

Метод модового базиса во временной области для волновода с поперечно неоднородным многосвязным сечением.

2. Пример численной реализации метода

А. Ю. Бутрым, Б. А. Кочетов

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: abutrym@ya.ru, bkochetov@bk.ru*

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2009 г.

В качестве примера рассмотрено распространение импульсного сигнала в плоскопараллельном волноводе с продольным диэлектрическим слоем, что является простейшей поперечно неоднородной ТЕМ-линией. Результаты, полученные с помощью разработанной модификации метода модового базиса, совпали с решением, найденным методом конечных разностей во временной области. Продемонстрирована быстрая сходимость предложенного модового разложения. Рассмотренный метод может быть также применен для анализа дисперсионных характеристик поперечно неоднородного волновода в частотной области. Он дает высокую вычислительную эффективность при получении дисперсионных характеристик в широкой полосе частот и позволяет проводить классификацию волноводных мод в частотной области путем их сопоставления с введенными частотно-независимыми модами во временной области.

Эта статья является продолжением работы [1]. В ней используются терминология и обозначения, введенные в [1]. Результаты настоящей работы ранее частично представлялись в сокращенном виде в тезисах конференций [2, 3].

1. Анализ плоскопараллельного волновода с диэлектрическим слоем при помощи метода модового базиса во временной области

Рассмотрим применение разработанной модификации метода модового базиса (ММБ) [1] на примере анализа распространения импульсной волны в плоскопараллельном волноводе с диэлектрическим слоем, который представляет собой две параллельные идеально проводящие металлические плоскости, на одной из которых расположен плоский слой тол-

щиной θ идеального диэлектрика с постоянной диэлектрической проницаемостью ε (см. рис. 1). Расстояние между плоскостями $d = \eta + \theta$. В дальнейшем для удобства будем использовать размеры, нормированные на d .

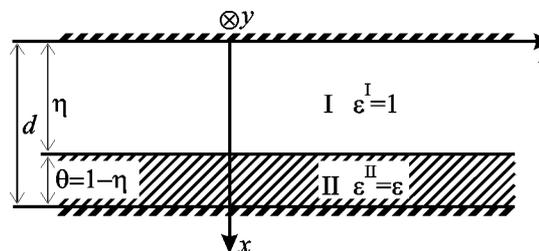


Рис. 1. Плоскопараллельный волновод с диэлектрическим слоем

Чтобы не вводить новых обозначений, будем полагать $d = 1$ и $\eta + \theta = 1$.

Волновод возбуждается нестационарными однородно распределенными в плоскости $z = 0$ токами, текущими вдоль оси x .

1.1. Построение модового базиса

Построим модовый базис для рассматриваемой структуры в подпространстве L^H – части пространства решений уравнений Максвелла, содержащей H -волны. Для этого необходимо решить соответствующую задачу поиска собственных значений, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Psi_m^H}{dx^2} + p_m^2 \Phi_m^H = 0, \\ \frac{d^2 \Phi_m^H}{dx^2} - \frac{1}{\varepsilon_\perp} \frac{d\varepsilon_\perp}{dx} \frac{d\Phi_m^H}{dx} + p_m^2 \varepsilon_\perp \Psi_m^H = 0, \\ \left. \frac{d\Phi_m^H}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\Phi_m^H}{dx} \right|_{x=1} = 0, \\ \left. \frac{d\Psi_m^H}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d\Psi_m^H}{dx} \right|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь Ψ_m^H и Φ_m^H – скалярные функции, образующие биортогональный базис в L^H , а p_m^2 – соответствующие им собственные числа, имеющие физический смысл частот отсечки для волноводных мод H -типа.

Для плоскопараллельного волновода с диэлектрическим слоем (рис. 1) поперечная диэлектрическая проницаемость является кусочно-постоянной функцией и определена следующим образом:

$$\varepsilon_\perp(x) = \begin{cases} \varepsilon^I, & x \in [0, \eta]; \\ \varepsilon^II, & x \in (\eta, 1]. \end{cases} \quad (2)$$

Причем будем считать, что $\varepsilon^I = 1$ и $\varepsilon^II = \varepsilon$. В этом случае задачу (1) удобно решать методом частичных областей. В дальнейшем все величины, относящиеся к первой области, не заполненной диэлектриком, будем обозначать

верхним индексом I, а все величины, которые относятся ко второй области, заполненной диэлектриком, – индексом II. Решение задачи (1) в областях I и II выражается через тригонометрические и гиперболические функции:

$$\begin{aligned} \Psi_m^{H^I} &= A_{1,m} \cos[p_m x] + A_{2,m} \operatorname{ch}[p_m x], \\ \Psi_m^{H^{II}} &= B_{1,m} \cos[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)] + \\ &+ B_{2,m} \operatorname{ch}[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_m^{H^I} &= A_{1,m} \cos[p_m x] - A_{2,m} \operatorname{ch}[p_m x], \\ \Psi_m^{H^{II}} &= B_{1,m} \varepsilon^{1/2} \cos[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)] - \\ &- B_{2,m} \varepsilon^{1/2} \operatorname{ch}[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)]. \end{aligned}$$

По известным скалярным потенциалам (3) находим векторные базисные функции:

$$\begin{aligned} \vec{E}_m^{H^I} &= \vec{y}_0 \{A_{1,m} \sin[p_m x] + A_{2,m} \operatorname{sh}[p_m x]\}, \\ \vec{E}_m^{H^{II}} &= \vec{y}_0 \varepsilon^{-1/4} \{B_{1,m} \sin[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)] + \\ &+ B_{2,m} \operatorname{sh}[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)]\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_m^{H^I} &= \vec{x}_0 \{-A_{1,m} \sin[p_m x] + A_{2,m} \operatorname{sh}[p_m x]\}, \\ \vec{H}_m^{H^{II}} &= \vec{x}_0 \varepsilon^{1/4} \{-B_{1,m} \sin[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)] + \\ &+ B_{2,m} \operatorname{sh}[p_m \varepsilon^{1/4} (x-1)]\}. \end{aligned}$$

Неизвестные константы $A_{1,m}, A_{2,m}, B_{1,m}, B_{2,m}$ в (3), (4) определяются из четырех условий непрерывности величин $\Phi_m^H, \varepsilon_\perp^{-1} \frac{d}{dx} \Phi_m^H, \Psi_m^H, \frac{d}{dx} \Psi_m^H$ на границе раздела сред. Эти условия непрерывности приводят к следующей однородной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $A_{1,m}, A_{2,m}, B_{1,m}, B_{2,m}$:

$$\begin{pmatrix} \cos[p_m \eta] & \operatorname{ch}[p_m \eta] & -\cos[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] & -\operatorname{ch}[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] \\ \cos[p_m \eta] & -\operatorname{ch}[p_m \eta] & -\varepsilon^{1/2} \cos[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] & \varepsilon^{1/2} \operatorname{ch}[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] \\ -\sin[p_m \eta] & \operatorname{sh}[p_m \eta] & -\varepsilon^{1/4} \sin[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] & \varepsilon^{1/4} \operatorname{sh}[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] \\ -\sin[p_m \eta] & -\operatorname{sh}[p_m \eta] & -\varepsilon^{-1/4} \sin[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] & -\varepsilon^{-1/4} \operatorname{sh}[p_m \varepsilon^{1/4} \theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,m} \\ A_{2,m} \\ B_{1,m} \\ B_{2,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Собственные числа p_m задачи (1) находятся из условия существования нетривиального решения системы (5). Константы $A_{1,m}$, $A_{2,m}$, $B_{1,m}$, $B_{2,m}$ нормируются в соответствии с условиями нормировки для базисных функций. Аналогично строится модовый базис в подпространстве L^E – части пространства решений уравнений Максвелла, содержащей E - волны. Задача нахождения собственных значений в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi_n^E}{dx^2} + q_n^2 \varepsilon_{\perp} \Psi_n^E = 0, \\ \frac{d^2 \Psi_n^E}{dx^2} + \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dx} \frac{d\Psi_n^E}{dx} + q_n^2 \Phi_n^E = 0, \\ \Psi_n^E \Big|_{x=0} = 0, & \Psi_n^E \Big|_{x=0} = 0, \\ \Phi_n^E \Big|_{x=0} = 0, & \Phi_n^E \Big|_{x=1} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где Ψ_n^E и Φ_n^E – скалярные функции, образующие биортогональный базис в подпространстве L^E ; q_n^2 – собственные числа задачи, физический смысл которых суть критические частоты для E -мод; ε_{\perp} определяется выражением (2). Решая задачу (6), как и в предыдущем случае, методом частичных областей, найдем выражения для скалярных базисных функций в подпространстве L^E :

$$\Psi_n^{E^I} = A_{3,n} \sin[q_n x] - A_{4,n} \operatorname{sh}[q_n x],$$

$$\Psi_n^{E^{II}} = B_{3,n} \varepsilon^{-1/2} \sin[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] -$$

$$- B_{4,n} \varepsilon^{-1/2} \operatorname{sh}[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)], \quad (7)$$

$$\Phi_n^{E^I} = A_{3,n} \sin[q_n x] + A_{4,n} \operatorname{sh}[q_n x],$$

$$\Phi_n^{E^{II}} = B_{3,n} \sin[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] + B_{4,n} \operatorname{sh}[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)].$$

Из (7) находим соответствующие векторные базисные функции:

$$\vec{E}_n^{E^I} = \vec{x}_0 \{ A_{3,n} \cos[q_n x] - A_{4,n} \operatorname{ch}[q_n x] \},$$

$$\vec{E}_n^{E^{II}} = \vec{x}_0 \varepsilon^{-1/4} \{ B_{3,n} \cos[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] -$$

$$- B_{4,n} \operatorname{ch}[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] \}, \quad (8)$$

$$\vec{H}_n^{E^I} = \vec{y}_0 \{ A_{3,n} \cos[q_n x] + A_{4,n} \operatorname{ch}[q_n x] \},$$

$$\vec{H}_n^{E^{II}} = \vec{y}_0 \varepsilon^{1/4} \{ B_{3,n} \cos[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] +$$

$$+ B_{4,n} \operatorname{ch}[q_n \varepsilon^{1/4} (x-1)] \}.$$

Неизвестные константы $A_{3,m}$, $A_{4,m}$, $B_{3,m}$, $B_{4,m}$ в (7), (8) определяются из четырех условий непрерывности величин Φ_n^E , $\frac{d}{dx} \Phi_n^E$, Ψ_n^E , $\varepsilon_{\perp} \frac{d}{dx} \Psi_n^E$ на границе раздела сред. Эти условия непрерывности приводят к однородной СЛАУ относительно $A_{3,m}$, $A_{4,m}$, $B_{3,m}$, $B_{4,m}$:

$$\begin{pmatrix} \sin[q_n \eta] & -\text{sh}[q_n \eta] & \varepsilon^{-1/2} \sin[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] & -\varepsilon^{-1/2} \text{sh}[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] \\ \sin[q_n \eta] & \text{sh}[q_n \eta] & \sin[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] & \text{sh}[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] \\ \cos[q_n \eta] & -\text{ch}[q_n \eta] & -\varepsilon^{3/4} \cos[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] & \varepsilon^{3/4} \text{ch}[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] \\ \cos[q_n \eta] & \text{ch}[q_n \eta] & -\varepsilon^{1/4} \cos[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] & -\varepsilon^{1/4} \text{ch}[q_n \varepsilon^{1/4} \theta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{3,n} \\ A_{4,n} \\ B_{3,n} \\ B_{4,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Собственные числа q_n задачи (6) находятся из условия существования нетривиального решения системы (9).

Модовый базис в подпространстве L^T (часть пространства решений уравнений Максвелла, содержащее T -волны) определяется из следующих граничных задач:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Psi^T}{dx^2} = 0, \\ \Psi^T|_{x=0} = 0, \quad \Psi^T|_{x=1} = \psi; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi^T}{dx^2} + \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dx} \frac{d\Phi^T}{dx} = 0, \\ \Phi^T|_{x=0} = 0, \quad \Phi^T|_{x=1} = \varphi. \end{cases}$$

Здесь ψ и φ – константы, которые находятся из условий непрерывности компонент полей на границе раздела сред и условий нормировки базисных функций. Решение задачи (10) методом частичных областей дает скалярные и соответствующие векторные базисные функции в подпространстве L^T в виде:

$$\Psi^T = \Psi^{T^1} = \Psi^{T^{\text{II}}} = x,$$

$$\Phi^{T^1} = x \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon\eta - \eta + 1}}, \quad \Phi^{T^{\text{II}}} = \frac{\varepsilon\eta - \eta + x}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon\eta - \eta + 1)}}, \quad (11)$$

$$\vec{E}^{T^1} = \vec{x}_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon\eta - \eta + 1}}, \quad \vec{E}^{T^{\text{II}}} = \vec{x}_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon\eta - \eta + 1)}},$$

$$\vec{H}^T = \vec{H}^{T^1} = \vec{H}^{T^{\text{II}}} = \vec{y}_0.$$

1.2. Система эволюционных волноводных уравнений

Получив модовый базис, рассчитаем коэффициенты системы эволюционных волноводных уравнений (СЭВУ). Из непосредственного расчета следует, что помимо матриц коэффициентов ([1], формула (58)) нулевыми оказываются также коэффициенты \mathbf{L}^{HE} , \mathbf{L}^{HT} , \mathbf{K}^{EH} , \mathbf{K}^{TH} . Это означает, что в рассматриваемой структуре нет межмодового преобразования между H -модами и E -, T -модами. Следствием этого будет расщепление СЭВУ на две более простые подсистемы, одна из которых будет описывать эволюцию во времени H -мод, а вторая – совместную эволюцию E - и T -мод. С учетом того, что в рассматриваемой структуре диэлектрическая проницаемость не зависит от продольной координаты и времени, среда, заполняющая волновод, немагнитная ($\varepsilon_{\parallel} = \mu_{\parallel} = \mu_{\perp} = 1$) и отсутствуют магнитные токи и заряды ($\hat{\rho} = 0$, $\vec{J} = 0$), СЭВУ можно получить в виде подсистемы для H -мод,

$$\begin{aligned} \sum_{m'} K_{m'm}^{HH} \partial_{\tau\tau} e_{m'}^H - \sum_{m'} L_{m'm}^{HH} \partial_{zz} e_{m'}^H + p_m^2 e_m^H = \\ = \frac{1}{S} \int_S [\partial_{\tau} (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}_m^H dS, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m'} K_{mm'}^{HH} \partial_{\tau\tau} h_{m'}^H - \sum_{m'} L_{mm'}^{HH} \partial_{zz} h_{m'}^H + p_m^2 h_m^H = \\ = \frac{1}{S} \int_S \partial_z (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \cdot \vec{E}_m^H dS, \end{aligned} \quad (13)$$

и независимой подсистемы для E - и T -мод:

$$\begin{aligned} & \sum_{n'} K_{n'n}^{EE} \partial_{\tau\tau} e_n^E - \sum_{n'} L_{n'n}^{EE} \partial_{zz} e_n^E + q_n^2 e_n^E - L_n^{TE} \partial_{zz} e^T = \\ & = \frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \partial_{\tau} (\mu_0^{1/2} \vec{J})) q_n^{-1} \Phi_n^E dS + \\ & + \frac{1}{S} \int_S [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1/2} \rho \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}_n^E dS, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & K^{TT} \partial_{\tau\tau} e^T - L^{TT} \partial_{zz} e^T + \sum_{n'} K_{n'}^{ET} \partial_{\tau\tau} e_{n'}^E = \\ & = \frac{1}{S} \int_S [\nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \varepsilon_0^{-1/2} \rho \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H}^T dS - \\ & - \frac{1}{S} \int_S [\vec{z}_0 \times \partial_{\tau} (\mu_0^{1/2} \vec{J})] \cdot \vec{H}^T dS, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n'} K_{nn'}^{EE} \partial_{\tau\tau} h_{n'}^E - \sum_{n'} L_{nn'}^{EE} \partial_{zz} h_{n'}^E + q_n^2 h_n^E + K_n^{ET} \partial_{\tau\tau} h^T = \\ & = -\frac{1}{S} \int_S (\nabla_{\perp} \cdot \partial_z (\mu_0^{1/2} \vec{J})) q_n^{-1} \Psi_n^E dS - \\ & - \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_0^{1/2} J_z \cdot \vec{E}_n^E dS, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & K^{TT} \partial_{\tau\tau} h^T - L^{TT} \partial_{zz} h^T - \sum_{n'} L_{n'}^{TE} \partial_{zz} h_{n'}^E = \\ & = \frac{1}{S} \int_S \partial_z (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \cdot \vec{E}^T dS - \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{-1} \mu_0^{1/2} J_z \cdot \vec{E}^T dS. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $e_m^H, e_n^E, e^T, h_m^H, h_n^E, h^T$ – поперечные модовые амплитуды; $K_{mm'}, \dots, L_{mm'}, \dots$ – постоянные матрицы, которые вычисляются по формулам (55) из [1]; $\nabla_{\perp} = \vec{x}_0 \partial_x, \vec{x}_0$ – орт оси x ; \vec{J} и J_z – соответственно поперечная и продольная составляющие плотности электрического тока; ρ – плотность электрического заряда; $\tau = ct, c$ – скорость света в вакууме. Под интегрированием по поперечному сечению волновода следует понимать интегрирование по поперечной переменной x .

Необходимо отметить, что ввиду переопределенности исходной СЭВУ ([1], формулы (42)-(53)), уравнения для исследуемой структуры также могут быть записаны в другом виде, отличном от уравнений (12)-(17). Например, вместо независимых уравнений (12) и (13) для амплитуд H -мод e_m^H и h_m^H можно получить систему связанных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{m'} K_{m'm}^{HH} \partial_{\tau\tau} e_{m'}^H - \sum_{m'} L_{m'm}^{HH} \partial_{zz} e_{m'}^H + p_m^2 e_m^H = \\ & = -\partial_{\tau} \frac{1}{S} \int_S [\vec{z}_0 \times \mu_0^{1/2} \vec{J}] \cdot \vec{H}_m^H dS, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\partial_{\tau} h_m^H = -\sum_{m'} L_{m'm}^{HH} \partial_z e_{m'}^H.$$

Это справедливо и по отношению к остальным уравнениям (14)-(17). Эволюционные уравнения для вычисления коэффициентов в разложении продольных компонент поля также упрощаются. Для расчета продольных модовых амплитуд e_n^z, h_m^z можно воспользоваться, например, уравнениями:

$$\partial_{\tau} e_n^z = -\sum_{n'} L_{nn'}^{EE} h_{n'}^E - \frac{1}{S} \int_S \mu_0^{1/2} J_z q_n^{-1} \Psi_n^E dS, \quad (19)$$

$$\partial_{\tau} h_m^z = -\sum_{m'} L_{m'm}^{HH} e_{m'}^H.$$

Для возбуждения волны в рассматриваемом волноводе зададим токи в виде:

$$\vec{J} = \vec{x}_0 \delta(z) f(t), \quad (20)$$

где $\delta(z)$ – дельта функция Дирака, $f(t)$ – произвольная функция времени, которая далее будет определена в численном примере. Продольная компонента стороннего тока и объемная плотность сторонних зарядов равны нулю, $J_z = 0$ и $\rho = 0$. При возбуждении структуры током (20) возникает только T -волна, которая

за счет преобразования на поперечной неоднородности диэлектрической проницаемости возбуждает также E -волны. H -волны при таком возбуждении не возникают. Подставляя (20) в уравнения (14)-(17) и (19) с учетом свойств матриц коэффициентов ([1], формулы (59)-(60)) получим для рассматриваемой задачи СЭВУ в матричном виде:

$$\partial_{\tau\tau} \mathbf{e}^E = \mathbf{L}^{EE} \mathbf{L}^{EE'} \partial_{zz} \mathbf{e}^E - \mathbf{L}^{EE} \mathbf{q}^2 \mathbf{e}^E + \mathbf{L}^{EE} \mathbf{L}^{TE'} \partial_{zz} \mathbf{e}^T, \quad (21)$$

$$\partial_{\tau\tau} \mathbf{e}^T = L^{TT} \left[L^{TT} - \mathbf{K}^{ET'} \mathbf{L}^{EE} \mathbf{L}^{TE'} \right] \partial_{zz} \mathbf{e}^T - L^{TT} \mathbf{K}^{ET'} \mathbf{L}^{EE} \left[\mathbf{L}^{EE'} \partial_{zz} \mathbf{e}^E - \mathbf{q}^2 \mathbf{e}^E \right] - L^{TT} J^H,$$

$$\partial_{\tau\tau} \mathbf{h}^E = \mathbf{L}^{EE'} \left[\mathbf{L}^{EE} - \mathbf{K}^{ET} L^{TT} \mathbf{L}^{TE} \right] \partial_{zz} \mathbf{h}^E - \mathbf{L}^{EE'} \mathbf{q}^2 \mathbf{h}^E - \mathbf{L}^{EE'} \mathbf{K}^{ET} L^{TT} \left[L^{TT} \partial_{zz} h^T + J^E \right], \quad (22)$$

$$\partial_{\tau\tau} h^T = L^{TT} L^{TT} \partial_{zz} h^T + L^{TT} \mathbf{L}^{TE} \partial_{zz} \mathbf{h}^E + L^{TT} J^E,$$

$$\partial_{\tau} \mathbf{e}^z = -\mathbf{L}^{EE} \mathbf{h}^E, \quad (23)$$

где $\mathbf{e}^E = \text{col}(e_1^E, e_2^E, \dots)$, $\mathbf{h}^E = \text{col}(h_1^E, h_2^E, \dots)$, $e^T = e_1^T$, $h^T = h_1^T$, $\mathbf{e}^z = \text{col}(e_1^z, e_2^z, \dots)$ – неизвестные модовые амплитуды; \mathbf{q}^2 – диагональная матрица собственных чисел задачи (6); $J^H(z, t) = \frac{1}{S} \int_S \left[\vec{z}_0 \times \partial_{\tau} (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \right] \cdot \vec{H}^T dS$, $J^E(z, t) = \frac{1}{S} \int_S \partial_z (\mu_0^{1/2} \vec{J}) \cdot \vec{E}^T dS$ – заданные функции источников.

1.3. Анализ распространения импульсной T -волны

СЭВУ (21)-(23) представлена в явном виде относительно производных по времени, что позволяет легко получить для нее явную конечно-разностную схему [4]. В методе конечных разностей искомые функции двух переменных $u(z, \tau)$ (под u понимается любая из неизвестных модовых амплитуд e_n^E , e^T , h_n^E , h^T , e_n^z) записывают на равномерной сетке

$u(z, \tau) \rightarrow u_i^n = u(i\Delta z, n\Delta\tau)$; $i, n \in \mathbb{Z}$. Производные от искомой функции приближенно определяются на той же сетке в виде конечных разностей: $\partial_{zz} u_i^n \approx \Delta z^{-2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$, $\partial_{\tau\tau} u_i^n \approx 0.5\Delta\tau^{-1} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})$, $\partial_{\tau\tau} u_i^n \approx \Delta\tau^{-2} \times (u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1})$. Применение описанного подхода к СЭВУ (21)-(23) позволяет получить явную конечно-разностную схему для нахождения искомых функций в узлах сетки. В процессе решения бесконечная система (21)-(23) редуцируется, при этом учитываются взаимодействия только нескольких первых мод. Это приводит к тому, что получаемое решение отличается от истинного решения на некоторую величину, которая, как будет показано ниже, быстро убывает с увеличением количества учитываемых мод, что говорит о хорошей сходимости введенного модового разложения искомых полей. Чтобы проиллюстрировать эту сходимость, рассчитаем для различного количества учитываемых мод распространение импульсной волны в рассматриваемой структуре при возбуждении током (20) с временной зависимостью в виде лягеровского импульса [5]:

$$f(t) = (t/T)^2 (1 - t/3T) \exp(-t/T), \quad (24)$$

где T – параметр распределения.

На рис. 2 показаны графики временной функции (24) при двух значениях параметра T .

Далее в численных расчетах для диэлектрической проницаемости принималось значение $\varepsilon = 3$, для толщины слоя – $\theta = 0.25$; временная форма импульса возбуждения (24) использовалась с параметром $T = 1$.

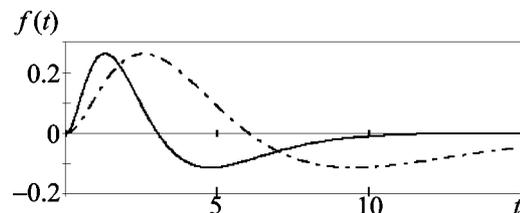


Рис. 2. Зависимости возбуждающих токов от времени: — — $T = 1$; - - - $T = 2$

Эталонное решение задачи, используемое для проверки результатов, было получено с помощью метода конечных разностей во временной области (FDTD) по схеме Yee [4]. Шаг сетки принимался равным $\Delta z = \Delta x = 1/40$, шаг по времени – $\Delta \tau = \Delta z/2$. В ММБ использовался такой же шаг по z и τ .

На рис. 3 показано распределение поперечной компоненты напряженности электрического поля в поперечном сечении волновода в зависимости от времени вблизи и вдали от источника. Видно, что вблизи источника форма импульса подобна форме возбуждающего сигнала. По мере удаления от источника форма импульса меняется из-за взаимодействия с диспергирующими E -волнами.

Результаты расчетов временной зависимости поперечной компоненты напряженности электрического поля (E_x) в точках x_b и x_d сечения волновода z_0 , полученные с помощью FDTD и ММБ с учетом различного количества первых мод, сравниваются на рис. 4.

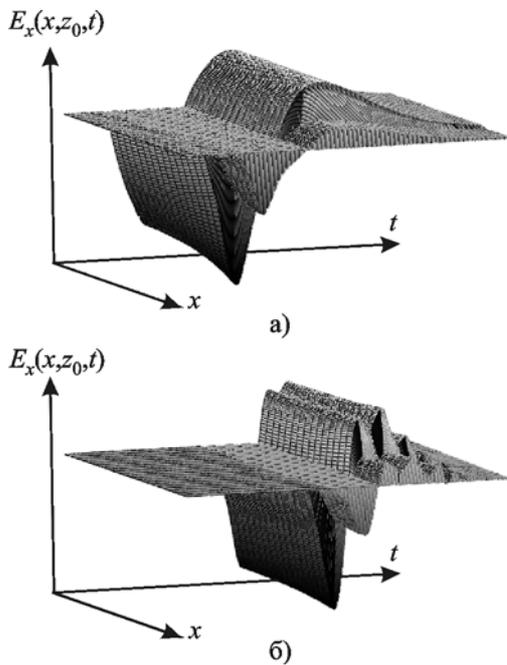


Рис. 3. Распределение поперечной компоненты напряженности электрического поля в поперечном сечении волновода $z = z_0$ в зависимости от времени: а) вблизи источника, $z_0 = 1.5d$; б) вдали от источника, $z_0 = 10d$

Из приведенных графиков видно, что уже в трехмодовом приближении (учитывается T -мода и первые две E -моды) результаты расчета поля совпадают с графической точностью. Более детальную картину сходимости решения ММБ с увеличением количества учитываемых мод можно увидеть на рис. 5. Здесь приводится временная зависимость модуля разности поперечных компонент напряженности электрического поля, полученных с учетом $n+1$ и n мод. Видно, что моды, начиная с пятой, вносят существенно меньший вклад в решение, чем первые четыре. Учет последующих мод дает экспоненциально малые поправки. Такая быстрая сходимость обусловлена тем, что преобразование возбуждаемой моды в нераспространяющиеся очень мало, а в спектральной полосе, занимаемой импульсом возбуждения, распространяющимися являются только первые три–четыре моды (спектр импульса обратно пропорционален кубу частоты).

Сравнивая эффективности ММБ и FDTD применительно к задаче распространения импульсных сигналов в поперечно неоднородных волноводах, следует отметить, что с помощью ММБ четырехмерная задача сводится к двум двумерным задачам, одна из которых (задача распространения) решается с использованием метода конечных разностей (аналогично FDTD), но требует гораздо меньших вычислительных затрат. Если при этом, допустим, используется одинаковая сетка по z и t , то в FDTD обычно требуется порядка $N_x = 40$ узлов в поперечном сечении. В рассматриваемом случае в ММБ потребовалось учесть только $N_m = 4$ моды. Для обновления полей во всем объеме за один шаг по времени в FDTD требуется выполнить порядка $3 \cdot 3N_x N_z$ умножений, а в ММБ – $2N_m^2 N_z$. При переходе к трехмерному случаю в FDTD потребуется уже $6 \cdot 3N_x N_y N_z$ умножений. Количество мод, которые необходимо учитывать, определяется шириной спектра импульса возбуждения (необходимо учитывать все распространяющиеся моды в этом диапазоне плюс еще одну–две нераспространяющиеся). Обычно учитываемое количество мод гораздо меньше количества точек дискрети-

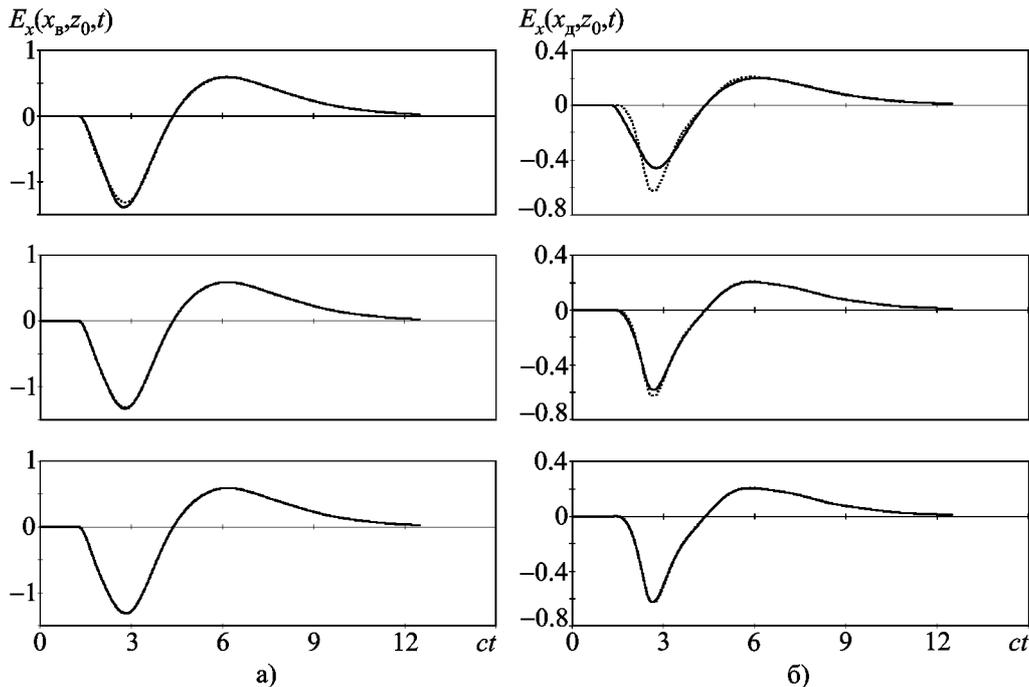


Рис. 4. Зависимость от времени поперечной составляющей напряженности электрического поля на расстоянии $z_0 = 1.5d$ от источника, рассчитанная с помощью ММБ (сплошная линия, верхние рисунки – одномодовое приближение, средние – двухмодовое, нижние – трехмодовое) и FDTD (пунктир): а) в середине области I (воздух) $x_b = 0.375d$; б) в середине области II (диэлектрик) $x_d = 0.9d$

зации поперечного сечения, которое требуется для FDTD моделирования. Это различие становится особенно существенным для структур с высоким контрастом диэлектрической проницаемости (так как шаг по координате Δx должен определяться для среды с максимальной ϵ) и для трехмерных задач.

Необходимо сказать несколько слов о выборе сетки по z и t в ММБ и FDTD. В FDTD обычно шаг по координате Δz выбирают исходя из того, что на минимальной длине волны должно быть хотя бы 20 точек сетки: $\Delta z \leq \min(\lambda/20) = c/(20f_{\max}\epsilon_{\max})$. Аналогично выбираются Δx и Δy , но при дополнительном условии – должна нормально дискретизироваться поперечная структура $\epsilon(x, y)$. Далее, Δt выбирается из условия стабильности [4], которое требует, чтобы $c\Delta t \leq 1/\sqrt{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2} + \Delta z^{-2}}$, т. е. чем меньше Δx , Δy , Δz , тем меньший шаг по времени необходимо взять, что потребует большего времени счета при моделировании. Критерий, которым руководствуются в ММБ

при выборе Δz , заключается в том, что для максимальной учитываемой моды частота отсечки дискретизируется с достаточным шагом (20 точек). Это приводит к условию $\Delta z \leq 2\pi / (20\epsilon_{\max}^{1/4} q_{\max})$ (см. (5), (9)). С другой стороны, шаг по времени должен выбираться из условия стабильности, которое в данном случае точно не выводилось, но в качестве достаточной оценки можно считать $c\Delta t < \Delta z/2$. Кроме того, для ММБ вычислительные затраты для неявной схемы будут такими же, как и для описанной явной схемы, но при этом при использовании неявной схемы можно добиться безусловной стабильности, что позволяет выбирать Δt независимо от Δz и использовать больший шаг для уменьшения общего времени моделирования.

В ММБ, кроме задачи распространения, требуется также решать граничную задачу для нахождения собственных мод. В некоторых случаях эта задача допускает аналитическое решение с помощью метода частич-

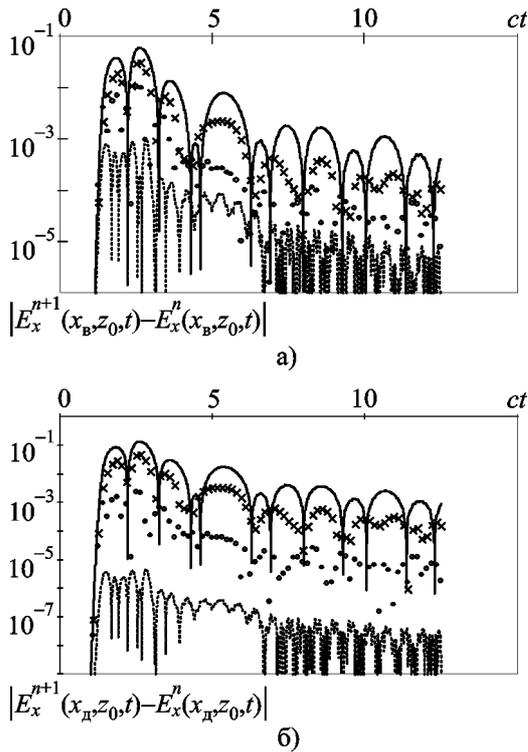


Рис. 5. Зависимость от времени модуля разности поперечных составляющих напряженности электрического поля, рассчитанных с помощью ММБ с учетом $n+1$ и n мод (— $n=0$; $\times\times\times$ $n=1$; $\circ\circ\circ$ $n=2$; $\dots\dots$ $n=3$) на расстоянии $z_0 = 1.5d$ от источника: а) в середине области I (воздух) $x_B = 0.375d$; б) в середине области II (диэлектрик) $x_D = 0.9d$

ных областей. В общем случае для ее решения требуется использовать какой-либо универсальный численный метод (метод моментов, метод конечных элементов или метод линий). Но всегда эта задача решается независимо от задачи распространения и представляет отдельную ценность с точки зрения анализа поведения полей (мод) в волноводе. Ее решение может быть использовано при построении дисперсионных кривых для волновода в частотной области, как будет показано в следующем разделе.

В случае однородного волновода СЭВУ распадается на независимые уравнения Клейна–Гордона для каждой моды, которые имеют аналитическое решение в виде свертки временной

функции возбуждения с транспортным оператором, выражающимся через функции Бесселя [5].

2. Быстрое получение дисперсионных соотношений для поперечно неоднородных волноводов с помощью ММБ на примере плоскопараллельного волновода с диэлектрическим слоем

ММБ можно использовать для быстрого получения дисперсионных соотношений (ДС) для поперечно неоднородных волноводов в частотной области. Предполагая в СЭВУ гармоническую зависимость модовых амплитуд в виде $e^{i(\beta z - k t)}$ (β – продольная постоянная распространения, k – волновое число), приходим к однородной СЛАУ, в которой дифференцирование по z и t заменено умножением на $i\beta$ и $-ik$. При этом диэлектрическая и магнитная проницаемости не должны зависеть от продольной координаты и времени. ДС представляют собой условие существования нетривиального решения получившейся СЛАУ.

Для H -волн из уравнения (13) получаем ДС в виде

$$\det(k^2 \mathbf{K}^{HH} - \beta^2 \mathbf{L}^{HH} - \mathbf{p}^2) = 0. \quad (25)$$

Из уравнений (16) и (17) получаем ДС для E - и T -волн:

$$\det \begin{pmatrix} k^2 \mathbf{K}^{EE} - \beta^2 \mathbf{L}^{EE} - \mathbf{q}^2 & k^2 \mathbf{K}^{ET} \\ -\beta^2 \mathbf{L}^{TE} & k^2 \mathbf{K}^{TT} - \beta^2 \mathbf{L}^{TT} \end{pmatrix} = 0. \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) определяют зависимость $\beta = f(k)$ для разных типов волн в виде полиномов, что упрощает анализ дисперсионных зависимостей. В эти уравнения входят бесконечные матрицы, которые необходимо редуцировать к конечным, ограничившись некото-

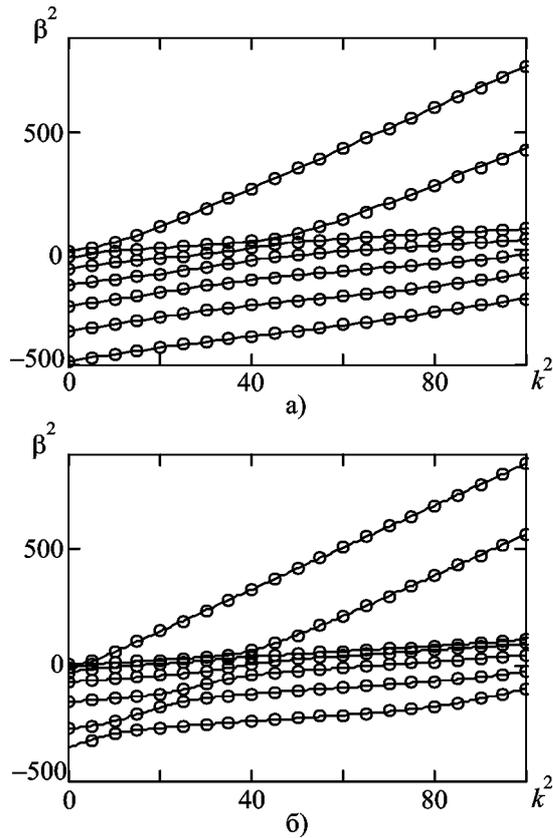


Рис. 6. Дисперсионные кривые для H -волн (а) и для E - и T -волн (б): $\circ\circ\circ$ – ММБ; — – метод частичных областей (LE - , LM -волны) в частотной области

рым числом первых мод. На рис. 6, а, б представлены ДС, рассчитанные двумя способами: с помощью ММБ по формулам (25) и (26) и непосредственно в частотной области для LE - и LM -волн. При расчете ДС с помощью ММБ было учтено десять первых H -, десять первых E -мод и единственная T -мода. ДС были вычислены для слоя с параметрами $\epsilon = 9$, $\theta = 0.25$.

На рис. 6, а представлены ДС для первых семи H -волн. На рис. 6, б – ДС для единственной квази- T -волны (верхняя кривая) и первых шести E -волн.

Совпадение результатов ММБ с результатами метода LE - и LM -волн подтверждает корректность полученных в рамках ММБ формул.

В данном случае дисперсионные соотношения в частотной области получены с использованием аналитического метода частич-

ных областей (LE - и LM -волны). В общем случае для произвольной поперечной неоднородности приходится решать сложную граничную задачу поиска собственных значений, в которой частота (волновое число k) является параметром, т. е. для каждой частоты получаем новую граничную задачу. В отличие от такого подхода в рамках ММБ граничная задача решается только один раз для получения частотно-независимых мод. В дальнейшем моды частотной области выражаются в виде разложения по найденным частотно-независимым модам ММБ. Коэффициенты этого разложения на каждой конкретной частоте $k = \omega/c$ можно получить как собственные векторы матриц (25), (26) для нулевого собственного числа при $\beta(k)$ равном соответствующему корню ДС (25), (26).

Кроме того, ММБ позволяет естественным образом проводить классификацию волноводных мод. При добавлении в дисперсионное уравнение (25) очередной строки появляется новая дисперсионная кривая на рис. 6, а и незначительно уточняются предыдущие кривые. Таким образом, появляющейся дисперсионной кривой можно поставить в соответствие индекс частотно-независимой моды, которая в свою очередь соответствует добавленной строке матрицы (25). В то же время в частотной области для идентификации мод приходится ставить их в соответствие модам пустого волновода, для чего требуется предельный переход от частично заполненного к пустому волноводу.

Предложенная классификация дисперсионных кривых по соответствию частотно-независимым модам поперечно неоднородного волновода представляется более естественной и простой, чем их сопоставление модам пустого волновода.

3. Заключение

В первой части [1] представленной работы была изложена общая теория новой модификация ММБ во временной области для анализа волноводов с поперечно неоднородным многосвязным сечением.

Во второй части предложенная модификация ММБ была проверена на примере многосвязной поперечно неоднородной линии –

плоскопараллельном волноводе с диэлектрическим слоем. С помощью ММБ было проанализировано распространение импульсной *ТЕМ*-волны в таком волноводе. Результаты, полученные с помощью предложенной модификации ММБ, совпали с результатами вычисленными с помощью FDTD. Продемонстрирована быстрая сходимость введенного разложения по частотно-независимым модам. Показаны преимущества применения ММБ для рассматриваемого класса задач по сравнению с FDTD, проанализированы и сравнены вычислительные затраты при использовании обоих методов.

Продемонстрировано применение ММБ для быстрого получения ДС для поперечно неоднородных волноводов. При этом приближение к ДС получено в виде полиномов относительно k^2 и β^2 (формулы (25) и (26)), что облегчает анализ ДС. Рассчитанные предложенным методом ДС для плоскопараллельного волновода с диэлектрическим слоем в широком диапазоне частот совпали с результатами, полученными в частотной области методом частичных областей (*LE*- и *LM*-волны). Такой подход для волноводов со сложным поперечно неоднородным заполнением является более эффективным по сравнению с традиционным рассмотрением в частотной области, так как требует решать граничную задачу только один раз для нахождения частотно-независимых мод, а также позволяет ввести естественную классификацию дисперсионных кривых.

В дальнейшем предполагается построить аналогичную схему ММБ для анализа регулярных поперечно неоднородных конечных линий, которая может быть применена для расчета импульсных антенн с топологией *ТЕМ*-рупора.

Литература

1. Бутрым А. Ю., Кочетов Б. А. Метод модового базиса во временной области для волновода с поперечно неоднородным многосвязным сечением. 1. Общая теория метода // Радиофизика и радиоастрономия. – 2009. – Т. 14. №2. – С. 162-173.
2. Кочетов Б. А., Бутрым А. Ю. Верификация метода модового базиса для многосвязных поперечно-

неоднородных волноводов // Труды 3-й международной молодежной научно-технической конференции студентов, аспирантов и ученых “Современные проблемы радиотехники и телекоммуникаций” (РТ-2007). – Севастополь (Украина). – 2007. – С. 301.

3. Kochetov B. A., Butrym A. Yu. Calculation of pulse wave propagation in a quasi-TEM line using mode expansion in time domain // Proc. 4-th International conference on ultrawideband and ultrashort impulse signals (UWBUSIS'08). – Sevastopol (Ukraine). – P. 222-224.
4. Taflove A., Hagness S. C. Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method 2nd Ed. – Boston, London: Artech House, 2000. – 852 p.
5. Джин Юн, Кочетов Б. А., Бутрым А. Ю. Конечно-разностная схема во временной области и аналитическое решение уравнения Клейна-Гордона // Вестник Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, № 712. Серия Радиофизика и электроника. – 2006. – Вып. 10. – С. 91-94.

Метод модового базису у часовій області для хвилевода з поперечно неоднорідним багатозв'язним перерізом. 2. Приклад числової реалізації метода

О. Ю. Бутрым, Б. А. Кочетов

Розглядається як приклад поширення імпульсного сигналу у плоскопараллельному хвилеводі з подовжнім діелектричним шаром, що є найпростішою поперечно неоднорідною *ТЕМ*-лінією. Результати, отримані за розробленою модифікацією методу модового базиса, співпали з розв'язком, знайденим методом кінцевих різниць у часовій області. Продемонстровано швидку збіжність запропонованого модового розкладу. Розглянутий метод може бути також застосованим у аналізі дисперсійних характеристик поперечно неоднорідного хвилеводу у частотній області. Він надає високу обчислювальну ефективність у отриманні дисперсійних характеристик у широкій смузі частот та дозволяє класифікувати хвилеводні моди у частотній області шляхом їх співставлення з введеними частотно-незалежними модами у часовій області.

Time Domain Mode Basis Method for a Waveguide with Transverse Inhomogeneous Multi-Connected Cross-Section. 2. Example of Numerical Implementation of the Method

A. Yu. Butrym and B. A. Kochetov

As an example, the impulse signal propagation in a parallel-plate waveguide with a longitudinal dielectric layer is considered. Such a waveguide is the simplest transverse inhomogeneous TEM-line. The results obtained with the mode basis method proposed coincide with the solution by the finite-difference time-domain method. Shown is fast convergence with the mode expansion truncation. The method considered can also be very effective in the analysis of transverse inhomogeneous waveguide dispersion curves in the frequency domain. It allows high computational efficiency in obtaining dispersion characteristics within a wide frequency range and also classification of guided-wave modes in the frequency range by their comparison with the introduced frequency-independent modes in the time domain.