иллюстрируют кривые на рис. 5.

По оси ординат на рис. 5, а отложена величина

$$\left(\frac{\overline{D}}{D_0}\right)_{\text{ЛИС}} / \left(\frac{\overline{D}}{D_0}\right)_{\text{КрИС}} = \frac{\overline{P^{\text{нор}}(0,0)}_{\text{ЛИС}}}{\overline{P^{\text{нор}}(0,0)}_{\text{КрИС}}} \quad (11)$$



**Рис. 5.** К сравнению средних КНД разных ИС: а) – ИС с круглой апертурой и линейная ИС, б) – ИС с круглой и квадратной апертурами

Кривые имеют резонансный характер. При  $c \ll 1$  средний КНД как для линейных, так и для апертурных антенн определяется одним и тем же соотношением  $\bar{D}/D_0 = e^{-\alpha}$ . При  $c \rightarrow \infty$  ИС приближаются к синфазным и  $\bar{D} \rightarrow D_0$ . Соответственно, величина, определяемая выражением (11), при  $c \rightarrow 0$  и  $c \rightarrow \infty$  близка к единице. При некотором значении  $c = c_{\max}$  снижение КНД для антенны с круглой апертурой по отношению к снижению КНД для линейной антенны оказывается мак-

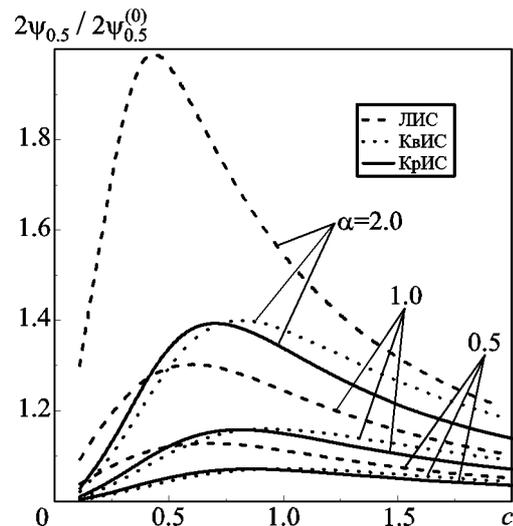
симальным. С увеличением  $\alpha$  величина  $c_{\max}$  уменьшается. Рис. 5, б иллюстрирует различие в степени воздействия флуктуаций на антенны с квадратной и круглой (вписанной в квадрат) апертурой. У антенны с квадратной апертурой снижение среднего КНД больше в силу ее большей площади.

**Расширение УРСИ**

Величина расширения средних УРСИ определялась из рассмотрения УРСИ при различных значениях параметров флуктуаций. Соответствующие результаты представлены на рис. 6. Здесь же приведены и аналогичные данные для линейной антенны и антенны с квадратной апертурой, взятые из [1]. Поскольку кривые УРСИ для линейной антенны идут выше кривых для апертурных ИС, естественно, что и расширение УРСИ для линейной ИС будет большим. На рис. 6 величина  $2\psi_{0.5}^{(0)}$  – ширина главного лепестка ДН на уровне  $0.5P_{\max}$  в отсутствие флуктуаций.

**Экстремумы кривых УРСИ**

Вопрос об экстремумах в УРСИ имеет смысл изучать лишь при малых флуктуациях, когда экстремумы еще заметно выражены. В работе [3] получены аналитические выражения для смещения минимумов и максимумов,



**Рис. 6.** Зависимость ширины УРСИ от радиуса корреляции флуктуаций

а также для величин изменения их уровня. Исследованы зависимости всех этих величин от радиуса корреляции флуктуаций. Качественно результаты оказываются сходными с результатами для ДН линейной системы, изученными в [1], но количественно имеются заметные различия (см. табл. 1).

**Предельные соотношения для малых флуктуаций**

В табл. 1 приведены формулы, характеризующие ряд статистических эффектов при малых флуктуациях в предельных случаях  $c \ll 1$  и  $c \gg 1$ , для ИС с круглой и линейной

апертурой. Формулы для ИС с круглой апертурой взяты из работы [3], а для линейной ИС – из работы [1]. Интересно отметить, что для эффектов, характеризуемых первыми четырьмя строками таблицы, при  $c \ll 1$  формулы для линейной системы содержат  $c$  в первой степени, в то время как формулы для круглой апертуры содержат  $c$  в квадрате. Пояснить это можно, если использовать при  $c \ll 1$  дискретные модели непрерывных ИС, о которых говорилось ранее. В дискретной модели рассматриваемые статистические эффекты определяются числом ее элементов  $N$ . Для линейной модели число  $N_{\text{ЛИС}} \approx L/2\rho \approx 1/c$ , а для апер-

**Таблица 1.** К сравнению статистических эффектов для ИС с круглой и линейной апертурами

Параметр	Обозначение	КРИС		ЛИС	
		$c \ll 1$	$c \gg 1$	$c \ll 1$	$c \gg 1$
Снижение интенсивности в фокусе $\alpha^{-1} \left[ 1 - \frac{P(0,0)}{P_0(0,0)} \right]$	$\frac{\Delta f}{\alpha}$	$1 - c^2$	$\frac{1}{c^2}$	$1 - \frac{c\sqrt{\pi}}{2}$	$\frac{2}{3c^2}$
Расширение главного лепестка	$\frac{2\Delta\psi_{0.5}}{\alpha}$	$2.04c^2$	$\frac{1.2}{c^2}$	$1.63c$	$\frac{1.46}{c^2}$
Уровень минимумов	$\frac{P_{\text{нор},k}^{(\min)}}{\alpha}$	$c^2$	$\frac{8J_2^2(\psi_1^{(k)})}{(\psi_1^{(k)})^2} \frac{1}{c^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}c$	$\frac{2}{\pi^2 k^2} \frac{1}{c^2}$
Изменение уровня боковых лепестков	$\frac{\Delta\sigma_{k}}{\alpha}$	$+c^2$	$-\frac{1}{c^2} P_{0,k}^{(\max)}$	$+\frac{\sqrt{\pi}}{2}c$	$-\frac{4}{3(\psi_{0k}^{(1)})^2} \frac{1}{c^2}$
Смещение положения минимумов	$\frac{\Delta\psi_{\min}^{(k)}}{\alpha}$	$\frac{(\psi_1^{(k)})^3}{16J_2^2(\psi_1^{(k)})} c^4$	$\frac{8}{\psi_1^{(k)}} \frac{1}{c^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{8} (\psi_{0k}^{(2)})^3$	$\frac{6}{\psi_{0k}^{(2)}} \frac{1}{c^2}$
Смещение положения максимумов	$\frac{\Delta\psi_{\max}^{(k)}}{\alpha}$	$-\frac{(\psi_2^{(k)})^3}{16J_1^2(\psi_2^{(k)})} c^4$	$\frac{2}{\psi_2^{(k)}} \frac{1}{c^2}$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{8} (\psi_{0k}^{(1)})^3$	$\frac{2}{\psi_{0k}^{(1)}} \frac{1}{c^2}$
Радиус корреляции для максимального смещения экстремумов	$c_{\text{ext},k}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\psi_{1,2}^{(k)}}$		$\frac{2\sqrt{1.5}}{\psi_{0k}^{(1,2)}}$	
Радиус корреляции для максимального приращения экстремумов	$c_k^{\text{ext}}$	$\frac{2}{\psi_{1,2}^{(k)}}$		$\frac{\sqrt{2}}{\psi_{0k}^{(1,2)}}$	

**Примечание.** Символы  $\psi_{1,2}^{(k)}$  – значения  $\psi$ , отвечающие нулям функций  $J_1(\psi)$  и  $J_2(\psi)$  соответственно;  $\psi_{01}^{(k)} = \pi k$ ,  $\psi_{0k}^{(2)} \approx 0.5\pi(2k+1)$  – координаты экстремумов в УРСИ ЛИС в отсутствие флуктуаций,  $P_{0,k}^{(\max)}$  – уровень  $k$ -го бокового лепестка в УРСИ КРИС в отсутствие флуктуаций,  $k$  – номер экстремума.

турной  $N_{\text{КРИС}} \approx N_{\text{ЛИС}}^2 \approx 1/c^2$ . При  $c \gg 1$  обе ИС близки к синфазным и различия в эффектах сглаживаются – в формулы для рассматриваемых эффектов в обеих ИС величина  $c$  входит одинаковым образом (как  $1/c^2$ ).

**Угловое распределение средней интенсивности в общем случае**

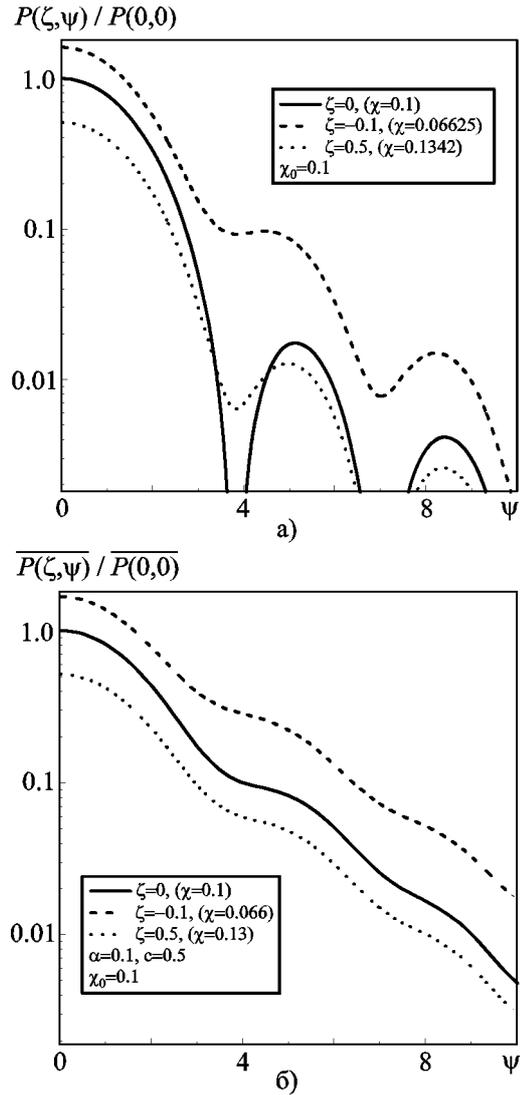
Помимо картины углового распределения средней интенсивности на фокальной сфере (средних ДН), были также построены и проанализированы картины изменения углового распределения интенсивности поля в зависимости от степени удаления от фокальной сферы. Соответственно для несфокусированных систем анализировалось изменение углового распределения интенсивности поля по мере углубления в зону Френеля. Примеры подобных кривых для сфокусированной системы приведены на рис. 7, а, б. На этих рисунках показаны распределения интенсивности поля на фокальной сфере и двух сферах, удаленных от фокальной примерно на одинаковые расстояния в ту и другую стороны. Рис. 7, а относится к случаю, когда флуктуации (ошибки) в антенне отсутствуют. Рис. 7, б соответствует случаю наличия фазовых флуктуаций в апертуре системы с параметрами  $\alpha = 1.0$ ,  $c = 0.5$ .

Приведенные рисунки показывают, как изменяется поперечное распределение интенсивности поля при отходе от фокальной сферы. Сопоставление этих рисунков позволяет также видеть, каково влияние регулярных квадратических ошибок (рис. 7, а) и совместное влияние регулярных и случайных ошибок (рис. 7, б) на искажения поперечного распределения интенсивности поля в круглой сфокусированной ИС.

**3. Средняя интенсивность поля вдоль фокальной оси**

**Характер кривых ПРСИ**

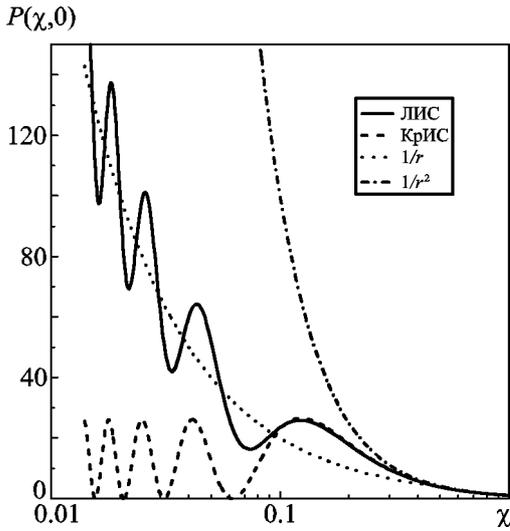
Перейдем к рассмотрению продольного распределения средней интенсивности. Заметим прежде всего, что если кривые УРСИ для линейной и апертурных систем качественно подобны, то распределение интенсивности поля вдоль фокальной оси для линейной и апертур-



**Рис. 7.** Угловое распределение интенсивности КРИС при различных расстояниях от апертуры: а) – в отсутствие флуктуаций, б) – при наличии флуктуаций поля на апертуре

ных антенн даже в отсутствие флуктуаций качественно различается. Это положение иллюстрируется рис. 8. Кривая для линейной антенны заимствована из работы [8], кривая для антенны с круглой апертурой – из [9].

Различия кривых объясняются следующим. В случае линейной антенны при приближении к антенне мы переходим из зоны Фраунгофера в зону цилиндрического фронта волны, создаваемого линейной антенной, в которой интенсивность поля меняется по закону  $1/r$  (см.



**Рис. 8.** Осевое распределение интенсивности поля линейной и круглой ИС в их зоне Френеля в отсутствие флуктуаций

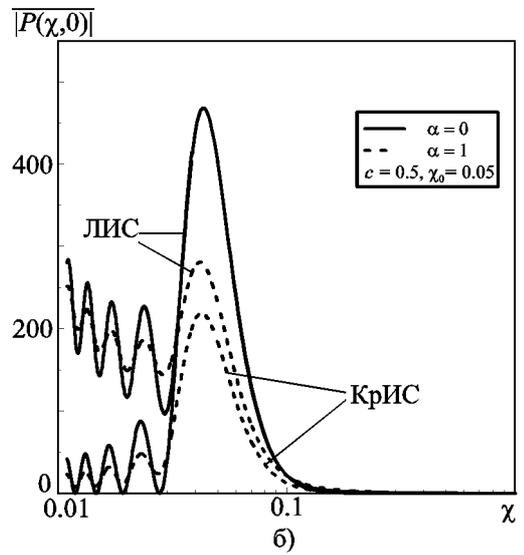
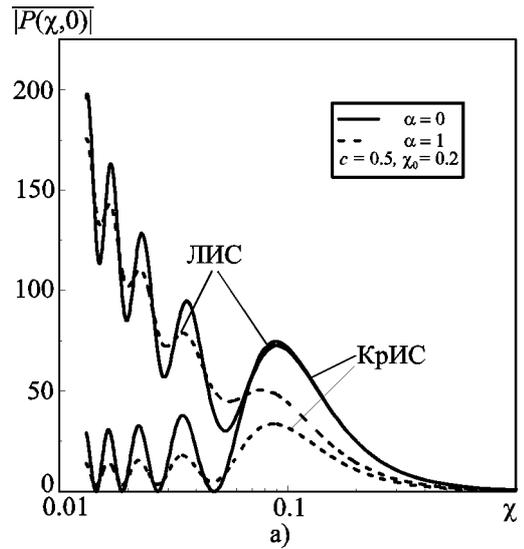
пунктирную линию на рис. 8). В случае антенны с круглой апертурой при приближении к антенне мы переходим в область, где из точки на оси антенны видны несколько зон Френеля. По мере дальнейшего движения к антенне число этих зон меняется, что и приводит к осцилляциям интенсивности поля на оси антенны. Фокусировка антенны и появление флуктуаций в ее апертуре заметно изменяет кривые, приведенные на рис. 8, что видно из рассмотрения рис. 9, а, б.

Кривые на рис. 9 для линейной антенны рассчитывались по формулам работы [2]. Для антенны с круглой апертурой кривые рассчитывались по формуле, вытекающей из соотношения (8), если в нем положить  $\psi = 0$ :

$$\overline{P(\zeta, 0)} = e^{-\alpha} \frac{1}{\chi^2} \left[ |F_0(\zeta, 0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} T_n(c_n, \zeta, 0) \right], \quad (12)$$

где

$$|F_0(\zeta, 0)|^2 = \frac{\sin^2 \zeta}{\zeta^2},$$



**Рис. 9.** Осевое распределение средней интенсивности в сфокусированных системах при наличии фазовых флуктуаций в антенне: а) – мелкая фокусировка, б) – глубокая фокусировка

$$T_n(c_n, \zeta, 0) = 4 \int_0^1 \int_0^1 e^{i2(u^2-u'^2)\zeta - \frac{u^2+u'^2}{c_n^2}} I_0 \left( \frac{2uu'}{c_n^2} \right) uu' du du'.$$

Граница областей глубокой ( $\chi_0 < 0.125$ ) и мелкой ( $\chi_0 > 0.125$ ) фокусировок определена условно значением  $\chi_0 = 0.125$ . При таком значении  $\chi_0$  интенсивность поля на фокальной оси ( $\psi = 0$ ) несфокусированной апертуры достигает максимума [4]. При значениях

$\chi_0 < 0.125$  интенсивность поля в направлении  $\psi = 0$  осциллирует, достигая максимумов (побочных) и минимумов при определенных значениях  $\chi_0$ .

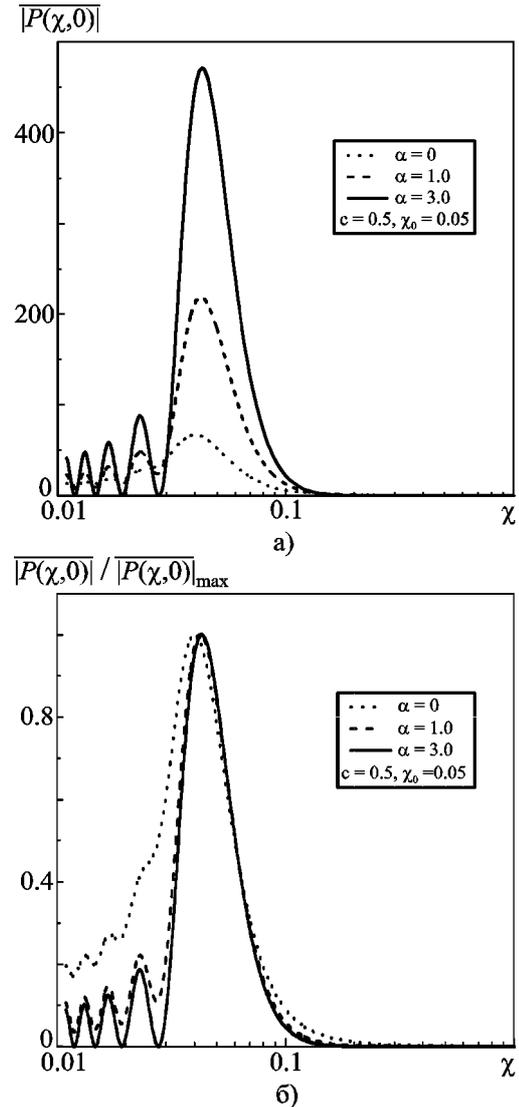
Сопоставление кривых на рис. 8 и рис. 9 позволяет видеть, как сказываются на картинах осевого распределения интенсивности поля линейной и круглой ИС порознь фокусировка системы (кривые с  $\alpha = 0$ ) и появление флуктуаций (кривые с  $\alpha = 1$ ). Фокусировка приводит к резкому возрастанию интенсивности вблизи точки фокусировки, а появление флуктуаций – к сглаживанию кривых распределения интенсивности.

Кривые на рис. 9 построены для  $\alpha = 1$  и  $c = 0.5$ . О влиянии изменения параметров флуктуаций  $\alpha$  и  $c$  на картину ПРСИ можно судить по кривым на рис. 10 и рис. 11, рассчитанным по формуле (12).

Как видно из рис. 10, увеличение дисперсии флуктуаций приводят к усилению сглаживания осевого распределения поля: уменьшается величина главного максимума (рис. 10, а, рис. 11, а), возрастают побочные максимумы и “замываются” нули (рис. 10, б, рис. 11, б). Уменьшение главного максимума может быть достаточно заметным. Так, при  $c = 0.5$  и  $\alpha = 1$  снижение главного максимума достигает 50 %. С увеличением глубины фокусировки (уменьшением  $\chi_0$ ) перечисленные эффекты усиливаются. Степень сглаживания существенно зависит и от радиуса корреляции флуктуаций (рис. 11). Из сравнения кривых на рис. 10 и рис. 11 с подобными кривыми для УРСИ (рис. 2, а, б) следует, что продольное распределение поля менее чувствительно к флуктуациям фазы, чем угловое. Так, при  $c = 0.5$  и  $\alpha = 1$  УРСИ уже имеет почти монотонный характер, в то время как ПРСИ – явно осциллирующий характер.

**Ширина фокального пятна и область его существования**

Как показывают расчеты [3], расширение фокального пятна незначительно, однако с увеличением дисперсии флуктуаций пятно разрушается из-за размыва его передней границы. Последнее связано с ростом интенсивности поля в области первого минимума ПРСИ. Более резко это проявляется при мелкой ( $\chi_0 > 0.125$ ) фокусировке. Область существования фокаль-



**Рис. 10.** Кривые ненормированного (а) и нормированного (б) ПРСИ при различных значениях дисперсии  $\alpha$

ного пятна иллюстрируется кривыми на рис. 12, построенными для разных значений параметров флуктуаций. Точки, лежащие ниже кривой для заданного фокусного расстояния, образуют области существования пятна.

**4. Флуктуационные характеристики поля**

При изучении флуктуационных характеристик ограничимся случаем малых фазовых флуктуаций поля в апертуре.

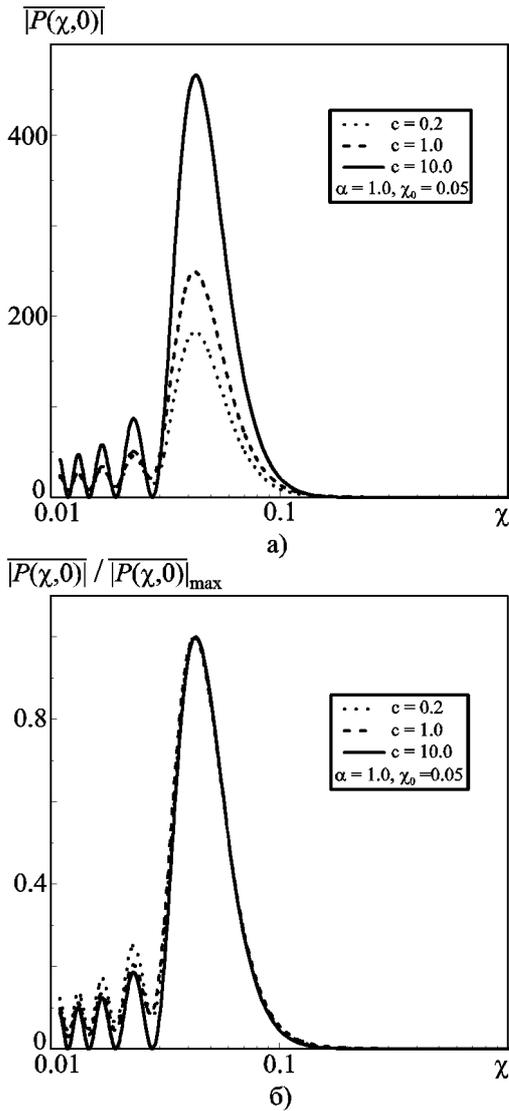


Рис. 11. Кривые ненормированного (а) и нормированного (б) ПРСИ при различных значениях радиуса корреляции  $c$

**Флуктуации амплитуды и фазы поля**

В [6] получены выражения для флуктуаций амплитуды и фазы поля в любой точке пространства сфокусированной антенны с круглой апертурой. Основное внимание было уделено флуктуациям поля на фокальной сфере. Как и в случае средних характеристик, результаты анализа флуктуаций на фокальной сфере имеют важное значение. Они характеризуют как флуктуации поля в дальней зоне обычной антенны, так и флуктуации поля

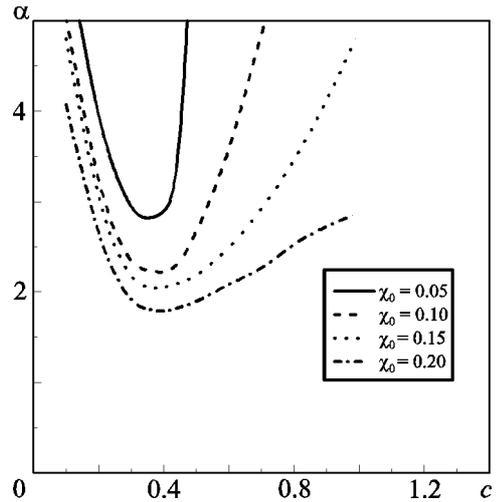


Рис. 12. Границы областей существования фокального пятна

в фокальной плоскости антенны при падении на антенну волны с флуктуациями фазы. Последнее важно знать, например, при построении системы углового разнесенного приема, когда в фокальной плоскости размещаются два вынесенных из фокуса облучателя.

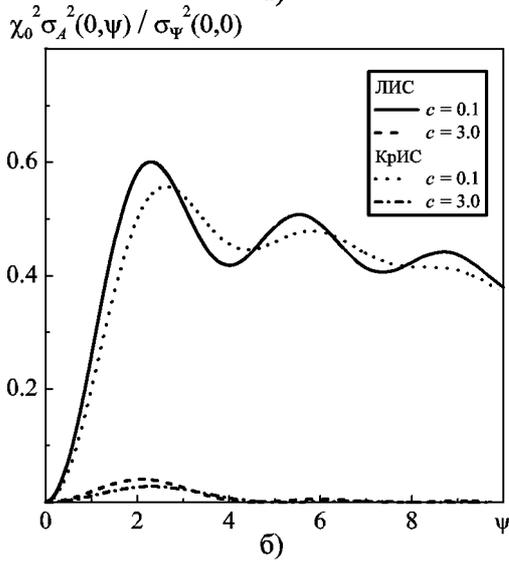
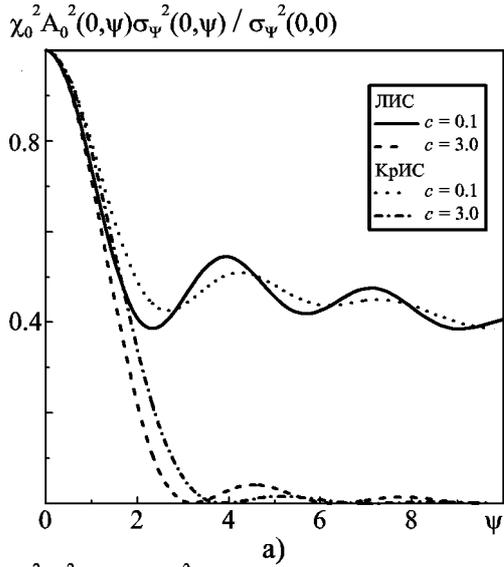
В фокусе флуктуаций амплитуды  $\delta A$  нет. Имеются лишь флуктуации фазы поля  $\delta \Psi$ , которые и определяют флуктуации комплексного поля  $\delta E$  в целом. При выходе из фокуса появляются флуктуации амплитуды. При этом, как показано в [6],

$$\sigma_A^2 + A_0^2 \sigma_\Psi^2 = \overline{|\delta E|^2} = \frac{1}{\chi_0^2} T_1(c, 0, \Psi), \quad (13)$$

где  $A_0$  – амплитуда поля в отсутствие флуктуаций,  $\sigma_A^2$  и  $\sigma_\Psi^2$  – дисперсии амплитуды и фазы соответственно.

Вклад флуктуаций амплитуды и фазы в величину дисперсии поля в целом показан на рис. 13, а, б. На этом же рисунке приведены кривые для флуктуаций поля линейной ИС в ее дальней зоне, построенные по формулам работы [1].

Как видно из рис. 13, результаты для линейной и круглой апертур достаточно близки.

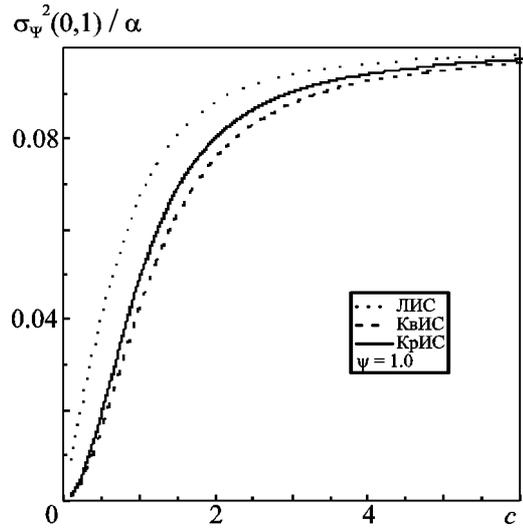


**Рис. 13.** Вклады флуктуаций амплитуды (а) и фазы (б) поля в дисперсию полного комплексного поля на фокальной сфере (в дальней зоне)

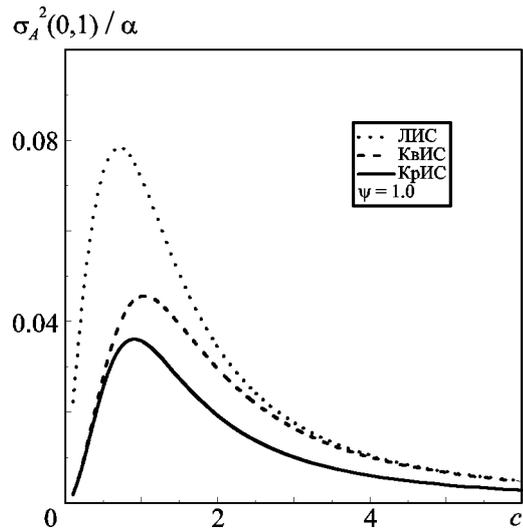
Отметим также, что если исключить область, близкую к фокусу, то вклады флуктуаций амплитуды и фазы в флуктуации комплексного поля одного порядка.

На рис. 14 и рис. 15 приведены зависимости дисперсии амплитуды и фазы от радиуса корреляции.

Ход кривых, приведенных на рис. 14, очевиден. С увеличением радиуса корреляции флуктуации в апертуре ИС приближаются к синфазным. При этом флуктуации фазы поля



**Рис. 14.** Зависимость дисперсии фазы на фокальной сфере (в дальней зоне) от радиуса корреляции



**Рис. 15.** Зависимость дисперсии амплитуды на фокальной сфере (в дальней зоне) от радиуса корреляции

на фокальной сфере (в дальней зоне) при любом  $\psi$  определяются флуктуациями фазы в апертуре ИС. Флуктуации амплитуды поля изменяются немонотонно. При некотором  $c$  они максимальны и при дальнейшем увеличении  $c$  стремятся к нулю.

В заключение заметим, что согласно (8) на фокальной сфере при малых флуктуациях соотношение  $|\delta E|^2 = T_1(c, 0, \psi)/\chi_0^2$  имеет место при любых  $\psi$ , в то время как представление (13) справедливо лишь при таких  $\psi$ , для которых амплитуда невозмущенного поля  $A_0 \gg |\delta E|$ . В нулевых направлениях поле распределено по закону Релея. При этом

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha \pi c}{2}} \sqrt{\pi}, \quad \sigma_A^2 = \frac{4 - \pi}{8} \sqrt{\pi} \alpha, \quad \sigma_\psi^2 = \frac{\pi}{3}.$$

В направлениях максимумов боковых лепестков поле при малых радиусах корреляции  $c$  распределено по обобщенному закону Релея, а при больших  $c$  – по закону Хойта [10].

**Флуктуации фокального пятна**

Наличие фазовых флуктуаций в апертуре антенны приводит к флуктуациям фокального пятна – точки максимальной интенсивности поля (МИП). Исследование проводилось в предположении малости флуктуаций и, соответственно, малости смещения положения точки МИП в поперечном и продольном направлениях [5]. Наиболее важные результаты исследований приведены на рис. 16 и рис. 17.

Из этих рисунков можно сделать ряд выводов:

- Максимум угловых флуктуаций точки МИП при глубокой и мелкой фокусировках достигается при значении радиуса корреляции  $c$  порядка  $0.9\alpha$  и составляет величину порядка  $0.7\alpha$ . Максимум продольных флуктуаций достигается при значениях  $c$  порядка  $0.5 \div 0.6$ . Величина его зависит от глубины фокусировки.

- При глубокой фокусировке и малых радиусах корреляции продольные флуктуации больше поперечных, а при больших  $c$  – продольные флуктуации меньше поперечных.

- При мелкой фокусировке продольные флуктуации меньше поперечных при любых радиусах корреляции фазовых флуктуаций.

Как показывают расчеты, при малых  $c$  формулы для дисперсии продольных и поперечных координат точки МИП круглой ИС содержат  $c^2$ , в то время как у линейной ИС

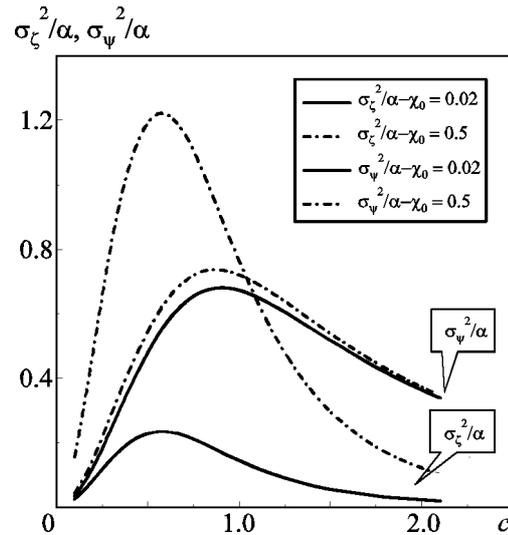


Рис. 16. Зависимость дисперсий угловой и продольной координат точки МИП от радиуса корреляции  $c$

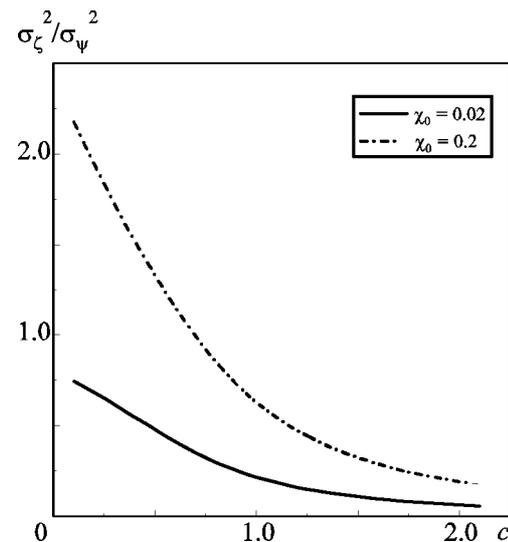


Рис. 17. Зависимости отношения дисперсий продольной и угловой координат точки МИП от  $c$

аналогичные формулы содержат величину  $c$  в первой степени. При больших  $c$  в формулы для линейной и круглой ИС величина радиуса корреляции входит одинаковым образом. Аналогичное обстоятельство отмечалось нами ранее при сопоставлении формул из табл. 1

для ряда средних характеристик линейной и апертурных ИС.

### Заключение

В работе приведены результаты изучения статистических характеристик поля антенны с круглой апертурой, сфокусированной в зону Френеля, при наличии фазовых флуктуаций в ее апертуре. Проведено количественное сравнение основных статистических эффектов с аналогичными эффектами для линейной сфокусированной антенны. Полученные результаты имеют широкую область применимости. Это обусловлено тем, что основные соотношения и графики для средних и флуктуационных характеристик поля инвариантны относительно величины фокусного расстояния. Поэтому они в равной мере пригодны как при анализе поля антенн, сфокусированных в зону Френеля, так и при изучении статистики поля в зоне Френеля обычных антенн, сфокусированных на бесконечность. В частности, они описывают статистику поля таких антенн и в их дальней зоне, а также статистику поля в фокальной плоскости парааксиальных фокусирующих систем при падении на них волны с фазовыми флуктуациями.

### Литература

1. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. – М.: Сов.радио, 1970. – 384 с.  
Shifrin Y. S. Statistical Antenna Theory. – Boulder (Colorado): Golem Press, 1971. – 370 p.
2. Шифрин Я. С. Статистическая теория антенн. / В справочнике по антенной технике. Т. 1 / Под ред. Л. Д. Бахраха и Е. Г. Зелкина. – М.: ИПРЖР, 1997. – С. 148-206.  
Shifrin Y. S. Statistical Antenna Theory (Theory Foundation, State-of-the-Art, Basic Application) // Telecommunication and Radio Engineering. – 2001. – Vol. 55, No. 6-7. – P. 1-67.
3. Dolzhikov V. The Mean Characteristics of a Round Aperture under Phase Fluctuation Condition // Radioelectronics and Communications Systems. – 2002. – Vol. 45, No. 10. – P. 43-49.
4. Должиков В. В. Продольное распределение средней интенсивности поля круглой сфокусированной апертуры при наличии флуктуаций фазы // Вестник Харьковского национального универси-

- тета. Радиофизика и электроника. – 2002. – №570. – С. 30-35.
5. Должиков В. В., Сербин А. В. Флуктуации фокального пятна круглой сфокусированной апертуры при наличии фазовых ошибок // Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – Харьков: Харьковский нац. ун-т радиоэлектроники. – 2005. – Вып. 143. – С. 133-137.
  6. Должиков В. В., Сербин А. В. Флуктуации поля круглой сфокусированной апертуры при наличии случайных фазовых ошибок // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – Харьков: Харьковский нац. ун-т радиоэлектроники. – 2006. – Вып. 146. – С. 215-230.
  7. Silver S. Microwave Antenna Theory and Design. – New York: Mc Graw-Hill, 1949. – 312 p.
  8. Hansen R. C. (editor). Microwave Scanning Antennas. Vol. 1. Apertures. – New York, London: Academic Press. – 1964. – 442 p.
  - Хансен Р. С. (редактор). Сканирующие антенные системы СВЧ. Т. 1 / Пер. с англ. под ред. Г. Т. Маркова и А. Ф. Чаплина. – М.: Сов. Радио, 1966. – 536 с.
  9. Ramsey J. F. Tubular Beams from Radiating Aperture / In Advances in Microwaves, vol. 3 / L. F. Young, ed. – New York, London: Academic Press, 1968. – P. 127-227.
  10. Hoyt R. S. Probability Functions for the Modulus and Angle of the Normal Complex Variate // Bell Sys. Tech. J. – 1947. – Vol. 26. – P. 318.

### Статистика поля антени з круглою апертурою

#### Я. С. Шифрін, В. В. Должиков

Розглянуто статистику поля антени з круглою апертурою, сфокусованою в зону Френеля, за наявності в її апертурі фазових флуктуцій. Основні співвідношення сформульовано в інваріантному щодо місцеположення точки фокуса (фокусування) вигляді. Це дозволяє використати їх у вивченні поля як сфокусованих, так і несфокусованих (“звичайних”) антен у їхній зоні Френеля та у дальній зоні. Наведено формули для середніх і флуктуаційних характеристик поля та графіки, що ілюструють залежність цих характеристик від дисперсії та радіуса кореляції флуктуацій. Результати, отримані для круглої апертури, зіставлено з результатами, раніше отриманими авторами для лінійної антени.

## **Field Statistics of the Circular Aperture Antennas**

**Y. S. Shifrin and V. V. Dolzhikov**

The field statistics of the circular aperture antennas focused to the Fresnel zone with the presence of the phase fluctuations on its aperture is considered. The basic relationships are formulated in the form being invariant with respect to the focus point location. This allows using them when studying both focused and unfocused (ordinary) antennas in their Fresnel and far zones. The formulas for mean and fluctuation characteristics of the field are given, the plots illustrating these characteristics versus the fluctuations dispersion and correlation radius presented. The results obtained for the circular aperture are compared with those analogous obtained earlier by the authors for the linear antenna.