Радиофизика и радиоастрономия, 2009, т. 14, №4, с. 420-424

УДК 621.371.162

# Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. IV. Частотный спектр в случае наклонного зондирования при однопозиционной локации

А. С. Брюховецкий

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,*
*ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина*
*E-mail: ire@ire.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 11 декабря 2008 г.*

Результаты предыдущих исследований используются для определения частотного спектра поля, рассеянного “большой” статистически неровной площадкой. Рассмотрен предельный переход к известному в литературе результату. Указаны условия, которые ограничивают применимость полученного решения.

Предыдущие части исследования [1-3] были посвящены определению флуктуаций, корреляционной функции и интенсивности рассеянного поля в ближней зоне статистически неровной поверхности. В этой части проведем вычисление частотного спектра в условиях наклонного зондирования при однопозиционной локации.

## Частотный спектр

Рассматривая область частот $\omega > 0,$ согласно [3] для частотного спектра рассеянного поля имеем выражение:

$$S^{\pm}(\omega_0+\Delta\omega)=\frac{\sigma^2}{16(4\pi)^2}\times$$

$$\times\iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\chi}_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\rho}\sum_{j=\pm}\tilde{W}\left(\vec{\chi}_1\right)\frac{\left|I_{12}\right|^2}{R_{01}^4}\left|\tilde{I}_{01}\left(\vec{\chi}_1\right)\right|^2\times$$

$$\times\exp\left[\pm i\Phi^{\pm}\left(\vec{\rho}\right)\right]\delta\left(\Delta\omega-j\omega_1\left(\chi_1\right)\right). \qquad (1)$$

В приведенной формуле $\vec{R}_{01}=\left(\vec{r}_{01},z_0\right)$ – вектор, соединяющий точку рассеяния $(\vec{r}_1,0)$ на средней поверхности $z=0$ и точку $\vec{R}_0=(\vec{r}_0,z_0)$ расположения точечного источника (в рассматриваемом случае обратного рассеяния она совмещена с точкой наблюдения), $\vec{r}_{01}=\vec{r}_0-\vec{r}_1;$ $\sigma^2=\left\langle\varsigma^2\right\rangle$ – дисперсия случайных неровностей $\varsigma\left(\vec{r}_1,t\right)$ рассеивающей поверхности; $\tilde{W}_{\pm}\left(\vec{\chi}_1\right)$ – несимметричный энергетический спектр волновых чисел (пространственный спектр неровностей), а $\omega_1=\omega_1\left(\chi_1\right)$ – частота случайных колебаний поверхности, соответствующая волновому вектору $\vec{\chi}_1;$ $\tilde{I}_{01}\left(\vec{\chi}_1\right)$ и $I_{12}$ – множители, учитывающие влияние отражательных свойств поверхности на трассе $\vec{R}_{01}$ для среднего поля и на трассе $\vec{R}_{12}$ для рассеянного поля соответственно [1, 2]:

$$\tilde{I}_{01}\left(\vec{\chi}_1\right)=\left[-k\vec{\alpha}_{\perp}\vec{\chi}_1+k^2\alpha_z^2\right]\left(1+V_{01}'\right)+$$

$$+k^2\alpha_z\eta_0\left(1-V_{01}'\right)+\left[-k\vec{\alpha}_{\perp}\vec{\chi}_1+k^2\alpha_z^2+k^2\alpha_z\eta_0\right]\times$$

$$\times\left(1-V_{01}'\right)W_{01}',$$

$$I_{12}=\left(1+V_{12}'\right)+\left(1-V_{12}'\right)W_{12}'.$$

Здесь $V_{01}',$ $V_{12}'$ – коэффициенты отражения, а $W_{01}',$ $W_{12}'$ – множители ослабления для трасс

$\vec{R}_{01}$ и $\vec{R}_{12}=(-\vec{r}_{01},z_0)$ соответственно; $\eta_0$ – импеданс поверхности; $\vec{\alpha}_\perp=\vec{r}_{01}/R_{01}$, $\alpha_z=z_0/R_{01}$; $\vec{\rho}=\vec{r}_1'-\vec{r}_1$, где $\vec{r}_1'$ и $\vec{r}_1$ – две произвольные точки рассеивающей площадки $S$; $\Phi^\pm(\vec{\rho})$ – фаза сигнала рассеянного элемента площади $d^2\vec{r}_1$, определенная формулой (16) из [3].

Поскольку $\omega_1=\sqrt{g\chi_1}>0$, нуль δ-функции в (1) существует при $j=\operatorname{sign}\Delta\omega$.

Интегралы по переменным $\vec{\rho}=(\rho_x,\rho_y)$ и $\vec{r}_1=(r_1,\varphi_\perp)$ были вычислены ранее (см. [3]). Ограничиваясь рассмотрением “большой” площадки [3] в виде кругового сектора $-\varphi_{\perp 0}\le\varphi_\perp\le\varphi_{\perp 0}$, $r_{1l}\le r_1\le r_{1u}$, подставим их асимптотические значения в формулу (1):

$$S^\pm(\omega_0+\Delta\omega)\approx\frac{\sigma^2}{16(4\pi)^2}\int\limits_{\varphi_{1l}}^{\varphi_{1u}}d\varphi_1\int\limits_{\chi_{1l}}^{\chi_{1u}}d\chi_1\chi_1 r_{1s}\frac{|I_{12}|^2}{R_{01}^4}\times$$

$$\times\left|\tilde{I}_{01}(\vec{\chi}_1)\right|^2\sum_{j=\pm}\tilde{W}_j(\vec{\chi}_1)\delta\left(\Delta\omega-j\omega_1(\chi_1)\right)N_B,\quad(2)$$

$$\left(\Delta\omega_l\ll|\Delta\omega|\ll\Delta\omega_u\right),$$

где $N_B$ определено формулой (45), а $\chi_{1l}$, $\chi_{1u}$ формулой (41) из [3]; $\varphi_{1l}=\pi-\varphi_{\perp 0}$, $\varphi_{1u}=\pi+\varphi_{\perp 0}$.

Для граничных значений частоты согласно [3] имеем:

$$\Delta\omega_l=\omega_{Br}\left(1+z_0^2/r_{1l}^2\right)^{-1/4},$$

$$\Delta\omega_u=\omega_{Br}\left(1+z_0^2/r_{1u}^2\right)^{-1/4}.$$

Подставив в (2) выражения для $N_B$, согласно формуле (13) из [3] получим

$$S(\omega_0+\Delta\omega)\approx\frac{\sigma^2}{16}\frac{r_\perp R_{01}}{\alpha_z^2}\frac{|\xi_0|}{\omega_{Br}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\varphi_{\perp 0}}^{\varphi_{\perp 0}}d\varphi_1\frac{|I_{12}|^2}{R_{01}^4}\left|\tilde{I}_{01}(-2k\vec{\alpha}_\perp)\right|^2\tilde{W}_j(-2k\vec{\alpha}_\perp).\quad(3)$$

При этом мы воспользовались соотношениями:

$$\delta\left(\Delta\omega-j\omega_1(\chi_1)\right)=\frac{2r_\perp^{1/2}R_{01}^{1/2}}{\alpha_z^2\omega_{Br}}\delta(r_1-r_{1s}),\qquad(4)$$

$$\xi_0^2=\alpha_{\perp s}=\chi_1/2k\equiv\left(\Delta\omega/\omega_{Br}\right)^2, -$$

и перешли от переменной интегрирования $\varphi_1$ к переменной $\varphi_\perp$ (см [3], формулу (47)).

В окрестности граничных значений частоты ($\Delta\omega\approx\Delta\omega_l$ либо $\Delta\omega\approx\Delta\omega_u$) для асимптотической оценки $S(\omega_0+\Delta\omega)$ необходимо пользоваться оценками б) и в) из Приложения в работе [3].

В [2] было получено выражение (формула (31)) для спектра в предположении, что можно ограничиться линейными по $\vec{\rho}$ членами в разложении фазы подынтегрального выражения для $B(\tau)$. Чтобы сравнить его с результатом (3), необходимо для такой же геометрии площадки $S$ произвести в указанной формуле (31) интегрирование по $r_1$, приняв во внимание, что содержащаяся в этой формуле δ-функция определена формулой (4).

В результате такой операции получается выражение, отличающееся от (3) множителем перед интегралом, а именно

$$\frac{\sigma^2}{4}\frac{r_{1s}^{3/2}R_{01s}^{1/2}}{\alpha_{zs}^2\omega_{Br}}.\qquad(5)$$

Различие в числовых множителях $1/16$ и $1/4$ объясняется различием в исходных определениях $B(\tau)$, о котором шла речь в начале статьи [3]. Остальные различия только кажущееся, в чем можно убедиться, приняв во внимание, что

$$\frac{r_{1s}^{3/2}R_{01s}^{1/2}}{\alpha_{zs}^2\omega_{Br}}=\frac{r_{1s}R_{01s}}{\alpha_{zs}^2}\frac{\alpha_{\perp s}^{1/2}}{\omega_{Br}},\qquad(6)$$

а $\alpha_{\perp s}^{1/2}=|\xi_0|$ в силу (37) из [3].

Такое совпадение результатов, полученных двумя совершенно разными методами, для автора оказалось неожиданным. Попытаемся дать этому объяснение.

Подстановка стационарных значений $\varphi_{\perp s}$ и $r_{1s}$ в выражение для $\vec{\rho}_s$ (формулы (30) , (37) и (25) из [3]) приводят к значению $\vec{\rho}_s = 0.$ Величина асимптотики в методе стационарной фазы определяется малой окрестностью $\vec{\rho}_s = 0$ с размерами меньше, чем корень квадратный из правых частей неравенств (12а), (12б), которые приведены ниже. В таком случае квадратичная по ρ поправка $k\rho^2/2R_{01}$ для разности фаз сферической волны (см [3], Приложение) мала, чем и можно объяснить указанное совпадение результатов по крайней мере по порядку величины.

Проверить соответствие между асимптотиками $S(\omega)$ и $B(0)$ можно, проинтегрировав выражение (3) по частоте в пределах $(-\infty,\infty)$. Согласно [3] (формула (37))

$$\frac{d\omega}{dr_1} = \omega_{Br}\frac{\alpha_z^2}{r_1^{1/2}R_{01}^{1/2}}. \tag{7}$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_0+\Delta\omega)d\omega \approx \frac{\sigma^2}{16}\int_{-\varphi_{\perp 0}}^{\varphi_{\perp 0}} d\varphi_\perp \times$$

$$\times\int_{r_{1l}}^{r_{1u}} dr_1 r_1 \frac{|I_{12}|^2}{R_{01}^4}\left|\tilde{I}_{01}(-2k\alpha_\perp)\right|^2 \sum_{j=\pm}\tilde{W}_j(-2k\vec{\alpha}_\perp), \tag{8}$$

что полностью совпадает с формулой (49) из [3] для $B(0),$ если принимать во внимание связь симметричного $\tilde{W}(\vec{\chi})$ и несимметричного $\tilde{W}_j(\vec{\chi})$ спектров волновых чисел.

Таким образом, асимптотические вычисления $S(\omega)$ и $B(0)$ не нарушают общетеоретической связи между ними.

## Ограничения применимости решения

Ограничение главным членом асимптотических разложений требует по крайней мере малости следующего члена по сравнению с оставляемым. Взяв за основу соотношения, приведенные в [4] (с. 474, 475, 532, 533), искомые ограничения можно свести к требованиям:

$$(1/\Omega)\left|(f_s''/f_s)[\phi(0)]^2\right| \ll 1, \tag{9а}$$

$$(3/\Omega)\left|(f_s'/f_s)\phi(0)'\right| \ll 1, \tag{9б}$$

$$(1/\Omega)\left|\phi(0)''/\phi(0)\right| \ll 1. \tag{9в}$$

Здесь $f_s = f(z_s),$ $f_s'' = \left.\frac{d^2 f(z)}{dz^2}\right|_{z=z_s}$ – значение предэкспоненциального множителя в стационарной точке $z = z_s,$ а $\phi(s) = dz/ds$ – производная от исходной переменной интегрирования $z$ по перевальной $s$ (см. пояснения к формуле (30) в [3]).

При этом $(1/\Omega)\left|[\phi(0)]^2\right| = 2\Big/\left|\left(\Phi(z_s)^{\pm}\right)''\right|,$ где $\left(\Phi(z_s)^{\pm}\right)''$ для соответствующих переменных интегрирования определены формулами (39) и (3) из [3].

Соотношения (6а), (6б) на с. 533 из [4] позволяют привести формулы (9) к виду, содержащему в знаменателях дробей вторую, а в числителях третью и четвертую производные от фазы в стационарной точке.

Для интеграла $I_{\varphi\perp}$ соотношения (9) в результате вычислений сводятся к требованиям (значение всех величин берутся в стационарных точках $\varphi_\perp = \varphi_{\perp s},$ $r_1 = r_{1s}$):

$$\left(kR_{01}\alpha_\perp^2 L_{\varphi_\perp}^2\right)^{-1} \ll 1, \tag{10а}$$

$$\left(kR_{01}\alpha_\perp^2\right)^{-1} \ll 1, \tag{10б}$$

где $1/L_{\varphi_\perp}^2 \sim \left|f_s''/f_s\right|$ соответствующий характерный масштаб изменений $f(\varphi_\perp)$ по переменной $\varphi_\perp$ вблизи стационарной точки $\varphi_\perp = \varphi_{\perp s}.$ Условие (10б) в волновой зоне выполняется всегда, а первое условие (10а) означает, что $L_{\varphi\perp} \gg \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi R_{01}\alpha_\perp^2}},$ т. е. характерный угол изменения $f(\varphi_\perp)$ должен быть много больше характерного угла $\sqrt{\lambda/R_{01s}}$ френелевской зоны.

Для интеграла $I_{r_1}$ по переменной $r_1$ аналогичные вычисления приводят к требованиям:

$$L_{r_1}^2 / R_{01}^2 \gg \left(kR_{01}\alpha_z^2\right)^{-1}, \tag{11а}$$

$$L_{r1} / R_{01} \gg 3\alpha_\perp \Big/ \left(kR_{01}\alpha_z^2\right), \tag{11б}$$

$$\alpha_z^2 / \alpha_\perp^2 \gg (9/2)\left(kR_{01}\right)^{-1}. \tag{11в}$$

При выполнении последнего из этих неравенств первые два сводятся к условию $L_{r_1} / R_{01} \sim 1,$ которое заведомо выполняется для зависимости $\sim 1/R_{01}^4$ в рассматриваемом интеграле. Последнее неравенство накладывает ограничение на высоту $z_0$ источника и означает, что углы скольжения должны быть много больше характерного угла $\sqrt{\lambda/R_{01}}$ френелевской зоны.

Информация о наличии в литературе формул для оценок членов асимптотического ряда двукратного быстро осциллирующего интеграла, таких, как для случая однократного, не известна, поэтому ограничимся лишь требованием малости (9а), где $z_s = \rho_1$ либо $z_s = \rho_2$ – составляющие стационарного значения $\vec{\rho}$ в базисе, приводящем матрицу Гесса к диагональному виду, а разложение фазы $\Phi^\pm(\vec{\rho})$ – к квадратичной форме ([4], с. 528-530). Это условие позволяет в разложении $f(\vec{\rho})$ ограничиться лишь первым членом $f\left(\vec{\rho}_s\right),$ т. е. значением при $\vec{\rho} = \vec{\rho}_s,$ которое при подстановке стационарных значений остальных переменных асимптотического интегрирования равно $\vec{\rho}_s = 0.$ Именно это, по сути, и было сделано в переходе от формулы (20) из [2] к формуле (6).

Поскольку $\left|[\phi(0)]\right|^2 = 2 \Big/ \left|\left(\Phi^\pm(\rho_i)\right)''\right|,$ $(i = 1,\, 2),$ а $\left(\Phi^\pm(\rho_i)\right)'' = h_i^\pm$ в рассматриваемом базисе, условие (9а) имеет вид:

$$L_i^2 \gg 2\left|h_i^\pm\right|^{-1}. \tag{12}$$

Подстановка в выражения для $h_i^\pm$ стационарных значений входящих в них величин сводит (12) к виду:

$$\left(L_1^+\right)^2 = \left(L_2^-\right)^2 \gg \frac{1}{2\pi}\lambda R_{01}, \tag{12а}$$

$$\left(L_1^-\right)^2 = \left(L_2^+\right)^2 \gg \frac{1}{2\pi}\left(\lambda R_{01}/\alpha_z^2\right). \tag{12б}$$

Комбинации знаков $L_1^\pm,$ $L_2^\pm$ отвечают комбинациям знаков фазы $\Phi^\pm(\rho).$ Значения $R_{01},$ $\alpha_z$ вычисляются при стационарных значениях $\alpha_{\perp s}$ (см. формулу (3) в [3]) . Напомним, что $\sqrt{\lambda R_{01}}$ и $\sqrt{\lambda R_{01}}/\alpha_z$ – малая и большая оси эллипса, получаемого при пересечении параболоида вращения с радиусом $\sqrt{\lambda R_{01}}$ и плоскости $z = 0.$

Очевидно, условие (12б) полностью совпадает с (11а), а условие (12а) эквивалентно (10а). Действительно, если вместо углового масштаба $L_{\varphi_\perp}$ в поперечном к $\vec{r}_1$ направлении выбрать линейный $L_\perp = L_{\varphi_\perp} R_{01}\alpha_\perp \equiv L_{\varphi_\perp} r_{01},$ тогда (12а) переходит в (10а).

Такая связь ограничений асимптотического интегрирования по $\vec{r}_1$ и $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_1{}'$ вполне естественна, поскольку $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ – две абсолютно равноправные точки рассеивающей площадки $S$.

Сравнение всех приведенных ограничений указывает на то, что наиболее существенным является ограничение на углы падения (11в) . Для скользящего рассеяния (углы падения $\sim \pi/2$) величина $\alpha_z \to 0.$ При этом нарушается не только условие (11в), но и само выражение (3) для спектра теряет физический смысл, стремясь к бесконечности. Это свидетельствует о неравномерности асимптотики по углу падения [5], значения которого выходят за границы ее применимости. Как известно [5], такую границу можно установить лишь из условия “сшивки” неравномерной и равномерной асимптотик, задавая определенный порог точности.

Причиной усложнения расчетов в окрестности $\alpha_z \approx 0$ является обращение в нуль гессиана ([3], формула (24)) и $\left(\Phi^{\pm}(r_1)\right)''_s$ ([3], формула (39)), в результате чего разложение фазы по соответствующей перевальной переменной $s$ начинается не $s^2$, а $s^3$ или $s^4$ [5]. Это свидетельствует о слиянии нескольких стационарных точек (фокусировка) и требует для определения асимптотик, равномерных хотя бы локально, специальных функций волновых катастроф [5].

## Заключение

Применение метода стационарной фазы для асимптотической оценки многократных быстроосциллирующих интегралов в рассматриваемом случае оказалось достаточно успешным. Все вычисления проведены в аналитическом виде.

Полученные выражения для интенсивности и частотного спектра рассеянного поля позволяют обосновать применимость существующего эвристического метода расчета (см. [6] (с. 105) и [7] (с. 149)) и указать область его применимости.

Вышеуказанный метод предполагает возможность линейного приближения в разложении фазы подинтегрального выражения, определяющего корреляционную функцию, что значительно упрощает расчеты, но оставляет при этом сомнения в их обоснованности. Проведенный нами анализ позволяет ее аргументировать для рассеяния "большой" площадкой в определенном диапазоне частот.

## Литература


1. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. I. Флуктуации поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №4. – С. 399-409.
2. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. II. Средняя интенсивность и частотный спектр флуктуаций поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2008. – Т. 13, №1. – С. 92-98.
3. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. III. Временная корреляционная функция и интенсивность в случае наклонного зондирования при однопозиционной локации // Радиофизика и радиоастрономия. – 2009. – Т. 14. №3. – С. 304-313.
4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 547 с.
5. Крюковський Л. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А., Растягаев Д. С. Волновые катастрофы-фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн (обзор) // Радиотехника и электроника. – 2006. – Т. 51, №10. – С. 1155-1192.
6. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
7. В. И. Татарский. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548 с.


## Розсіяння хвиль у ближній зоні статистично нерівної поверхні. IV. Частотний спектр у випадку похилого зондування з однопозиційною локацією

**А. С. Брюховецький**

Результати попередніх досліджень використовуються для визначення частотного спектру поля, розсіяного "великою" статистично нерівною площадкою. Розглянуто граничний перехід до відомого в літературі результату. Вказано умови, що обмежують використання одержаного розв'язку.

## Wave Scattering in Near Zone of a Statistically Rough Surface. IV. Frequency Spectrum in Case of Oblique Incidence by One-Position Location

**A. S. Bryukhovetski**

The results of the previous investigations are used to determine the frequency spectrum of the field scattered by a "big" statistically rough surface element. The passage to the limit to the known in literature case is studied. The restrictive conditions for the applicability of the solution found are shown.