

## Чои–вильямс-анализ нелинейных волновых процессов

О. В. Вишневский, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор<sup>1</sup>

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61166, Украина  
E-mail: Oleg-Lazorenko@yandex.ru*

<sup>1</sup>*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина  
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 21 октября 2008 г.*

Проведен анализ ряда нелинейных волновых процессов при помощи преобразования Чои–Вильямса, относящегося к классу преобразований Коэна. Изучены модели ударных волн, классического солитона, солитона огибающей, решение уравнения Бюргерса–Кротевега–де Вриза – “решение кентавр”, а также модели кноидальной и пилообразной волн. Сравняются результаты чои–вильямс-, вигнер- и фурье-анализа. Показано, что указанные преобразования хорошо дополняют друг друга и при совместном использовании позволяют получить большее количество информации об исследуемом сигнале или процессе.

### Введение

Нелинейные волновые процессы играют важную роль во многих областях науки, техники и в технологиях. Как правило, они характеризуются достаточно большим энергосодержанием (энерговыведением) (см., например, [1-4]). Исследование таких процессов линейными методами анализа, в частности, при помощи непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) и традиционного динамического (оконного) преобразования Фурье (ДПФ) проведено в работе [5].

Несомненный интерес представляет использование интегральных преобразований класса Коэна [6]. Результаты применения преобразования Вигнера (ПВ) как типичного представителя класса Коэна для анализа нелинейных волновых процессов подробно изложены в работе [7]. ПВ, обладая хорошим время-частотным разрешением, к сожалению, имеет определенный недостаток – возникновение интерференции при анализе многокомпонентных сигналов вследствие нелинейности самого

преобразования. Это затрудняет интерпретацию полученных результатов.

Уменьшить влияние интерференции можно при помощи существующих методов усреднения ПВ. Один из них привел к появлению преобразования Чои–Вильямса (ПЧВ) [8], которое позволяет исследователю находить компромисс между допустимой в условиях рассматриваемой задачи величиной интерференции и необходимым время-частотным разрешением.

Возможность совместного использования как линейных, так и нелинейных интегральных преобразований для комплексного анализа сигналов различной природы продемонстрирована в работе [9], где показано, что недостатки одних преобразований компенсируются достоинствами других.

Каждое новое интегральное преобразование, например ПЧВ, с помощью которого осуществляется спектральный анализ, позволяет выявить новые детали исследуемого процесса, в частности, нелинейных волн. Этим объясняется актуальность работы.

Целью работы является изучение возможности и целесообразности применения ПЧВ для анализа нелинейных волновых процессов, а также выявление особенностей такого анализа.

### 1. Основные понятия и соотношения

Предложенное в 1989 г. Х. Чои и В. Вильямсом ПЧВ для сигнала  $s(t)$  имеет вид [8]:

$$P_{CW}f(\tau, \omega) = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) s\left(u + \frac{t}{2}\right) s^*\left(u - \frac{t}{2}\right) du dt,$$

где  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  – функция спектральной плотности (ФСП) ПЧВ,  $\sigma$  – положительный коэффициент, позволяющий управлять уровнем интерференционных членов. Интерференция ослабляется с уменьшением  $\sigma$ . При  $\sigma \rightarrow \infty$  ПЧВ переходит в ПВ.

Основные свойства ПЧВ продемонстрированы на примере анализа простейших модельных сигналов в работе [10].

Результаты чои–вильямс-анализа нелинейных волновых процессов будем сравнивать с результатами ПВ и спектрограммами Фурье (СФ), ФСП которых определяются соответственно соотношениями [6, 7, 11, 12]:

$$P_V f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\tau + \frac{t}{2}\right) s^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt,$$

$$P_S f(\tau, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) w(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt \right|^2,$$

где  $w(t - \tau)$  – оконная функция ДПФ. В работе для вычисления ФСП СФ всех моделей сигналов использовалось окно Хемминга шириной  $N/4$ , где  $N$  – количество отсчетов дискретного вектора анализируемого сигнала.

Кроме самих ФСП ПЧВ, ФСП ПВ и ФСП СФ, будем использовать также их энергограм-

мы, которые задаются соответственно соотношениями [9]:

$$E_{CW}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{CW}f(\tau, \omega) d\tau,$$

$$E_V f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_V f(\tau, \omega) d\tau,$$

$$E_S f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_S f(\tau, \omega) d\tau.$$

Энергограммы отражают распределение энергии сигнала (процесса) по различным частотам  $\omega$ . Интеграл от каждой энергограммы по всем частотам  $\omega \in ]-\infty, +\infty[$  равен энергии сигнала.

В качестве моделей нелинейных сигналов будем использовать следующие модели.

1. *Модель ударной волны (УВ)*. УВ представляет собой распространяющийся скачок какого-либо параметра волны или среды (плотности, давления и т. п.). Такая волна, в частности, описывается решением уравнения Бюргера (см., например, [1-4])

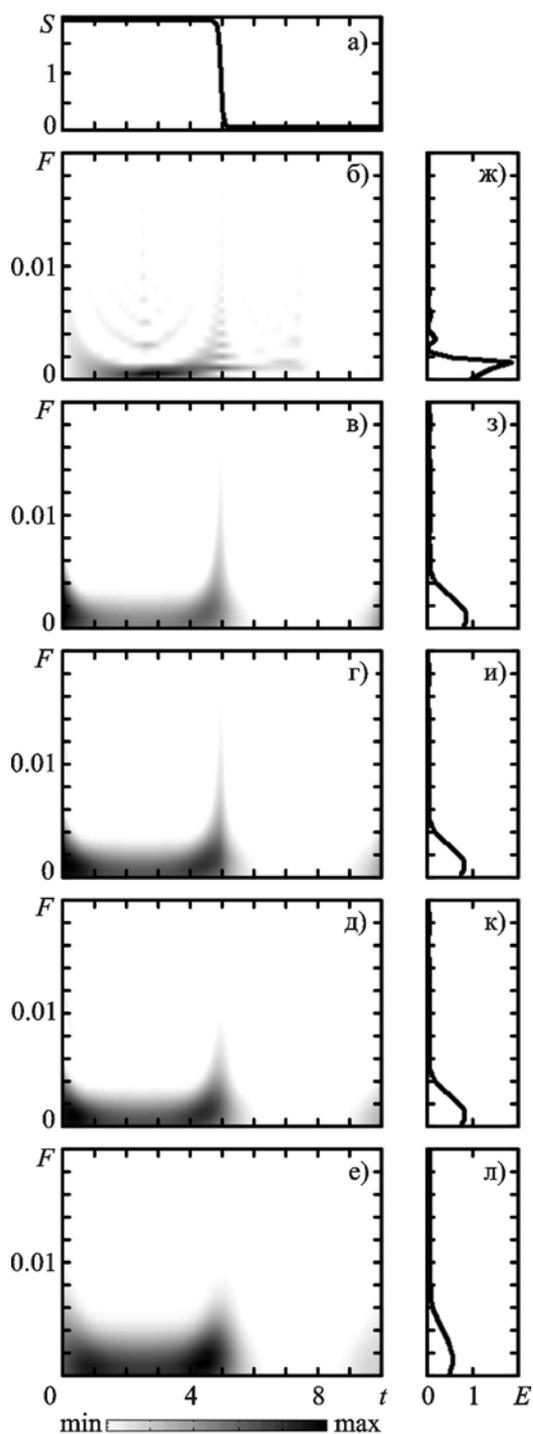
$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

которое имеет вид:

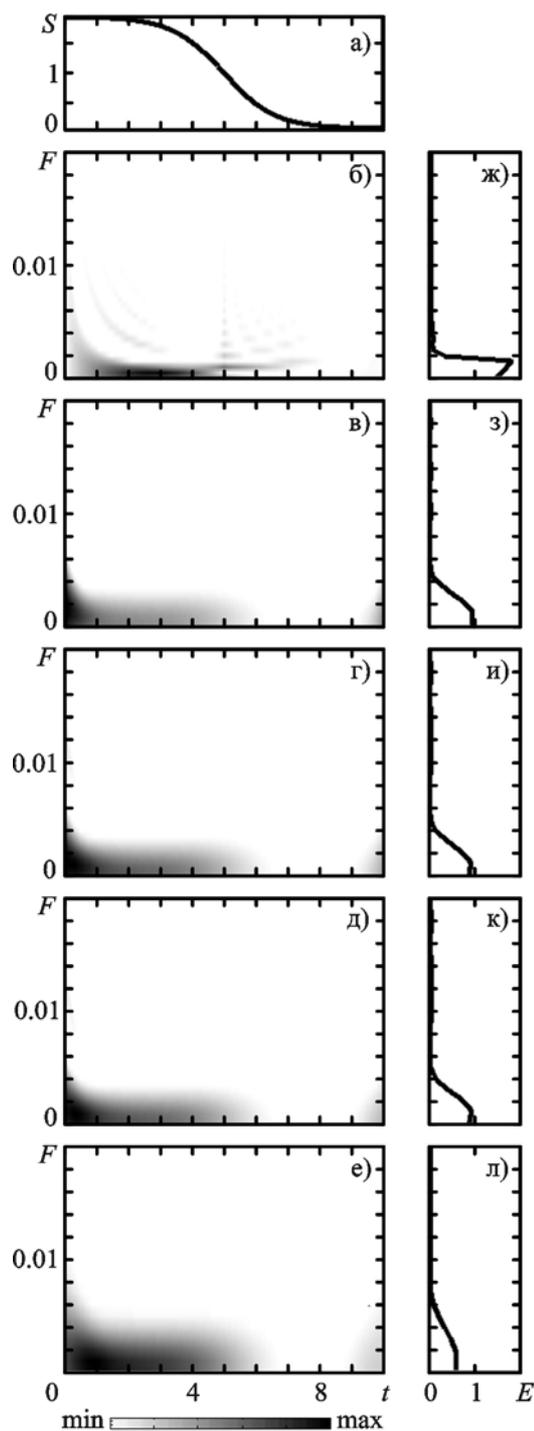
$$v(\xi) = \frac{v_1 + v_2 \exp(\xi/\xi_0)}{1 + \exp(\xi/\xi_0)},$$

где  $\xi = x - ut$  – переменная бегущей волны;  $\xi_0 = 2\gamma/(v_1 - v_2)$  – ширина фронта ударной волны;  $\gamma > 0$  – параметр диссипации;  $v(-\infty) = v_1$ ,  $v(+\infty) = v_2$ . Вид УВ при различных значениях ширины фронта УВ представлен на рис. 1, а и рис. 2, а.

2. *Модель солитона*. В случае недиссипативной диспергирующей среды солитон описывается уравнением Кретевага–де Вриза (КдВ) (см., например, [1-4]):



**Рис. 1.** Анализ модели УВ ( $\xi_0 = 0.004$ ): а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), з) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ



**Рис. 2.** Анализ модели УВ ( $\xi_0 = 0.08$ ): а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), з) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0,$$

непериодическое решение которого (рис. 3, а), имеет вид:

$$v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}^2(\xi/\xi_0)},$$

где  $v_m = 3u$ ;  $\xi_0 = 2\sqrt{\beta/u}$ ;  $\beta > 0$ .

3. УВ в диссипативной диспергирующей среде. В этом случае УВ описывается уравнением Бюргерса–Кротевага–де Вриза (БКдВ) (см., например, [1-4]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

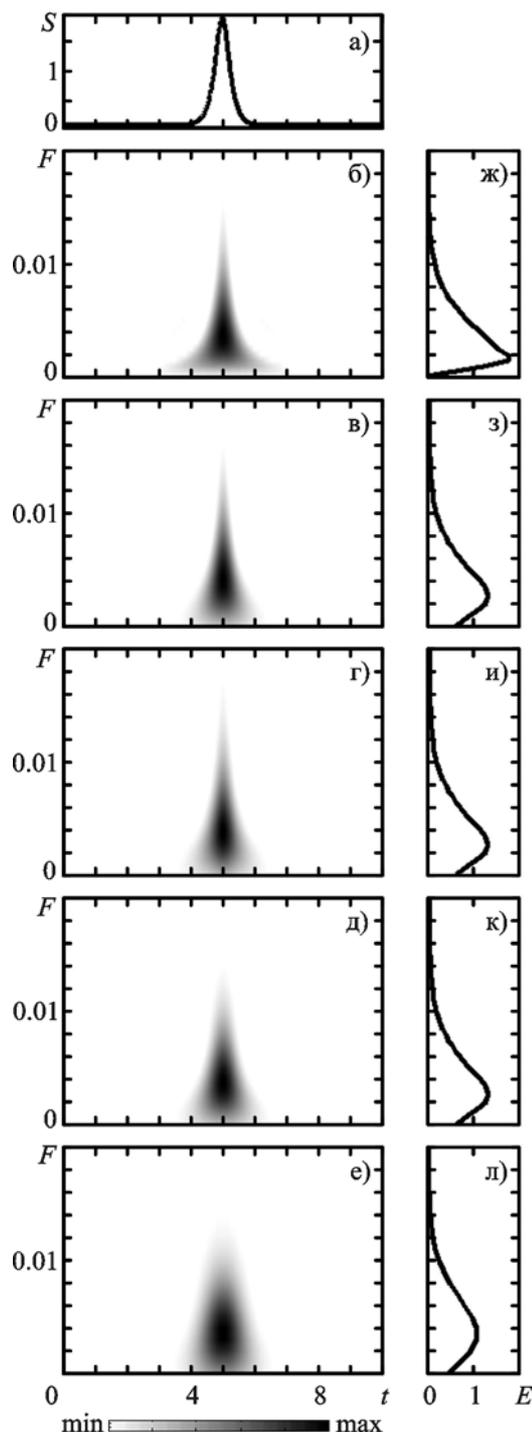
Получить решение этого уравнения в виде аналитического выражения, к сожалению, не удастся. Вид решения уравнения БКдВ при условиях:  $v(-\infty) = v_1$ ,  $v(+\infty) = v'(\pm\infty) = v''(\pm\infty) = 0$ , показан на рис. 4, а. Такое решение в [4] названо “решение-кентавр”.

4. Солитон огибающей. В этом случае солитоном является не сам процесс, а его огибающая (рис. 5, а, рис. 6, а). На рис. 6, а представлена модель девятого вала, встречающегося на море. Наибольший горб – девятый по счету, а справа и слева от него расположено по восемь горбов с постепенно убывающей амплитудой [4]. Солитон огибающей описывается нелинейным уравнением Шредингера:

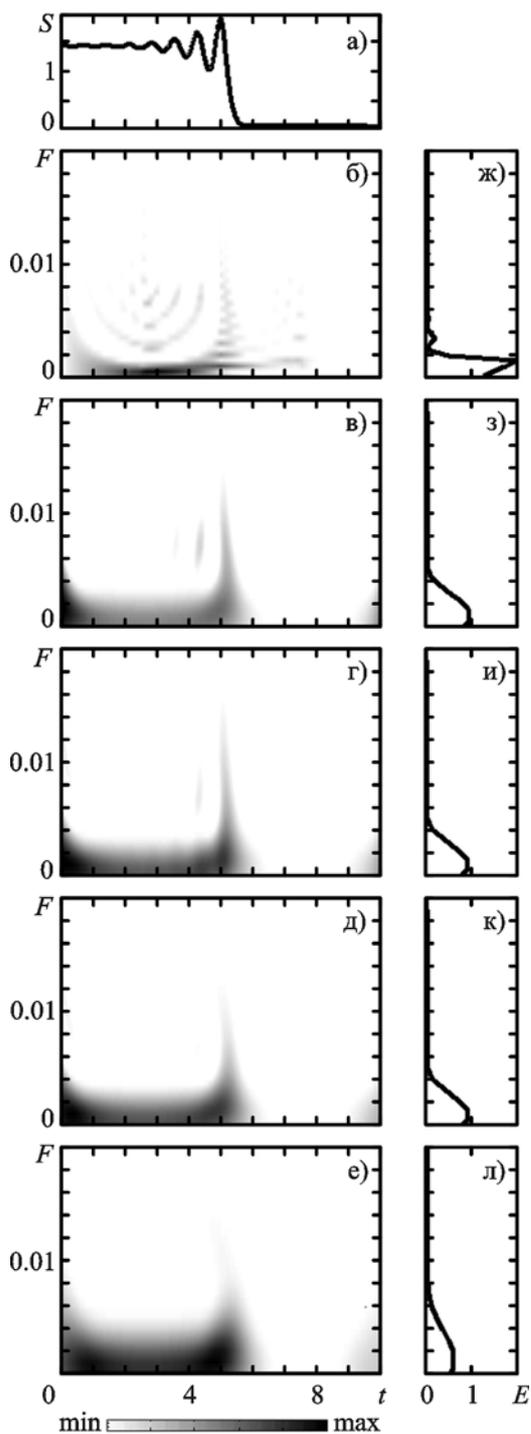
$$i \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \beta v |v|^2 = 0,$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\beta > 0$ . Решением этого уравнения является комплексная функция вида:

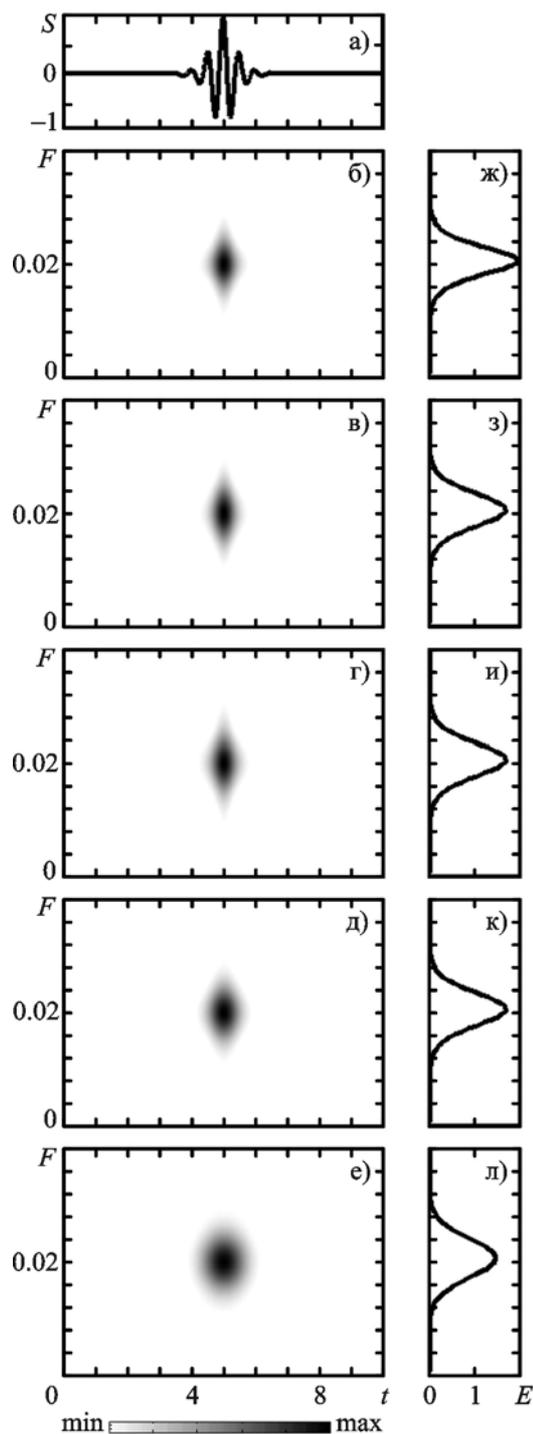
$$v(t, x) = \frac{v_m}{\text{ch}\left(\frac{b}{2}(x - u_1 t)\right)} \exp\left(i \frac{u_1}{2}(x - u_2 t)\right),$$



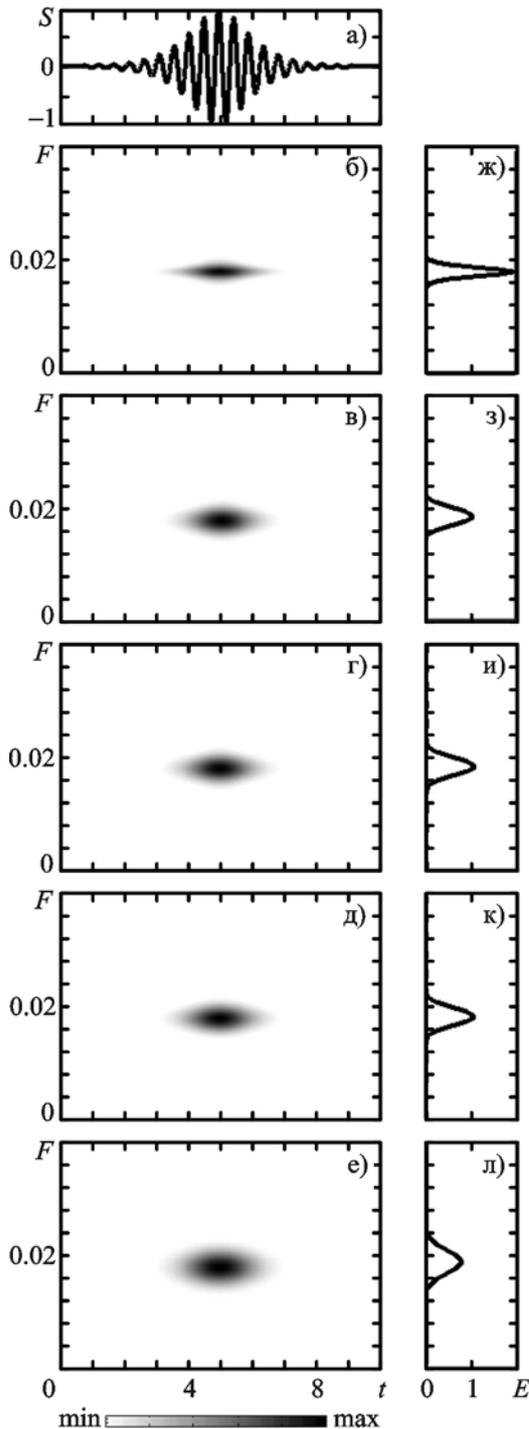
**Рис. 3.** Анализ солитона: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), з) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ



**Рис. 4.** Анализ “решения-кентавра”: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), г) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ



**Рис. 5.** Анализ солитона огибающей: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), г) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ



**Рис. 6.** Анализ солитона огибающей (модель девятого вала): а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), з) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ

где  $v_m = b/\sqrt{2\beta}$ ;  $b = (u_1(u_1 - 2u_2))^{1/2}$ .

5. *Кноидальная волна.* Эта волна описывается периодическим, но не гармоническим решением уравнения КдВ. Уравнение при малых амплитудах имеет практически гармоническое решение, а при увеличении амплитуды его решения представляются в виде специальной эллиптической функции Якоби (кноиды)  $\text{cn}(x)$  [13]:

$$v(\xi) = v_m \text{cn}^2(\xi/\xi_0),$$

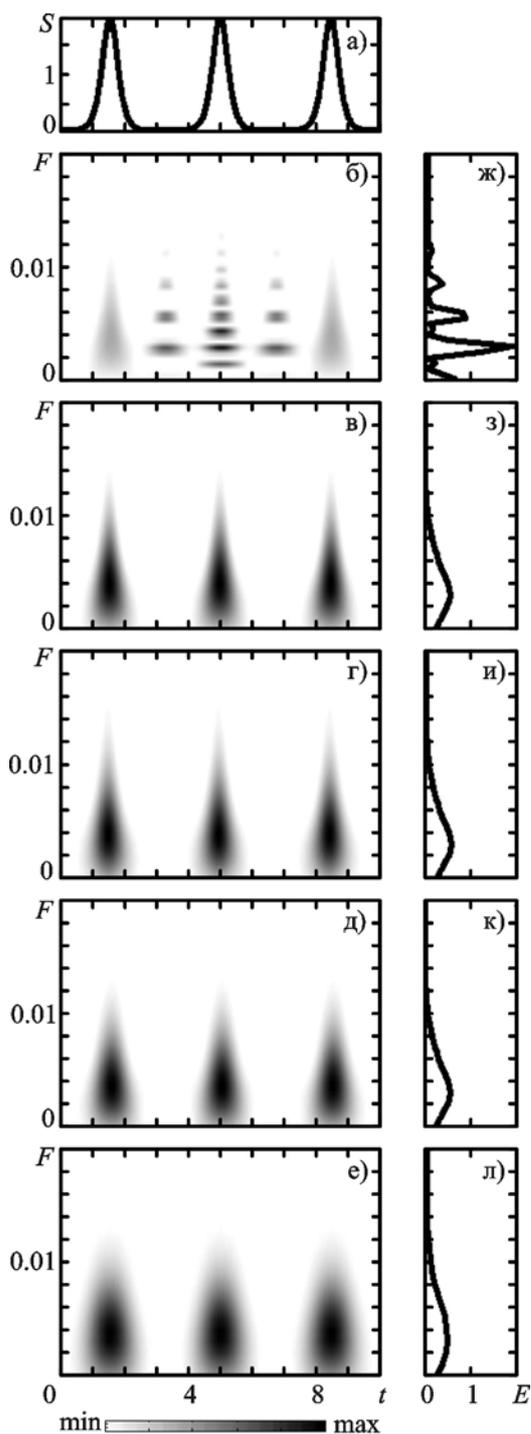
где  $v_m = -2C/u$  – амплитуда волны;  $C < -1.5u^2$ ;  $\xi_0 = 2\sqrt{3\beta/b}$ ;  $b = 2v_m - 3u$ ;  $b > v_m > 0$ . Вид кноидальной волны при различных значениях амплитуды показан на рис. 7, а, рис. 8, а и рис. 9, а. На рис. 7, а она представляет собой, по сути, последовательность солитонов. Кноидальная волна, у которой амплитуда отрицательных полуволн меньше амплитуды положительных полуволн, показана на рис. 8, а. Рис. 9, а соответствует кноидальной волне, которая близка к гармоническому волновому процессу.

6. *Пилообразная волна.* Она описывается нестационарным решением уравнения Бюргера, в котором процесс нелинейного укручения профиля волны доминирует над процессом диссипации. Такое решение, найденное Р. В. Хохловым в 1961 г., имеет вид [1]:

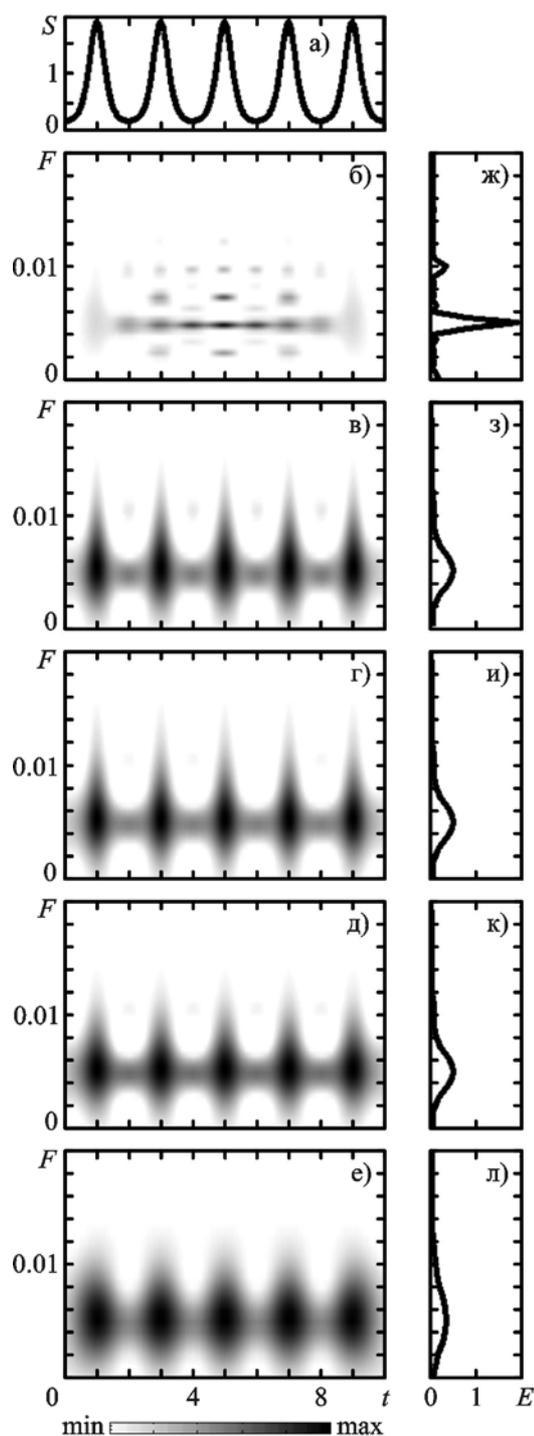
$$v(t, x) = \frac{1}{1+t} \left( x - \pi \text{th} \frac{\pi x}{2\gamma(1+t)} \right), \quad -\pi < x < \pi,$$

где  $t$  – безразмерное время,  $x$  – безразмерная координата. Общий вид модели пилообразной волны показан на рис. 10, а.

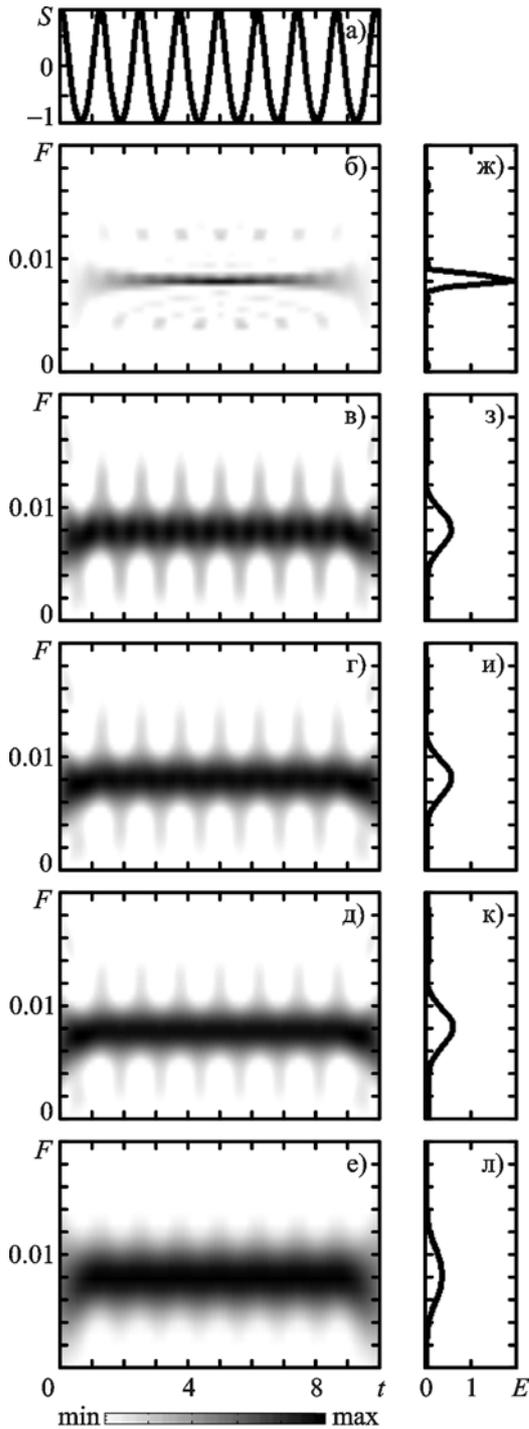
Как отмечено в [10], вычисление ФСП ПЧВ уже в случае даже самых простых сигналов  $s(t)$ , к сожалению, возможно лишь численными методами. Поэтому все расчеты в работе производились с помощью системы компьютерной математики Matlab 7. X [14], пакета прикладных программ Time-Frequency Toolbox [15], а также оригинального программного обеспечения, разработанного авторами.



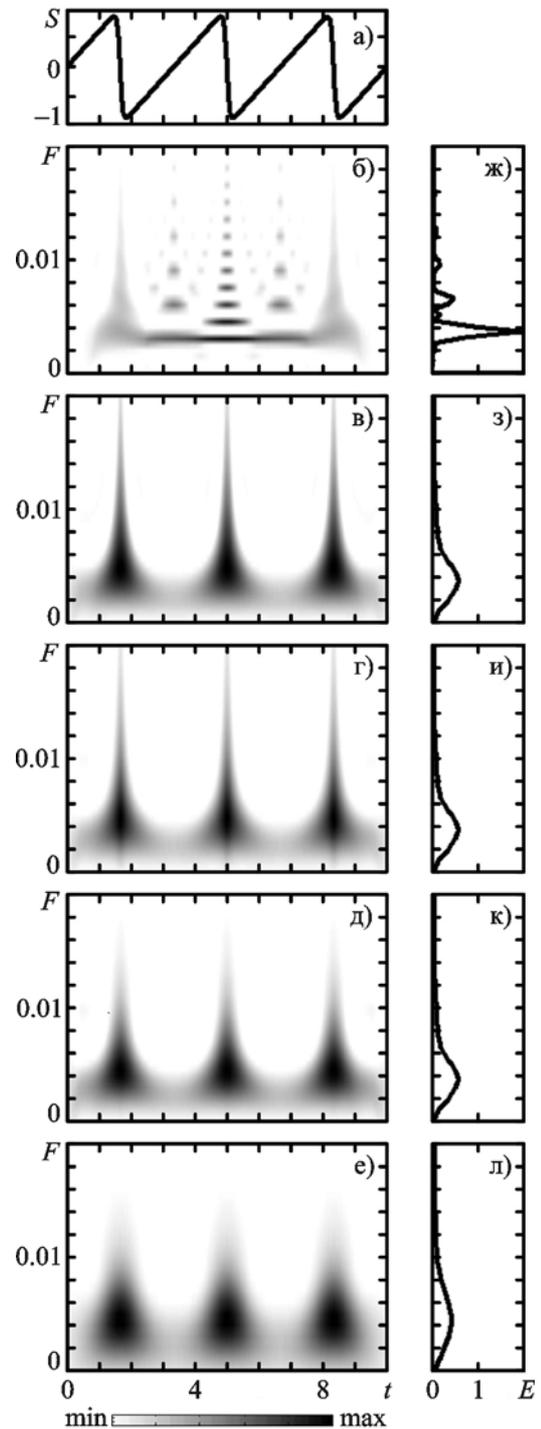
**Рис. 7.** Анализ кноидальной волны ( $\xi_0 = 2.7$ ): а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), з) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ



**Рис. 8.** Анализ кноидальной волны ( $\xi_0 = 1.8$ ): а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), з) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ



**Рис. 9.** Анализ кноидальной волны ( $\xi_0 = 1.3$ ): а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), з) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ



**Рис. 10.** Анализ пилообразной волны: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), з) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), д) – ФСП ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), е) – ФСП СФ, ж) – энергограмма ПВ, з) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 1000$ ), и) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 10$ ), к) – энергограмма ПЧВ ( $\sigma = 0.01$ ), л) – энергограмма СФ

## 2. Результаты численного моделирования

Результаты анализа представлены в специальном формате, который уже успешно применялся авторами в работах [5, 10, 16].

На всех рисунках сверху вниз последовательно изображены: сигнал во временной области, ФСП ПВ, ФСП ПЧВ ( $\sigma=1000$ ), ФСП ПЧВ ( $\sigma=10$ ), ФСП ПЧВ ( $\sigma=0.01$ ) и ФСП СФ. В правом столбце напротив каждого преобразования помещены соответствующие энергограммы.

На рис. 1, 2 представлены результаты анализа модели УВ, отличающиеся шириной фронта. Здесь ФСП ПЧВ (рис. 1, в – д) оказывается несколько сглаженной по сравнению с ФСП ПВ (рис. 1, б). По мере уменьшения  $\sigma$  время-частотное разрешение ПЧВ ухудшается, но даже при значении  $\sigma=0.01$  остается лучше, чем разрешение ФСП СФ (рис. 1, е). При уширении фронта УВ (рис. 2, а) вертикальные пики ФСП как ПЧВ (рис. 2, в – д), так и ПВ (рис. 2, б) и СФ (рис. 2, е) сглаживаются.

Сравнение с результатами, полученными при помощи вейвлет-анализа [5], показывает, что при использовании квадратичных преобразований, в частности ПЧВ, можно установить, убывает ли процесс со временем или возрастает. Например, значения ФСП ПЧВ (рис. 1, в) отличны от нуля в левой части рисунка, где и сам сигнал не равен нулю. Вейвлет-анализ позволяет определить ширину фронта УВ [5], но не дает какой-либо информации о сигнале в промежутке времени, где его уровень является постоянным или описывается линейной функцией времени.

Результаты анализа солитона показаны на рис. 3. ФСП ПЧВ (рис. 3, в – д) практически не отличается от ФСП ПВ (рис. 3, б) для данного типа сигналов, а ФСП СФ (рис. 3, е) оказывается шире.

Результаты анализа “решения-кентавра” представлены на рис. 4. Интерпретация ФСП ПВ (рис. 4, б) затруднена наличием интерференции. Вид ФСП СФ (рис. 4, е) практически не отличается от ФСП СФ для ударной волны (рис. 1, е). В то же время ПЧВ позволяет обнаружить осциллирующую структуру

сигнала за фронтом ударной волны. Об этом свидетельствуют две вертикальные линии (рис. 4, в), расположенные в моменты времени  $t=3.5$  и  $t=4.5$ .

На рис. 5 и рис. 6 показаны результаты анализа солитона огибающей, которые для обоих сигналов оказываются похожими. Разница в том, что на рис. 6 ФСП для всех используемых преобразований оказывается более вытянутой по горизонтали, из-за того что протяженность сигнала на рис. 6, а больше, чем у представленного на рис. 5, а. Здесь даже при значении  $\sigma=10$  (рис. 5, г, рис. 6, г) ФСП ПЧВ почти не отличается от ФСП ПВ (рис. 5, б, рис. 6, б). При уменьшении  $\sigma$  наблюдается сглаживание ФСП ПЧВ (рис. 5, д, рис. 6, д).

Результаты анализа кноидальной волны для трех значений параметра  $\xi_0$  ( $\xi_0=2.7$ ,  $\xi_0=1.8$ ,  $\xi_0=1.3$ ) представлены соответственно на рис. 7–9. Интерференционные члены, присутствующие в ФСП ПВ (рис. 7, б, рис. 8, б), в ФСП ПЧВ успешно подавляются уже при значении  $\sigma=1000$  (рис. 7, в, рис. 8, в). При этом время-частотное разрешение остается практически неизменным. ФСП СФ также позволяет подавить интерференцию (рис. 7, е, рис. 8, е), но время-частотное разрешение у ФСП СФ оказывается значительно хуже, чем у ФСП ПЧВ.

На рис. 9, б ФСП ПВ имеет горизонтальную линию с небольшими локальными образованиями на время-частотной плоскости. Они расположены как выше, так и ниже этой линии, которая соответствует практически гармоническому процессу (рис. 9, а). На ФСП ПЧВ (рис. 9, в – д), как и на ФСП СФ (рис. 9, е), горизонтальная линия несколько уширена, а также наблюдается волнистая структура на время-частотной плоскости ФСП ПЧВ и ФСП СФ, что отличает данный волновой процесс от гармонического. При этом ФСП ПЧВ сигнала оказывается более локализованной, чем его ФСП СФ.

Результаты анализа пилообразной волны показаны на рис. 10. ФСП ПВ искажена наличием интерференции (рис. 10, б). Интерференционные структуры эффективно подавляются во временной области при помощи ПЧВ (рис. 10, в – д). Однако горизонталь-

ная линия на ФСП ПВ, отвечающая за частоту следования пилообразных возмущений (рис. 10, б), не обнаруживается на ФСП ПЧВ даже при достаточно большом значении  $\sigma$  (рис. 10, в). При уменьшении  $\sigma$  ФСП ПЧВ уширяется (рис. 10, г, д), но даже при значении  $\sigma = 0.01$  (рис. 10, д) остается более локализованной, чем ФСП СФ (рис. 10, е). Вейвлет-спектр такого сигнала практически не отличается от вейвлет-спектра, полученного при анализе модели УВ [5].

### 3. Обсуждение результатов

Проведенный чои–вильямс-анализ модельных нелинейных волновых процессов показывает, что применение ПЧВ оказывается полезным для исследования сигналов такого типа. Из множества преобразований класса Коэна только ПЧВ обладает уникальным свойством, благодаря которому можно управлять степенью интерференции, проявляющейся вследствие квадратичности самого преобразования. По нашему мнению, это один из наиболее удачных способов усреднения ПВ. Даже при больших значениях параметра  $\sigma$  ПЧВ часто позволяет избавиться от присутствующих в ФСП ПВ интерференционных членов (см. рис. 1, в, рис 2, в, рис 4, в и рис. 7, в) и при этом практически сохранить время-частотное разрешение таким, как у ФСП ПВ (рис. 1, б, рис 2, б, рис 4, б и рис. 7, б).

В некоторых случаях (рис. 4, в) ФСП ПЧВ оказывается более информативной, чем ФСП ПВ и ФСП СФ, а также спектр НВП. Однако ограничиваться только ПЧВ при исследовании таких сигналов не рекомендуется. Так, например, для пилообразного сигнала ФСП ПЧВ (рис. 10, в) позволяет избавиться от интерференции, которая присутствует в ФСП ПВ (рис. 10, б), но при этом горизонтальная линия, отвечающая за частоту следования импульсов (рис. 10, б), “смазывается” (рис. 10, в), что приводит к потере части информации о сигнале. Это является результатом того, что при подавлении интерференции с помощью ПЧВ ухудшается время-частотное разрешение. При этом разрешение по частоте ухудшается сильнее, чем разрешение по времени. Поэтому ПЧВ и ПВ следует использовать одновременно.

Не следует также, по мнению авторов, отказываться и от фурье-анализа, поскольку СФ практически полностью лишена интерференции. При анализе сигналов ФСП СФ оказывается отличной от нуля в тех областях на время-частотной плоскости, где исследуемый сигнал несет энергию. Но, к сожалению, время-частотное разрешение ФПС СФ оставляет желать лучшего. При помощи ПВ можно точно определить время-частотную протяженность упомянутых областей. Однако картина ФСП ПВ часто оказывается сильно зашумлена интерференцией. Использование ПЧВ позволяет добиться компромиссного решения этой проблемы.

По указанным причинам для выявления деталей анализируемых нелинейных волновых процессов ПЧВ целесообразно применять совместно с другими преобразованиями, например, в рамках системного спектрального анализа [9].

### Выводы

1. Проведен чои–вильямс-анализ ряда нелинейных волновых процессов. Выполнено сравнение результатов, полученных при помощи ПЧВ, ПВ и СФ. Продемонстрированы преимущества и недостатки ПЧВ по сравнению с ПВ и СФ, а также с НВП.
2. К преимуществам ПЧВ следует отнести возможность управления степенью интерференции при сравнительно небольшом ухудшении время-частотного разрешения.
3. Недостатками ПЧВ являются неравномерное подавление интерференции вдоль оси времени и вдоль оси частот, а также некоторое ухудшение время-частотного разрешения при уменьшении влияния интерференции.
4. Нелинейные волновые процессы рекомендуется исследовать одновременно при помощи ПЧВ, ПВ и СФ, потому что указанные преобразования хорошо дополняют друг друга.

### Литература

1. Виноградова М. В., Руденко В. О., Сухоруков А. П. Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
2. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. – М.: Наука, Физматлит, 2000. – 272 с.

3. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
4. Черногор Л. Ф. Нелинейная радиофизика. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2004. – 200 с.
5. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ нелинейных волновых процессов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – №10. – С. 3-21.
6. Козн Л. Время-частотные распределения: Обзор // ТИИЭР. – 1989. – Т. 77, № 16. – С. 72 – 120.
7. Вишнивецкий О. В., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Анализ нелинейных волновых процессов при помощи преобразования Вигнера // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №3. – С. 295-310.
8. Choi H.-J., Williams W. J. Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels // IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing. – 1989. – Vol. 37, No. 6. – P. 862 – 871.
9. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Системный спектральный анализ сигналов: теоретические основы и практические применения // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №2. – С. 162-181.
10. Вишнивецкий О. В., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Чои–вильямс-анализ в цифровой обработке сигналов // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №4. – С. 410-432.
11. Wigner E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev. – 1932. – Vol. 40. – P. 749-759.
12. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов / Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
13. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
14. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – С.-Пб.: Питер, 2002. – 608 с.
15. F. Auger, P. Flandrin, P. Goncalves, O. Lemoine. Time-Frequency Toolbox Reference Guide. – Newston: Rice University, 2005. – 180 p.
16. Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Пустовойт В. И., Черногор Л. Ф. Преобразование Чои-Вильямса и атомарные функции в цифровой обработке сигналов // ДАН РАН. – 2007. – Т. 413, №6. – С. 750-753.  
English Version: Kravchenko V. F., Lazorenko O. V., Pustovoit V. I., and Chernogor L. F. Choi–Williams Transform and Atomic Function in Digital Signal Processing // Doklady Physics. – 2007. – Vol. 52, No. 4. – P. 207-210.

## **Чои–вільямс-аналіз нелінійних хвильових процесів**

**О. В. Вишнивецкий, О. В. Лазоренко,  
Л. Ф. Черногор**

Проаналізовано низку нелінійних хвильових процесів за допомогою перетворення Чои–Вільямса, що належить до класу перетворень Коена. Вивчено моделі ударних хвиль, класичного солітона, солітона огинаючої, розв’язок рівняння Бюргерса–Кротевега–де Вріза – “розв’язок кентавр”, а також моделі кноїдальної та пилкоподібної хвиль. Порівнюються результати чої–вільямс-, вігнер- та фур’є-аналіза. Показано, що вказані перетворення добре доповнюють одне одного та при спільному використанні дозволяють отримати більшу кількість інформації про досліджувані сигнал або процес.

## **The Choi–Williams Analysis of the Non-Linear Wave Processes**

**O. V. Vishnivetsky, O. V. Lazorenko,  
and L. F. Chernogor**

The nonlinear wave process has been analysed with the Choi–Williams transform which belongs to the Cohen transforms class. The models of shock waves, classical soliton, soliton of envelope, solution of Burgers–Korteweg-de Vries equation, i.e. the centaur solution, and models of cnoidal and saw-tooth waves are studied. The results of Choi–Williams-, Wigner- and Fourier-analysis are compared. The aforesaid transforms are shown to well supplement each other and when used together allow to acquire more information about the investigated signals or processes.