

## Применение *Sh*-матриц в задачах рассеяния электромагнитного излучения частицами неправильной формы

Д. В. Петров

*НИИ астрономии Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина,  
ул. Сумская, 35, г. Харьков, 61022, Украина*

*Статья поступила в редакцию 12 июня 2007 г., после переработки 3 июня 2009 г.*

Предложен конкретный пример модификации метода расширенных граничных условий, основанной на введении так называемых *Sh*-матриц, элементы которых зависят только от формы частицы и не зависят от ее размера или оптических констант. Это позволяет вычислять *Sh*-матрицы только один раз и затем находить интенсивность и степень линейной поляризации для любых размеров и показателей преломления частиц. В некоторых случаях использование *Sh*-матриц допускает аналитическое решение задачи. В настоящей работе приведено решение для частиц, напоминающих по форме ракушки. Показано, что с увеличением параметра  $\xi$ , который характеризует отклонение от сферы, количество резонансов на кривых и их амплитуда уменьшаются.

Современные задачи рассеяния электромагнитных волн часто решаются с помощью метода расширенных граничных условий [1-4]. В принципе этот метод может применяться для изучения рассеяния объектами произвольной формы. Однако в этом случае расчеты довольно сложны и требуют больших затрат компьютерного времени на оценку двойного интеграла по поверхности рассеивающей частицы [3]. В связи с этим нахождение аналитических выражений для вычисления элементов *T*-матриц (определение дано ниже) представляется очень важной задачей. Особенностью метода расширенных граничных условий является то, что учет симметрии рассеивающих частиц приводит к значительным упрощениям и ускорению вычислений [4]. Наш подход дает возможность серьезно упростить вычисления и производить эффективное усреднение рассеивающих свойств несимметричных частиц как с произвольным размерным параметром  $X = 2\pi r/\lambda$  (здесь  $r$  – некий характерный размер частицы,  $\lambda$  – длина волны падающего света), так и произвольным показателем преломления  $m_0$ .

Пусть на однородную и изотропную частицу заданной формы с показателем преломле-

ния  $m_0$  падает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна  $\mathbf{E}^{inc}$ . Рассеянное поле обозначим  $\mathbf{E}^{sca}$ . Основная идея метода *T*-матриц заключается в разложении падающего и рассеянного полей в ряд по векторным сферическим волновым функциям [1, 2, 4]:

$$\mathbf{E}^{inc}(\rho, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \text{RgM}_{mn}(\rho, \theta, \phi) + b_{mn} \text{RgN}_{mn}(\rho, \theta, \phi)],$$

$$\mathbf{E}^{sca}(\rho, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [p_{mn} \mathbf{M}_{mn}(\rho, \theta, \phi) + q_{mn} \mathbf{N}_{mn}(\rho, \theta, \phi)],$$

где  $\text{RgM}_{mn}(\rho, \theta, \phi)$ ,  $\text{RgN}_{mn}(\rho, \theta, \phi)$ ,  $\mathbf{M}_{mn}(\rho, \theta, \phi)$ ,  $\mathbf{N}_{mn}(\rho, \theta, \phi)$  и  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $p_{mn}$ ,  $q_{mn}$  – векторные сферические волновые функции и соответствующие им коэффициенты разложения;  $\rho$  – расстояние от центра системы координат;  $\gamma$  и  $\phi$  – полярный и азимутальный углы соответственно в сферической системе координат с началом в центре частицы [3] (эти координаты характеризуют гео-

метриосветорассеяния). Функции  $\text{RgM}_{mn}(\rho, \theta, \phi)$  и  $\text{RgN}_{mn}(\rho, \theta, \phi)$  конечны в начале координат ( $\text{Rg}$  означает “regular” [4]). Явные выражения для векторных сферических волновых функций приведены, например, в работе [4]. Коэффициенты разложения рассеянного поля  $p_{mn}, q_{mn}$  связаны с коэффициентами разложения падающего поля  $a_{mn}, b_{mn}$  соотношениями, следующими из линейности уравнений Максвелла:

$$p_{mn} = \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left[ T_{mnm'n'}^{11} a_{m'n'} + T_{mnm'n'}^{12} b_{m'n'} \right],$$

$$q_{mn} = \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left[ T_{mnm'n'}^{21} a_{m'n'} + T_{mnm'n'}^{22} b_{m'n'} \right].$$

Матрица, связывающая эти два набора коэффициентов, называется  $T$ -матрицей:

$$\mathbf{T}_{mnm'n'} = \begin{pmatrix} T_{mnm'n'}^{11} & T_{mnm'n'}^{12} \\ T_{mnm'n'}^{21} & T_{mnm'n'}^{22} \end{pmatrix}.$$

Она зависит только от физических и геометрических характеристик рассеивающей частицы, таких, как размерный параметр, форма, относительный показатель преломления, и не зависит от геометрии освещения, наблюдения и состояния поляризации падающего света. Это значит, что матрица  $\mathbf{T}_{mnm'n'}$  вычисляется один раз, а затем используется для любой геометрии освещения, наблюдения и состояния поляризации падающего света.

Автору удалось разделить влияния формы частицы и ее физических параметров, таких, как размерный параметр  $X$  и показатель преломления  $m_0$ , введя так называемые матрицы формы ( $Sh$ -матрицы), которые зависят лишь от формы частицы [3]. Это разделение оказалось возможно осуществить путем разложения функций Бесселя, от которых зависят элементы  $T$ -матриц, в абсолютно сходящиеся степенные ряды [3]. Последующее почленное интегрирование и сворачивание ряда позволяет произвести факторизацию эффектов формы. Эта процедура является точной и не связана ни с какими приближениями (см. подробности в [3]).

Для частиц некоторых форм эти матрицы могут быть найдены аналитически. Ниже приводится решение для частиц, по виду напоминающих ракушки. Их форма описывается следующей функцией:

$$R_0(\varphi) = 1 + \xi \cos \varphi. \tag{1}$$

Параметр несферичности  $\xi$  принимает значения от 0 до 1. На рис. 1 приведен пример частицы при  $\xi=1$ . При  $\xi=0$  частица превращается в сферу. Эта форма частиц была выбрана, поскольку для нее существует одно из самых простых решений в данном методе. Опуская громоздкие выкладки, дадим выражения для элементов  $Sh$ -матрицы:

$$\text{RgSh}_{mnm'n',k}^{11} = -iA_{nn'} \pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+2}} \times$$

$$\times I_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k+n+n'+2, m'-m}^{(0)},$$

$$\text{RgSh}_{mnm'n',k}^{121} = A_{nn'} \pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+2}} (n+1) \times$$

$$\times \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k+n+n'+1, m'-m}^{(0)} + |m'| n I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k+n+n', m'-m}^{(2)} \right],$$

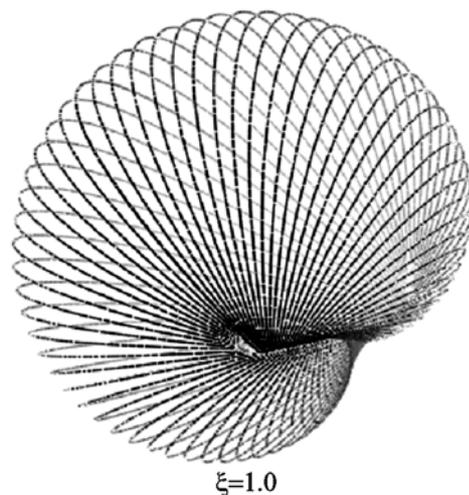


Рис. 1. Пример частиц, описываемых уравнением (1)

$$\begin{aligned} \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{122} &= -A_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+3}} \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k+n+n'+3, m'-m}^{(0)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{211} &= -A_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+2}} (n'+1) \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k+n+n'+1, m'-m}^{(0)} - |m|n I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k+n+n', m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{212} &= A_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+3}} \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k+n+n'+3, m'-m}^{(0)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{221} &= -iA_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+2}} (n'+1)(n+1) \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k+n+n', m'-m}^{(0)} + \right. \\ &\left. + \left( \Theta_{mnm'n'}^{(1)} - \Theta_{mnm'n'}^{(0)} \right) \Phi_{2k+n+n'-1, m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{222} &= iA_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+3}} (n+1) \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k+n+n'+2, m'-m}^{(0)} - \Theta_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k+n+n'+1, m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{223} &= iA_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+3}} (n'+1) \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k+n+n'+2, m'-m}^{(0)} - \Theta_{mnm'n'}^{(0)} \Phi_{2k+n+n'+1, m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{224} &= -iA_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+k}}{2^{2k+n+n'+4}} \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k+n+n'+4, m'-m}^{(0)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_{mnm'n',k}^{11} &= \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{11} + \\ &+ A_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+1}} I_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k-n+n'+1, m'-m}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$Sh_{mnm'n',k}^{121} = \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{121} + iA_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+1}} n \times$$

$$\begin{aligned} &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k-n+n', m'-m}^{(0)} + \right. \\ &\left. + |m'|(n+1) I_{mnm'n'}^{(0)} \Phi_{2k-n+n'-1, m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_{mnm'n',k}^{122} &= \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{122} + \\ &+ iA_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+2}} I_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k-n+n'+2, m'-m}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_{mnm'n',k}^{211} &= \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{211} + iA_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+1}} (n'+1) \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k-n+n', m'-m}^{(0)} + |m|n' I_{mnm'n'}^{(0)} \Phi_{2k-n+n'-1, m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_{mnm'n',k}^{212} &= \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{212} - \\ &- iA_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+2}} I_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k-n+n'+2, m'-m}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_{mnm'n',k}^{221} &= \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{221} + \\ &+ A_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+1}} (n'+1)n \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k-n+n'-1, m'-m}^{(0)} - \right. \\ &\left. - \left( \frac{n+1}{n} \Theta_{mnm'n'}^{(1)} + \Theta_{mnm'n'}^{(0)} \right) \Phi_{2k-n+n'-2, m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_{mnm'n',k}^{222} &= \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{222} + A_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+2}} n \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k-n+n'+1, m'-m}^{(0)} - \frac{n+1}{n} \Theta_{mnm'n'}^{(1)} \Phi_{2k-n+n', m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_{mnm'n',k}^{223} &= \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{223} + A_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+2}} (n'+1) \times \\ &\times \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k-n+n'+1, m'-m}^{(0)} - \Theta_{mnm'n'}^{(0)} \Phi_{2k-n+n', m'-m}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh_{mnm'n',k}^{224} &= \text{Rg}Sh_{mnm'n',k}^{224} - \\ &- A_{nn'}\pi^2 \frac{(-1)^{m'-m+n+k}}{2^{2k-n+n'+1}} \left[ I_{mnm'n'}^{(2)} \Phi_{2k-n+n'+3, m'-m}^{(0)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Theta_{mnm'n'}^{(0)} = \frac{n'}{2n+1} \left[ n\sqrt{(n+1)^2 - m^2} I_{mn+1m'n'}^{(0)} - (n+1)\sqrt{n^2 - m^2} I_{mn-1m'n'}^{(0)} \right] \times \Gamma \left( k+k' + \frac{|m'|+|m|}{2} \right) \times \left[ k'!(n'-k')!(n'-|m'|-k')!(|m'|+k')! \right]^{-1},$$

$$\Theta_{mnm'n'}^{(1)} = \frac{n}{2n'+1} \left[ n'\sqrt{(n'+1)^2 - m'^2} I_{mnm'n'+1}^{(0)} - (n'+1)\sqrt{n'^2 - m'^2} I_{mnm'n'-1}^{(0)} \right],$$

$$I_{mnm'n'}^{(1)} = \frac{|m|}{n} \Theta_{mnm'n'}^{(1)} + \frac{|m'|}{n'} \Theta_{mnm'n'}^{(0)},$$

$$I_{mnm'n'}^{(0)} = \frac{\Xi_m \Xi_{m'}}{2} \times \frac{n! \sqrt{(n-m)!(n+m)!n'! \sqrt{(n'-m')!(n'+m')!}}{\Gamma(n+n')} \times \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(n-|m|-k)! (|m|+k)!} \times \sum_{k'=0}^{n'-m'} (-1)^{k'} \Gamma \left( n-k+n'-k' - \frac{|m'|+|m|}{2} \right) \times$$

$$I_{mnm'n'}^{(2)} = |mm'| I_{mnm'n'}^{(0)} + \frac{1}{(2n'+1)(2n+1)} (n'+1) \times \sqrt{n'^2 - m'^2} (n+1) \sqrt{n^2 - m^2} I_{mn-1m'n'-1}^{(0)} + n' \sqrt{(n'+1)^2 - m'^2} n \sqrt{(n+1)^2 - m^2} I_{mn+1m'n'+1}^{(0)} - (n'+1) \sqrt{n'^2 - m'^2} n \sqrt{(n+1)^2 - m^2} I_{mn+1m'n'-1}^{(0)} - n' \sqrt{(n'+1)^2 - m'^2} (n+1) \sqrt{n^2 - m^2} I_{mn-1m'n'+1}^{(0)},$$

$$\Phi_{n,m}^{(0)} = \begin{cases} \frac{(-1)^m (1 - \sqrt{1 - \xi^2})^{m-3n-2}}{2^{-n-2} \xi^m (\xi^2 - 1 + \sqrt{1 - \xi^2})^{-2n-1}} \sum_{k=0}^{-n-1} C_{m-n-1}^k C_{-2n-k-2}^{-n-1} \left[ 2 \frac{\xi^2 - 1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2} - 1} \right]^k, & n < 0, \\ \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k \xi^k [1 + (-1)^{m+k}] \Gamma(k+1)}{2^k \Gamma\left(\frac{k+m}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k-m}{2} + 1\right)}, & n \geq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_{n,m}^{(2)} = \frac{\xi m}{2} \begin{cases} \frac{(-1)^m (1 - \sqrt{1 - \xi^2})^{m-3n-2}}{2^{-n-2} n \xi^m (\xi^2 - 1 + \sqrt{1 - \xi^2})^{-2n-1}} \sum_{k=0}^{-n-1} C_{m-n-1}^k C_{-2n-k-2}^{-n-1} \left[ \frac{\xi^2 - 1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2} - 1} \right]^k, & n < 0, \\ \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k \xi^k [1 - (-1)^{m+k}] \Gamma(k+1)}{2^k \Gamma\left(\frac{k+m+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-m+3}{2}\right)}, & n \geq 0. \end{cases}$$

По элементам *Sh*-матрицы легко находятся элементы *T*-матрицы [3]. Зная элементы *T*-матрицы, можно вычислить интенсивность  $I(\vartheta)$  и степень линейной поляризации рассеянного света  $P(\vartheta)$  как функции угла рассеяния  $\vartheta$  (это угол между направлениями распространения падающей и рассеянной электромагнитной волн;  $\vartheta = 0$  соответствует рассеянию “вперед”):

$$I(\vartheta) = a_1(\vartheta), \quad (2)$$

$$P(\vartheta) = -\frac{b_1(\vartheta)}{a_1(\vartheta)}. \quad (3)$$

Здесь

$$a_1(\vartheta) = \sum_{s=0}^{s_{\max}} \alpha_1^s d_{00}^s(\vartheta), \quad b_1(\vartheta) = -\sum_{s=0}^{s_{\max}} \beta_1^s d_{02}^s(\vartheta),$$

$d_{mn}^s(\vartheta)$  – функция Вигнера,

$$d_{mn}^s(\vartheta) = \sqrt{(s+m)!(s-m)!(s+n)!(s-n)!} \times \sum_k (-1)^k \frac{(\cos(\vartheta/2))^{2s-2k+m-n} (\sin(\vartheta/2))^{2k-m+n}}{k!(s+m-k)!(s-n-k)!(n-m+k)!},$$

а также

$$\alpha_1^s = g_{00}^s + g_{0-0}^s, \quad \beta_1^s = 2 \operatorname{Re} g_{02}^s,$$

где

$$g_{00}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=\max(1,|n-s|)}^{n+s} h_{smn'} C_{n,1,s,0}^{n',1} \sum_{m=-\min(n,n')}^{\min(n,n')} C_{n,m,s,0}^{n',m} D_{mnn'}^{00},$$

$$g_{0-0}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=\max(1,|n-s|)}^{n+s} (-1)^{n+n'+s} h_{smn'} C_{n,1,s,0}^{n',1} \times$$

$$\times \sum_{m=-\min(n,n')}^{\min(n,n')} C_{n,m,s,0}^{n',m} D_{mnn'}^{0-0},$$

$$g_{02}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=\max(1,|n-s|)}^{n+s} h_{smn'} C_{n,1,s,0}^{n',1} \times$$

$$\times \sum_{m=\max(-n,2-n')}^{\min(n,n'+2)} C_{n,-m,s,2}^{n',2-m} D_{mnn'}^{02}.$$

При этом  $C_{n_1,m_1,n_2,m_2}^{n,m}$  – коэффициенты Клебша–Гордана [5]:

$$C_{n_1,m_1,n_2,m_2}^{n,m} = \delta_{m,m_1+m_2} \times \sqrt{\frac{(n_1+n_2-n)!(n_1+n_2+n)!(-n_1+n_2+n)!}{(n_1+n_2+n+1)!}} \times [(n_1+m_1)!(n_1-m_1)!(n_2+m_2)!(n_2-m_2)! \times (n+m)!(n-m)!(2n+1)]^{1/2} \times \sum_p (-1)^p [p!(n_1+n_2-n-p)!(n_1-m_1-p)! \times (n_2+m_2-p)!(n-n_2+m_1+p)! \times (n-n_1-m_2+p)!]^{-1},$$

а

$$D_{m,n,n'}^{00} = \sum_{n_1=|m-1|}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (2n_1+1) B_{1,n,m,n_1,m_1} (B_{1,n',m,n_1,m_1})^*,$$

$$D_{m,n,n'}^{0-0} = \sum_{n_1=|m-1|}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (2n_1+1) B_{2,n,m,n_1,m_1} (B_{2,n',m,n_1,m_1})^*,$$

$$D_{m,n,n'}^{02} = \sum_{n_1=|m-1|}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (2n_1+1) B_{2,n,m,n_1,m_1} (B_{1,n',2-m,n_1,m_1})^*,$$

$$h_{smn'} = \frac{(2s+1)\pi}{\langle C_{sca} \rangle} \sqrt{\frac{2n+1}{2n'+1}}.$$

Знак (\*) означает комплексное сопряжение,  $\langle C_{sca} \rangle$  – усредненное по ориентациям частицы поперечное сечение рассеяния:

$$\langle C_{sca} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left( |T_{mnm'n'}^{11}|^2 + |T_{mnm'n'}^{12}|^2 + |T_{mnm'n'}^{21}|^2 + |T_{mnm'n'}^{22}|^2 \right),$$

$$B1_{n,m,n1,mi} = \sum_{n'=\max(1,|n-n1|)}^{n+n1} C_{n,m,n1,1-m}^{n',1} A1_{n,mi,n',n1},$$

$$B2_{n,m,n1,mi} = \sum_{n'=\max(1,|n-n1|)}^{n+n1} C_{n,m,n1,1-m}^{n',1} A2_{n,mi,n',n1},$$

где

$$A1_{n,mi,n',n1} = \frac{i^{n'-n}}{\sqrt{2n'+1}} \sum_{m1=-\min(n,n')}^{\min(n,n')} C_{n,m1,n1,mi}^{n',mi+m1} T1_{m1nm1+min'},$$

$$A2_{n,mi,n',n1} = \frac{i^{n'-n}}{\sqrt{2n'+1}} \times \sum_{m1=-\min(n,n')}^{\min(n,n')} C_{n,m1,n1,mi}^{n',mi+m1} T2_{m1nm1+min'},$$

а

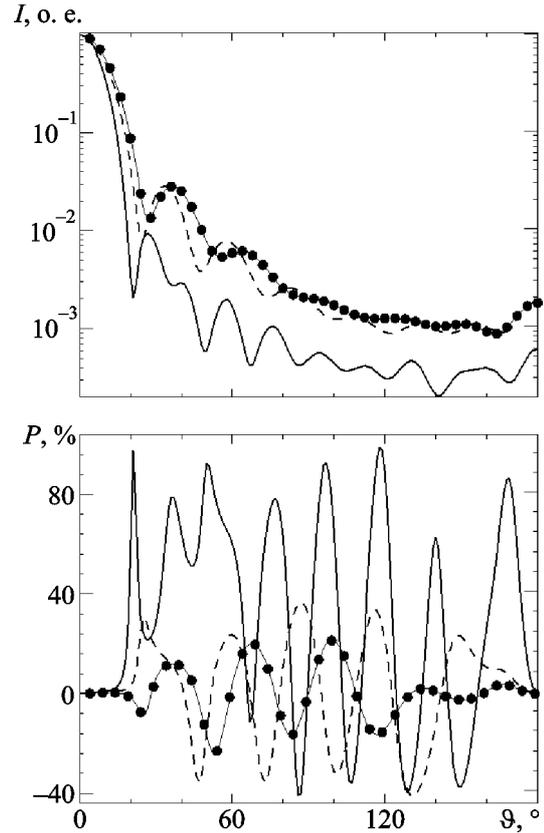
$$T1_{mm'n'} = T_{mm'n'}^{11} + T_{mm'n'}^{12} + T_{mm'n'}^{21} + T_{mm'n'}^{22},$$

$$T2_{mm'n'} = T_{mm'n'}^{11} + T_{mm'n'}^{12} - T_{mm'n'}^{21} - T_{mm'n'}^{22}.$$

На рис. 2 даны зависимости интенсивности и степени линейной поляризации от угла рассеяния для частиц, описываемых уравнением (1), усредненных по ориентации, при  $X = 10.0$ ;  $m_0 = 1.5 + 0.1i$  (показатель преломления соответствует веществу из темной органики). При расчетах предполагалось, что частица облучается неполяризованным излучением (имитируется освещением солнечным светом). Физическая причина резонансов на кривых заключается в интерференции рассеянных волн, вызывающей их взаимное усиление или ослабление. Наибольшее количество резонансов наблюдается у сферической частицы. Чем дальше форма рассеивающей частицы от сферы, тем меньше резонансов. Усреднение по ориентациям частицы уменьшает количество резонансов и их амплитуду.

Предложенный метод имеет большие потенциальные возможности; он может быть обобщен на многие другие формы несферических частиц.

Автор благодарен Ю. Г. Шкуратову и В. П. Тишковцу за прочтение рукописи и ценные замечания.



**Рис. 2.** Интенсивность рассеянного излучения  $I$  и степень линейной поляризации  $P$  как функции угла рассеяния для частиц, описываемых уравнениями (2) и (3), усредненных по ориентациям, при  $X = 10.0$ ,  $m_0 = 1.5 + 0.1i$ : — —  $\xi = 0$ ; - - -  $\xi = 0.5$ ; -●-  $\xi = 1.0$ . Частица освещается неполяризованным излучением

### Литература

1. Tsang L., Kong J., Shin R. Theory of microwave remote sensing. — New York: John Wiley and Sons, 1985. — 603 p.
2. Mishchenko M. I., Travis L. D., Mackowski D. W. T-matrix computations of light scattering by nonspherical particles: a review // J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer. — 1996. — Vol. 55. — P. 535-575.
3. Petrov D. V., Synelnyk E. N., Shkuratov Yu. G., Videen G. The T-matrix technique for calculations of scattering properties of ensembles of randomly oriented particles with different size // J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer. — 2006. — Vol. 102. — P. 85-110.
4. Mishchenko M. I., Travis L. D., Lasis A. A. Scattering, absorption, and emission of light by small particles. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002. — 690 p.
5. Абрамовиц М., Стиган И. — Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

**Використання *Sh*-матриць у задачах розсіяння електромагнітного випромінювання частинками неправильної форми**

**Д. В. Петров**

Запропоновано конкретний приклад модифікації метода розширених граничних умов, котра ґрунтується на впровадженні так званих *Sh*-матриць, елементи яких залежать лише від форми частинки і не залежать від її розміру або оптичних констант. Це дозволяє обчислювати *Sh*-матриці лише одноразово, а потім знаходити інтенсивність та ступінь лінійної поляризації для будь-яких розмірів і показчиків заломлення частинок. У деяких випадках використання *Sh*-матриць дозволяє аналітичний розв'язок задачі. У цій роботі наведено розв'язок для частинок, що нагадують за формою черепашки. Показано, що зі збільшенням параметра  $\xi$ , що характеризує відхилення від сфери, кількість резонансів на кривих та їх амплітуда зменшуються.

**Application of *Sh*-Matrices in Electromagnetic Wave Scattering by Particles of Irregular Shapes**

**D. V. Petrov**

A specific example of expanded boundary condition method modified with introduction of so-called *Sh*-matrices whose elements depend only on a particle shape and do not depend on its size or optical constants is considered. This allows to calculate *Sh*-matrices only once, and then to find the intensity and degree of linear polarization for any particle size and refractive index. In some cases, using of *Sh*-matrices suggests the analytical solution of scattering. Here, the solution for the particles which shape resembles seashells is obtained. It is shown that with the increasing parameter  $\xi$ , characterizing deviation from a spherical shape, the number of resonances on curves and their amplitudes decrease.