Радиофизика и радиоастрономия, 2009, т. 14, №3, с. 304-313

УДК 621.371.162

Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. III. Временная корреляционная функция и интенсивность в случае наклонного зондирования при однопозиционной локации

А. С. Брюховецкий

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины, ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: ire@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 11 декабря 2008 г.

Получены асимптотики многократных быстроосциллирующих интегралов, определяющих корреляционную функцию и интенсивность рассеянного поля при однопозиционной локации статистически неровной поверхности. Для этой цели используется метод стационарной фазы, отвечающей случаю изолированных стационарных точек. Исследован переход к известному в литературе результату.

Введение

В предыдущих исследованиях было получено интегральное представление волнового поля, рассеянного шероховатой поверхностью [1], и предпринята попытка анализа его энергетических характеристик – интенсивности и частотного спектра [2]. По своей сути анализируемые выражения имеют вид многократных быстроосциллирующих интегралов, и цель исследования состоит в асимптотической их оценке для значений физических параметров, заданных условиями задачи. Область математической физики, посвященная методам таких оценок, интенсивно развивалась последние 20–30 лет и получила название теории волновых катастроф. Определенное представление о ее состоянии дает обзор [3].

В настоящей работе ограничимся наименее сложным случаем изолированных седловых точек фазы подынтегральной функции. Предварительно уточним исходные выражения [2] для интенсивности и временной корреляционной функции.

Корреляционная функция и интенсивность

Поскольку волновое поле [1] в точке $\vec{R}_2 = (\vec{r}_2, z_2)$ представлено комплексной амплитудой $u\left(\vec{R}_2, t\right)$, в квадратичной по полю [2] временной корреляционной функции $B(\tau)$ должны использоваться действительные значения $\mathrm{Re}\left(u\left(\vec{R}_2,t\right)\right) = \frac{1}{2}\left[u\left(\vec{R}_2,t\right) + u^*\left(\vec{R}_2,t\right)\right]$ и соответственно $\mathrm{Re}\left(u\left(\vec{R}_2,t+\tau\right)\right)$, усредненные по ансамблю реализаций случайных неровностей поверхности ($*$ – знак комплексного сопряжения). Поле $\mathrm{Re}\left(u\left(\vec{R}_2,t\right)\right)$ есть сумма гармонических колебаний $(\sim \cos\omega_0 t)$, излучаемых отдельными точками $\vec{r}_1$ рассеивающей поверхности, которые промодулированы случайным полем неровностей $\varsigma(\vec{r}_1, t)$, а потому ([4], с. 168, 180, 181) является нестационарным процессом. Для сохранения обычного физического смысла корреляционной функции и спектра необходимо дополнительное усреднение по времени t. Полученные в результате такого двукратного усреднения величины называются средней функцией корреляции и средним спектром ([5], с. 179-184).

Для средней функции корреляции имеем выражение

$$B(\tau)=\frac{1}{4}\left[\left\langle\overline{u\left(\vec{R}_2,t+\tau\right)u^*\left(\vec{R}_2,t\right)}^{\,t}+\text{к.с.}\right\rangle\right], \quad (1)$$

где к.с. означает комплексное сопряжение выписанного в явном виде первого слагаемого. Горизонтальная черта "$\overline{\quad}^{\,t}$" означает усреднение по времени, а угловые скобки – по ансамблю реализаций случайного поля неровностей. При экспоненциальной зависимости поля от времени $e^{-i\omega_0 t}$ обращается в нуль величина

$$\left[\overline{u\left(R_2,t+\tau\right)u\left(\vec{R}_2,t\right)}^{\,t}+\text{к.с.}\right]=0, \quad (2)$$

а в (1) знак усреднения по времени может быть опущен, т. к. усредняемая величина зависит от τ, а не t.

При $\tau=0$ получаем следующее выражение для интенсивности:

$$B(0)=\frac{1}{2}\left\langle u\left(\vec{R}_2,t\right)u^*\left(R_2,t\right)\right\rangle, \quad (3)$$

которое отличается от используемого в [2] множителем $1/2$.

Отличие корреляционной функции (1) от аналогичной в [2] более существенно. Кроме множителя $1/4$, при различного рода преобразованиях (разложениях и т. п.) необходимо учитывать условие

$$B(-\tau)=B(\tau), \quad (4)$$

если используется полное выражение (1), либо условие эрмитовой сопряженности, если в качестве $B(\tau)$ берется только первое слагаемое из (1) (см. [4], с.168).

Чтобы обеспечить соблюдение условия (4) при разложениях подынтегральных выражений по степеням $\vec{\rho}=\vec{r}_1^{\,\prime}-\vec{r}_1$, исходное выражение (20) из [2] следует представить в симметричной форме. Для этого интеграл (20) в [2] по точкам $\vec{r}_1^{\,\prime}$, $\vec{r}_1$ разобьем на две равные части, в одной перейдем к переменным $\vec{r}_1,\vec{\rho}$, а во второй – к $\vec{r}_1^{\,\prime},\vec{\rho}$. Ограничиваясь нулевыми членами разложений по $\vec{\rho}$ в предэкспоненциальных множителях, сохраним, в отличие от [2], точные выражения для фазы экспоненты. Вместо формулы (20) из работы [2] получим

$$B(\tau)=B^{+}(\tau)+B^{-}(\tau)+\text{к.с.} \quad (5)$$

При этом

$$B^{\pm}(\tau)=\frac{1}{4(4\pi)^2}\frac{\sigma^2}{4}\iint\limits_S d^2\vec{r}_1\left(\left|I_{12}\right|^2\big/R_{01}^2R_{12}^2\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\rho}\sum_{j=\pm}\tilde{W}_j\left(\vec{\chi}_1\right)\left|\tilde{I}_{01}\left(\vec{\chi}_1\right)\right|^2\times$$

$$\times\exp\left[\pm i\Phi_{012}^{\pm}\right]\exp\left\{i\left[\vec{\chi}_1\vec{\rho}-(\omega_0+j\omega_1)\tau\right]\right\}, \quad (6)$$

где $\Phi_{012}^{\pm}=\Phi_{01}^{\pm}+\Phi_{12}^{\mp}$, $\Phi_{01}^{\pm}=k\left(R_{01}^{\pm}-R_{01}\right)$, $\Phi_{12}^{\pm}=k\left(R_{12}^{\pm}-R_{12}\right)$, $R_{01}^{\pm}=\left|\vec{R}_{01}\pm\vec{\rho}\right|$, $R_{12}^{\pm}=\left|\vec{R}_{12}\pm\vec{\rho}\right|$, $\vec{R}_{01}=(\vec{r}_{01},z_0)$, $\vec{R}_{12}=(\vec{r}_{12},z_2)$, $\vec{r}_{01}=\vec{r}_0-\vec{r}_1$, $\vec{r}_{12}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$.

В приведенных формулах $\vec{R}_{01}$ и $\vec{R}_{12}$ – векторы, соединяющие точку рассеяния $(\vec{r}_1,0)$ на средней поверхности $z=\left\langle\varsigma(\vec{r}_1,t)\right\rangle=0$ с точкой источника $\vec{R}_0=(\vec{r}_0,z_0)$ и точкой наблюдения $\vec{R}_2=(\vec{r}_2,z_2)$; $\sigma^2=\left\langle\varsigma^2\right\rangle$ – дисперсия неровностей; $\tilde{W}_{\pm}\left(\vec{\chi}_1\right)$ – несимметричный энергетический спектр волновых чисел [6] (пространственный спектр неровностей); $\omega_1=\omega_1\left(\chi_1\right)$ – частота случайных колебаний поверхности, соответствующая волновому вектору $\vec{\chi}_1$; $\tilde{I}_{01}\left(\vec{\chi}_1\right)$ и I_{12} – множители, учитывающие влияние отражательных свойств поверхности на трассе $\vec{R}_{01}$ для среднего поля и на трассе $\vec{R}_{12}$ для рассеянного поля соответственно ([1, 2]):

$$\tilde{I}_{01}(\vec{\chi}_1) = \left[-k\vec{\alpha}_\perp \vec{\chi}_1 + k^2\alpha_z^2\right] \times$$
$$\times\left(1+V'_{01}\right) + k^2\alpha_z\eta_0\left(1-V'_{01}\right) +$$
$$+\left[-k\vec{\alpha}_\perp\vec{\chi}_1 + k^2\alpha_z^2 + k^2\alpha_z\eta_0\right]\left(1-V'_{01}\right)W'_{01},$$
$$I_{12} = \left(1+V'_{12}\right) + \left(1-V'_{12}\right)W'_{12}.$$

Здесь V'_{01}, V'_{12} – коэффициенты отражения, а W'_{01}, W'_{12} – множители ослабления для вышеуказанных трасс $\vec{R}_{01}$, $\vec{R}_{12}$ соответственно; η_0 – импеданс поверхности; $\vec{\alpha}_\perp = \vec{r}_{01}/R_{01}$; $\alpha_z = z_0/R_{01}$.

В ходе дальнейших вычислений ограничимся частным случаем обратного рассеяния:

$$z_2 = z_0, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_0, \qquad \vec{R}_{12} = \left(-\vec{r}_{01}, z_0\right). \qquad (7)$$

При этом

$$\Phi_{01}^{\pm} = kR_{01}\left(\sqrt{1 \pm 2\vec{\alpha}_\perp \frac{\vec{\rho}}{R_{01}} + \frac{\rho^2}{R_{01}^2}} - 1\right), \qquad (8)$$

$$\Phi_{12}^{\pm} = \Phi_{01}^{\mp}. \qquad (9)$$

Если учесть свойство несимметричного спектра волновых чисел ([6], с. 79),

$$\tilde{W}_{-j}(\vec{\chi}_1) = \tilde{W}_j(-\vec{\chi}_1), \qquad (10)$$

то с помощью замены $\vec{\rho} \to -\vec{\rho}$ можно показать, что (6) преобразуется следующим образом:

$$B^{\pm}(-\tau) = \left(B^{\mp}(\tau)\right)^*, \qquad (11)$$

а следовательно, выражение (5) обладает симметрией

$$B(-\tau) = B(\tau), \qquad (12)$$

которая гарантирует существование неотрицательно определенного преобразования Фурье ([4], с. 178), т. е. энергетического спектра средней корреляционной функции $B(\tau)$.

В настоящей работе мы откажемся от френелевского разложения (до членов $\sim\rho^2$) фазы $\Phi_{012}^{\pm}$ по нескольким причинам. Главная из них – это возможность вычисления интегралов по переменным $\vec{\rho}$ и $\vec{r}_1$ методом стационарной фазы без привнесения лишних седловых точек, обусловленных приближенным значением фазы $\Phi_{012}^{\pm}$. Кроме того, отпадает необходимость выполнения излишних математических операций, осуществление которых невозможно при определенных условиях задачи.

Приняв во внимание (12), для частотного спектра $S(\omega)$ рассеянного поля получим

$$S(\omega) = S^{+}(\omega) + S^{-}(\omega) + S^{+}(-\omega) + S^{-}(-\omega) \equiv S(-\omega), \qquad (13)$$

причем

$$S(\omega)^{\pm} \equiv S^{\pm}(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B^{\pm}(\tau)e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\tau, \qquad (14)$$

а $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

В силу симметрии (13) достаточно рассмотреть область частот $\omega > 0$.

Подставив (6) в (14), при интегрировании по τ экспоненты $\exp\left[-i(\omega_0 + j\omega_1)\tau\right]$ получим множитель $2\pi\delta\left[\omega - \omega_0 - j\omega_1(\chi_1)\right]$. Очевидно, что при $\Delta\omega = \omega - \omega_0 > 0$ в сумме по j следует брать слагаемое с $j > 0$, а при $\Delta\omega < 0$ – слагаемое с $j < 0$.

При вычислениях интенсивности и спектра воспользуемся последовательным асимптотическим интегрированием [7] многократного интеграла в (6). Обозначим в формуле (6)

$$I_\rho = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\rho}\exp\left[\pm i\left(\Phi_{012}^{\pm} + i\vec{\chi}_1\vec{\rho}\right)\right] \equiv$$
$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\rho}\exp\left[\pm i\Phi(\vec{\rho})^{\pm}\right], \qquad (15)$$

причем

$$\Phi^{\pm}(\vec{\rho}) = \vec{\chi}_1\vec{\rho} \pm 2\Phi_{01}^{\mp}. \qquad (16)$$

Найдем седловые точки фазы $\Phi(\vec{\rho})^{\pm}$ из условия

$$\frac{\mathrm{d}\Phi^{\pm}}{\mathrm{d}\vec{\rho}} = 0 = \vec{\chi}_1 \pm 2k\frac{\vec{g}_{\pm}}{\sqrt{\alpha_z^2 + g_{\pm}^2}}, \qquad (17)$$

где $\vec{g}_{\pm} = \vec{\alpha}_{\perp} \pm \dfrac{\vec{\rho}}{R_{01}} = \vec{g}_r + i\vec{g}_i$, $\vec{g}_r = \mathrm{Re}\,\vec{g}_{\pm}$, $\vec{g}_i = \mathrm{Im}\,\vec{g}_{\pm}$.

Из уравнения (17) получаем

$$g_{\pm}^2 = \alpha_z^2\frac{\xi_0^4}{1-\xi_0^4}, \qquad (18)$$

где $\xi_0 = \sqrt{\chi_1/2k} = \sqrt{g\chi_1/2gk} \equiv \omega_1/\omega_{Br}$ – безразмерная частота, $\omega_{Br} = \sqrt{2gk}$ – брэгговская частота в радиоокеанографической терминологии.

Если φ_1 – азимутальный угол вектора $\vec{\chi}_1$, то, обозначив $\xi_x = \xi_0^2\cos\varphi_1$, $\xi_y = \xi_0^2\sin\varphi_1$, для декартовых составляющих $\vec{g}_r = (g_{rx}, g_{ry})$ и $\vec{g}_i = (g_{ix}, g_{iy})$ получаем из (17) и (18) системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(g_{rx}^2 - g_{ix}^2\right)\left(1-\xi_x^2\right) - \left(g_{ry}^2 - g_{iy}^2\right)\xi_x^2 = \alpha_z^2\xi_x^2, \\ -\left(g_{rx}^2 - g_{ix}^2\right)\xi_y^2 + \left(g_{ry}^2 - g_{iy}^2\right)\left(1-\xi_y^2\right) = \alpha_z^2\xi_y^2; \end{cases} \qquad (19а)$$

$$\begin{cases} g_{rx}g_{ix}\left(1-\xi_x^2\right) - g_{ry}g_{iy}\xi_x^2 = 0, \\ -g_{rx}g_{ix}\xi_{yx}^2 + g_{ry}g_{iy}\left(1-\xi_y^2\right) = 0. \end{cases} \qquad (19б)$$

Определитель D неоднородной системы (19а) и однородной (19б) один и тот же:

$$D = 1 - \xi_x^2 - \xi_y^2 = 1 - \xi_0^4. \qquad (20)$$

Если $D \neq 0$, то система (19б) имеет тривиальное решение

$$g_{rx}g_{ix} = 0, \qquad g_{ry}g_{iy} = 0, \qquad (21)$$

а система (19а) – решение

$$g_{rx}^2 - g_{ix}^2 = \alpha_z^2\xi_x^2\big/D, \qquad g_{ry}^2 - g_{iy}^2 = \alpha_z^2\xi_y^2\big/D. \qquad (22)$$

1. Пусть в (21) $g_{ix} = 0$, тогда $g_{rx}^2 = \alpha_z^2\xi_x^2\big/D \geq 0$, что выполняется только при $D > 0$, т. е. при $1-\xi_0^4 > 0$, что означает $\xi_0 < 1$. При этом условии из $g_{ry}g_{iy} = 0$ следует $g_{iy} = 0$, а $g_{ry}^2 = \alpha_z^2\xi_y^2\big/D$.

2. Пусть теперь $g_{rx} = 0$, тогда $-g_{ix}^2 = \alpha_z^2\xi_x^2\big/D < 0$, откуда $1-\xi_0^4 < 0$, т. е. $\xi_0 > 1$. При этом условии $g_{ry} = 0$, а $-g_{iy}^2 = \alpha_z^2\xi_y^2\big/D < 0$.

Таким образом, при $\xi_0 < 1$ вектор $\vec{g}_{\pm}$ (а следовательно, и $\vec{\rho}$) вещественный, т. е. седловая точка – стационарная (вещественная).

При $\xi_0 > 1$ вектор $\vec{g}_{\pm}$ мнимый, (т. е. переменная $\vec{\rho}$ – комплексная) и седловая точка – перевальная (комплексная).

При $D \to 0$ происходит слияние стационарной и перевальной точек. При $D \neq 0$ вклад в асимптотику интеграла (15) дает только стационарная точка. Поэтому продолжим вычисление, имея в виду, что $\xi_0 = \sqrt{\chi_1/2k} < 1$.

Дифференцируя (17) второй раз по ρ_x, ρ_y получим элементы матрицы Гесса:

$$\frac{\partial^2\Phi^{\pm}}{\partial\rho_l\partial\rho_k} = \pm\frac{2k}{R_{01}\sqrt{\alpha_z^2 + g_{\pm}^2}}\frac{\delta_{lk}\left(\alpha_z^2 + g_{\pm}^2\right) - g_{\pm l}g_{\pm k}}{\alpha_z^2 + g_{\pm}^2}, \qquad (23)$$

где каждый из индексов l, k пробегает значения x, y. Определитель этой матрицы (гессиан)

$$H = \left(\frac{2k}{R_{01}}\right)^2\frac{\left(1-\xi_0^4\right)^2}{\alpha_z^2}. \qquad (24)$$

Значение фазы в стационарной точке

$$\vec{\rho}_s = \pm R_{01}\left[-\left(\vec{\chi}_1/2k\right)\sqrt{\alpha_z^2 + g_\pm^2} - \vec{\alpha}_\perp\right] \qquad (25)$$

равно

$$\Phi^\pm\left(\vec{\rho}_s\right) = \pm 2kR_{01}\times$$
$$\times\left[-\xi_0^4\sqrt{\alpha_z^2 + g_\pm^2} - \frac{\vec{\chi}_1\cdot\vec{\alpha}_\perp}{2k} + \frac{\alpha_z}{\sqrt{1-\xi_0^4}} - 1\right].$$

Для собственных значений $h_1^\pm, h_2^\pm$ матрицы Гесса (23) можно получить следующие выражения:

$$N_h^{-1}h_1^\pm = \pm\left(\alpha_z^2 + g_\pm^2/2\right) + g_\pm^2/2,$$
$$N_h^{-1}h_2^\pm = \pm\left(\alpha_z^2 + g_\pm^2/2\right) - g_\pm^2/2,$$
$$N_h = \left(2k/R_{01}\right)\left(\alpha_z^2 + g_\pm^2\right)^{-3/2}.$$

Очевидно, что $\operatorname{sign} h_1^+ + \operatorname{sign} h_2^+ = 2,$ а $\operatorname{sign} h_1^- + \operatorname{sign} h_2^- = -2.$

Первый член асимптотического разложения ([8], с. 528) для I_ρ из (15)

$$I_\rho \cong N_\rho \exp\left[i\Phi^\pm\left(\vec{\rho}_s\right)\right]e^{\pm i\pi/2} + \mathrm{O}\left(1/\sqrt{kR_{01}}\right). \quad (26)$$

Здесь

$$N_\rho = 2\pi/H^{1/2} = 2\pi\frac{\alpha_z}{1-\xi_0^4}\frac{R_{01}}{2k}. \qquad (27)$$

В полярной системе координат $\vec{\alpha}_\perp = (\alpha_\perp, \varphi_\perp)$ и $\vec{\chi}_1\cdot\vec{\alpha}_\perp/(2k) = \xi_0^2\cos(\varphi_1 - \varphi_\perp).$

Подставив I_ρ в исходное выражение для $B(0)$ либо для $S(\omega),$ выделим интеграл по азимутальному углу $\varphi_\perp$:

$$I_{\varphi_\perp} = \int\limits_{-\varphi_{\perp 0}}^{\varphi_{\perp 0}} \mathrm{d}\varphi_\perp f(\varphi_\perp)N_\rho e^{\pm i\pi/2}e^{i\Phi^\pm(\varphi_\perp)}, \qquad (28)$$

где

$$\Phi^\pm(\varphi_\perp) \equiv \Phi^\pm(\vec{\rho}_s) =$$
$$= \mp 2kR_{01}\left[1 - \alpha_z\sqrt{1-\xi_0^4} + \xi_0^2\alpha_\perp\cos(\varphi_1 - \varphi_\perp)\right], \qquad (29)$$

а $f(\varphi_\perp)$ – амплитуда подинтегральной функции в (6) включая и множитель перед интегралом.

Для простоты расчетов полагаем, что площадка S представляет собой круговой сектор $-\varphi_{\perp 0} \le \varphi_\perp \le \varphi_{\perp 0},$ $r_{1l} \le r_1 \le r_{1u},$ а начало координат расположено под источником $(\vec{r}_0 = 0).$

Седловая точка по переменной $\varphi_\perp$ определяется из условия

$$\frac{\mathrm{d}\Phi^\pm}{\mathrm{d}\varphi_\perp} = 0 = \pm 2kR_{01}\xi_0^2\alpha_\perp\sin(\varphi_1 - \varphi_\perp). \qquad (30)$$

Отсюда $\varphi_1 - \varphi_{\perp s} = 0, \pi, 2\pi.$ Из этих трех значений только $\varphi_{\perp s} = \varphi_1 - \pi$ приводит к стационарным (действительным) значениям r_1 при последующем интегрировании по r_1 после подстановки $I_{\varphi\perp}$ в (6).

Таким образом, интегрирование по $\varphi_\perp$ отбирает вклад только тех “случайных решеток”, направления которых противоположны направлению $\varphi_\perp$ зондирования. Для стационарного значения фазы $\Phi^\pm(\varphi_{\perp s})$ получаем

$$\Phi^\pm(\varphi_{\perp s}) = \mp 2kR_{01}\left[1 - \alpha_z\sqrt{1-\xi_0^4} - \alpha_\perp\xi_0^2\right]. \quad (31)$$

Вторая производная по $\varphi_\perp$ в этой точке равна

$$\left(\Phi^\pm(\varphi_{\perp s})\right)'' = \mp 2kR_{01}\alpha_\perp\xi_0^2 \lessgtr 0. \qquad (32)$$

В результате первый член асимптотики для $I_{\varphi\perp}$ в случае "большой" площадки (см. Приложение) имеет вид:

$$I_{\varphi\perp} \approx f(\varphi_{\perp s}) N_\rho e^{\pm i\pi/2} e^{i\Phi^\pm(\varphi_\perp+\pi)} N_{\varphi\perp}. \qquad (33)$$

Для "малой" площадки (см. Приложение)

$$I_{\varphi\perp} \approx f(\varphi_{\perp s}) N_\rho e^{\pm i\pi/2} \Delta\varphi_{ul} e^{i\Phi^\pm(\varphi_{\perp s})}. \qquad (33')$$

Здесь $\Delta\varphi_{ul} = 2\varphi_{\perp 0}$, а

$$N_{\varphi\perp} = \sqrt{2\pi \Big/ \left(\Phi^\pm(\varphi_{\perp s})\right)''} e^{\mp i\pi/4} = \sqrt{\pi \Big/ \left(kR_{01}\alpha_\perp \xi_0^2\right)} e^{\mp i\pi/4}. \qquad (34)$$

Поскольку $-\varphi_{\perp 0} \le \varphi_{\perp s} \le \varphi_{\perp 0}$ и $\varphi_1 - \varphi_{\perp s} = \pi$, для значений азимутального угла φ_1 волнового вектора $\bar{\chi}_1$, лежащих вне интервала $[\pi - \varphi_{\perp 0}, \pi + \varphi_{\perp 0}]$, вклад стационарных точек $\varphi_{\perp s}$ в пределах рассеивающей площадки отсутствует.

Обозначив множитель при $e^{i\Phi^\pm(\varphi_{\perp s})}$ в формулах (33), (33′) как $f(r_1)$ и с учетом $\Phi^\pm(\varphi_{\perp s}) \equiv \Phi^\pm(r_1)$, после подстановки $I_{\varphi\perp}$ в формулу (6) произведем в ней интегрирование по r_1:

$$I_{r1} = \int\limits_{r_{1l}}^{r_{1u}} \mathrm{d}r_1 r_1 f(r_1) e^{i\Phi^\pm(r_1)}. \qquad (35)$$

Стационарное по r_1 значение фазы определено условием

$$\frac{\mathrm{d}\Phi^\pm}{\mathrm{d}r_1} = \mp 2k \left(\frac{r_1}{R_{01}} - \xi_0^2 \right) = 0. \qquad (36)$$

Откуда стационарное значение $\alpha_{\perp s} = \left(\dfrac{r_1}{R_{01}} \right)_s$ равно

$$\alpha_{\perp s} = \xi_0^2. \qquad (37)$$

При этом

$$\Phi^\pm(r_{1s}) \equiv 0, \qquad (38)$$

а вторая производная

$$\left(\Phi^\pm(r_{1s})\right)'' = \mp \frac{2k}{R_{01s}} \alpha_{zs}^2 \lessgtr 0, \qquad (39)$$

$$N_{r1} = \sqrt{2\pi \Big/ \left(\Phi^\pm(r_{1s})\right)''} e^{\mp i\pi/4} = \sqrt{\frac{\pi R_{01s}}{k}} \frac{1}{\alpha_{zs}} e^{\mp i\pi/4}. \qquad (40)$$

Для "большой" площадки (Приложение, случай а), когда можно пренебречь вкладом окрестностей концевых точек интегрирования r_{1l}, r_{1u} по сравнению с вкладом всего интервала $\Delta r_{ul} = r_{1u} - r_{1l}$, получаем

$$I_{r1} \approx N_{r1} f(r_{1s}) r_{1s}, \quad \text{если} \quad \chi_{1l} \le \chi_1 \le \chi_{1u}, \qquad (41)$$

где $\chi_{1l} = 2k \dfrac{r_1}{R_{01}}$ при $r_1 = r_{1l}$ и $\chi_{1u} = 2k \dfrac{r_1}{R_{01}}$ при $r_1 = r_{1u}$ определяются условием стационарности (37). Для значений χ_1, лежащих вне этого интервала, $I_{r1} \approx 0$.

Для "маленькой" площадки (Приложение, случай г):

$$I_{r1} \cong \Delta r_{ul} f(r_{1s}) r_{1s}, \quad \text{если} \quad \chi_{1l} \le \chi \le \chi_{1u}. \qquad (42)$$

Вне указанного интервала значений χ_1 стационарные значения r_{1s} лежат за пределами рассеивающей площадки.

Подставляя результат асимптотических оценок I_{r1} в формулу (6) для $B^\pm(0)$, получим

$$B^\pm(0) = \int\limits_{\varphi_{1l}}^{\varphi_{1u}} \mathrm{d}\varphi_1 \int\limits_{\chi_{1l}}^{\chi_{1u}} \mathrm{d}\chi_1 \chi_1 f_B(\chi_1, \varphi_1) N_B, \qquad (43)$$

где

$$f_B(\chi_1,\varphi_1)=\frac{\sigma^2}{4(4\pi)^2 4}r_{1s}\frac{|I_{12}|^2}{R_{01s}^4}\left|\tilde{I}_{01}(\chi_1)\right|^2\sum_{j=\pm}\tilde{W}_j(\vec{\chi}_1). \tag{44}$$

Для случая "большой" площадки

$$N_B=N_{\rho 1}e^{\pm i\pi/2}N_{\varphi\perp}N_{r1}=\frac{R_{01s}\pi^2}{k^2\alpha_{\perp s}\alpha_{zs}^2}, \tag{45}$$

а для случая "маленькой"

$$N_B=N_\rho e^{\pm i\pi/2}\Delta\varphi_{ul}\Delta r_{ul}=\frac{R_{01s}\pi^2}{k^2\alpha_{\perp s}\alpha_{zs}^2}\frac{\Delta\varphi_{ul}}{|N_{\varphi\perp}|}\frac{\Delta r_{ul}}{|N_{r1}|}e^{\pm i\pi/2}. \tag{46}$$

Поскольку $\varphi_1=\varphi_{\perp s}+\pi$, а $\vec{\chi}_1=2k\vec{\alpha}_{\perp s}$, где $\alpha_{\perp s}=\left(r_1/R_{01}\right)_s$, можно от переменных интегрироваться φ_1, χ_1 в (43), перейти к переменным $\varphi_{\perp s}$, r_{1s}, опустив для краткости индекс "s". В результате формула (43) преобразуется к виду:

$$B^\pm(0)\approx\frac{\sigma^2}{64}\times$$
$$\times\int\limits_{-\varphi_{\perp 0}}^{\varphi_{\perp 0}}\mathrm{d}\varphi_\perp\int\limits_{r_{1l}}^{r_{1u}}\mathrm{d}r_1 r_1\frac{|I_{12}|^2}{R_{01}^4}\left|\tilde{I}_{01}(-2k\vec{\alpha}_\perp)\right|^2\sum_{j=\pm}\tilde{W}_j\left(-2k\vec{\alpha}_\perp\right). \tag{47}$$

При этом учтено, что $\dfrac{\mathrm{d}\chi_1}{\mathrm{d}r_{1s}}=\dfrac{2k}{R_{01s}}\alpha_{zs}^2.$

Для "маленькой" площадки $B^\pm(0)$ будет отличаться от (47) множителем

$$\sqrt{2}\frac{R_{01}\Delta\varphi_{ue}\alpha_\perp}{r_{Fr}}\frac{\Delta r_{ul}}{\left(r_{Fr}/\alpha_z\right)}\sqrt{2}e^{\pm i\pi/2}=2\frac{S}{r_{Fr}\left(r_{Fr}/\alpha_z\right)}e^{\pm i\pi/2}, \tag{48}$$

где $S=R_{01}\alpha_\perp\Delta\varphi_{ul}\left(\Delta r_{ul}/2\right)$ – площадь рассеивающей площадки, а $\dfrac{r_{Fr}^2}{2\alpha_z}\equiv\dfrac{\lambda R_{01}}{2\alpha_z}$ с точностью до π есть площадь эллиптической зоны Френеля.

Обращаясь к выражению (5), для интенсивности $B(0)$ получим в случае "большой" площадки

$$B(0)\approx\frac{\sigma^2}{8}\iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1\frac{|I_{12}|^2}{R_{01}^4}\left|\tilde{I}_{01}(-2k\vec{\alpha}_\perp)\right|^2\tilde{W}(-2k\vec{\alpha}_\perp), \tag{49}$$

где $\tilde{W}(\vec{\chi}_1)=\dfrac{1}{2}\left[\tilde{W}_+(\vec{\chi}_1)+\tilde{W}_-(\vec{\chi}_1)\right]$ – симметричный спектр волновых векторов ([6], с. 79). Сравнение показывает, что (49) отличается от формулы (14) из [2] множителем $1/2$, о котором шла речь в начале этой статьи.

Для "маленькой" площадки из-за наличия фазового множителя $e^{\pm i\pi/2}$ приходим к значению $B^+(0)+B^-(0)\sim 2\cos(\pi/2)\equiv 0$, из-за чего получаем физически бессмысленный результат $B(0)\approx 0$. Он отражает противоречие между предположением о возможности интегрирования по $\vec{\rho}$ в (6) в бесконечных пределах и малостью (по сравнению с соответствующими френелевскими размерами) площадки S. Возможно, такое предположение совместимо лишь с одновременной линеаризацией разложения фазы в степенной ряд по $\vec{\rho}$, т. е. рассмотрением рассеяния в приближении дифракции Фраунгофера. Поскольку мы рассматриваем рассеяние в ближней зоне (зоне дифракции Френеля), в дальнейшем будем интересоваться только случаем "большой" площадки. Обсуждение границ применимости выражения (49) отложим до вычисления частотного спектра, а здесь прокомментируем суть полученного результата.

При заданной геометрии задачи обратного рассеяния главный вклад в разложение $B(0)$ в асимптотический ряд по степеням $(kR_{01})^{-1}$ дает рассеяние на "случайных периодических решетках" поля случайных неровностей $(\sim e^{i\vec{\chi}_1\vec{\rho}})$, которые образуют резонансную структуру по отношению к волновому полю $\sim e^{i2kR_{01}}$ в малой окрестности стационарной точки $\vec{r}_{1s}$, определяемой условием $2k\vec{\alpha}_{\perp s}+\vec{\chi}_1=0$.

Фаза $\Phi^\pm(\vec{\rho})$ в интеграле (15) с точностью до членов $O\left(k\rho^2/R_{01}\right)$, с учетом условия стационарности $\vec{r}_{1s}$, обращается в нуль, вследствие чего волны, рассеянные отдельными частями этой окрестности, складываются синфазно. С удалением $\vec{r}_1$ от $\vec{r}_{1s}$ происходит расфазировка сферических волн по отношению к фазе "плоской решетки" $e^{i\vec{\chi}_1\vec{\rho}}$ с данным фиксированным $\vec{\chi}_1$, приводящая к быстрому нарастанию частоты осцилляций подинтегрального выражения. Вследствие расфазировки вклады в рассеянное поле от отдельных элементов поверхности за пределами окрестности $\vec{r}_{1s}$ взаимно погашаются.

В итоге конечный результат определяется теми составляющими пространственного спектра $\tilde{W}_j(\chi_1)$ неровностей, волновые векторы $\vec{\chi}_1 = -2k\vec{\alpha}_\perp$ которых обеспечивают местонахождение стационарных точек в пределах рассеивающей площадки S.

Приложение.

Асимптотическая оценка интеграла I_{r_1}, учитывающая близость стационарной точки к концевой точке контура интегрирования согласно [8] (с. 463-466, 519, 520), выглядит следующим образом:

$$I_{r_1} \approx e^{i\Omega\hat{q}(r_{1s})}\left\{\frac{f(r_{1s})h_s}{\sqrt{\Omega}}\left[Q\left(\hat{s}_l\sqrt{\Omega}e^{\mp i\pi/4}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-Q\left(\hat{s}_u\sqrt{\Omega}e^{\mp}e^{i\pi/4}\right)\right]+O_l\left(\Omega^{-1/2}\right)+O_u\left(\Omega^{-1/2}\right)\right\},$$
$$\hat{q}''_{(r_{1s})} \gtrless 0. \tag{П1}$$

Здесь $\Omega\hat{q}(r_1) \equiv \Phi^{\pm}(r_1)$, $\Omega\hat{q}''(r_1) \equiv \left(\Phi^{\pm}(r_{1s})\right)''$, а $\Omega \gg 1$ – параметр, который можно выделить в явном виде, учитывая зависимость (45) от $kR_{01} \gg 1$;

$$O_l\left(\Omega^{-1/2}\right) = \frac{e^{\pm i(\Omega\hat{s}_l+\pi/4)}}{2\Omega\hat{s}_l}\left[f(r_{1l})h_l - f(r_{1s})h_s\right] \text{ –} \tag{П2}$$

поправочный член $\sim\Omega^{-1/2}$ к первому слагаемому, учитывающий близость стационарной точки к нижнему пределу интегрирования. Аналогичный член $O_u\left(\Omega^{-1/2}\right)$, учитывающий близость верхнего предела, получается из (П2) заменой "перевального" расстояния $\hat{s}_l$ на $\hat{s}_u$,

$$\hat{s}_l = \pm\left|\hat{q}(r_{1s}) - \hat{q}(r_{1l})\right|^{1/2} \quad \text{при} \quad (r_{1l} - r_{1s}) \gtrless 0. \tag{П3}$$

Расстояние $\hat{s}_u$ получается из (П3) заменой $r_{1l} \to r_{1u}$. Остальные величины, входящие в (П2), имеют вид [8]:

$$h_s = \sqrt{\frac{2}{\left|\hat{q}''(r_{1s})\right|}}e^{\pm i\pi/4}, \qquad h_l = \frac{2\left|\hat{s}_l\right|e^{\pm i\pi/4}}{\left|\hat{q}''(r_{1l})\right|} \tag{П4}$$

при $\hat{q}''(r_{1s}) \gtrless 0$,

$f(r_1)$ – это произведение всех сомножителей при $\exp\left[i\Phi^{\pm}(r_1)\right]$ в выражении (35); $Q(y) = \int\limits_y^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erfc}(y)$ – дополнение интеграла вероятностей (с точностью до множителя $\sqrt{\pi/2}$).

В ходе дальнейших вычислений ограничимся основным членом асимптотики в (П1), отбросив $O_l\left(\Omega^{-1/2}\right)$ и $O_u\left(\Omega^{-1/2}\right)$. Воспользуемся следующими разложениями ([8], с. 121-122; [9], с. 520):

$$1)\ |y| \ll 1, \qquad Q(y) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}y + \ldots\right); \tag{П5а}$$

$$2)\ |y| \gg 1, \quad Q(y) \approx \sqrt{\pi}\Theta(-\mathrm{Re}\,y) + \frac{e^{-y2}}{2y} + \ldots. \tag{П5б}$$

Здесь $\Theta(x)$ – единичная функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$ и единице при $x > 0$.

В общем случае возможны следующие комбинации расположения на интервале $[r_{1l}, r_{1u}]$ стационарной точки r_{1s}, дающей вклад на данной частоте ω:

а) $\sqrt{\Omega}|\hat{s}_l|, \sqrt{\Omega}|\hat{s}_u| \gg 1$ – стационарная точка расположена далеко от концов контура интегрирования;

б) $\sqrt{\Omega}|\hat{s}_l| \ll 1$, $\sqrt{\Omega}|\hat{s}_u| \gg 1$ – стационарная точка вблизи левого края интервала интегрирования и далеко от правого;

в) $\sqrt{\Omega}|\hat{s}_l| \gg 1$, $\sqrt{\Omega}|\hat{s}_u| \ll 1$ – случай противоположный б);

г) $\sqrt{\Omega}|\hat{s}_l|, \sqrt{\Omega}|\hat{s}_u| \ll 1$ – случай “маленькой” площадки, когда оба конца контура интегрирования близки к стационарной точке.

Физический смысл этих критериев будет виден ниже.

В случае а), используя разложение (П5б), для I_{r_1} получаем главный член асимптотики в виде:

$$I_{r_1} \approx \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} e^{i\Omega\hat{q}(r_{1s})} f(r_{1s}) h_s. \qquad (\text{П6})$$

В случаях б) и в) главный член асимптотики равен

$$I_{r_1} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\Omega\hat{q}(r_{1s})} f(r_{1s}) h_s. \qquad (\text{П7})$$

В случае г) для “маленькой” площадки, используя разложение (П5а), получаем

$$I_{r_1} \approx \Delta r_{ul} e^{i\Omega\hat{q}(r_{1s})} f(r_{1s}) \left(h_s / |h_s|\right), \qquad (\text{П8})$$

где $\Delta r_{ul} = r_{1u} - r_{1l}$ – продольный размер рассеивающей площадки. При получении (П8) использовано приближенное разложение

$$Q(y_l) - Q(y_y) \cong y_u - y_l \equiv (\hat{s}_u - \hat{s}_l)\sqrt{\Omega} e^{\mp i\pi/2} \cong$$

$$\cong \sqrt{\Omega} e^{\mp i\pi/4} \left| -\frac{\hat{q}''_{(r_{1s})}}{2} \right|^{1/2} \left[|r_{1s} - r_{1u}| + |r_{1s} - r_{1l}| \right] =$$

$$= h_s^{-1} \Delta r_{ul} \sqrt{\Omega}. \qquad (\text{П9})$$

Условие малости “перевального” расстояния $\sqrt{\Omega}|\hat{s}_\mu| \ll 1$ для точки $r_{1\mu}$ означает

$$\sqrt{\Omega} \left| \frac{\hat{q}''_{(r_{1s})}}{2} \right|^{1/2} |r_{1s} - r_{1\mu}| \ll 1, \qquad (\text{П10})$$

что можно получить, раскладывая (П3) в ряд Тейлора в окрестности $r_1 = r_{1s}$ и учитывая $\hat{q}'(r_{1s}) = 0$. Подставляя в (П10) выражение (39), получаем критерий “малости” для $\Delta r_{s\mu} = |r_{1s} - r_{1\mu}|$:

$$\Delta r_{s\mu} \ll \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{r_{Fr}}{\cos\theta_{01s}}. \qquad (\text{П11})$$

При этом учтено, что $\xi_0^4 = \alpha_\perp^2$, а $1 - \xi_0^4 = \alpha_z^2 = \cos^2\theta_{01s}$, и введен радиус френелевской зоны $r_{Fr} = \sqrt{\lambda R_{01s}/2}$.

Смысл ограничения (П11) можно уяснить, разложив фазу сферической волны $2kR'_{01} = 2k|\vec{R}_{01} + \vec{\rho}|$ по степеням ρ/R_{01} вблизи значения $2kR_{01}$:

$$2(kR'_{01} - kR_{01}) \cong 2k\rho_l + k\frac{\rho_t^2}{R_{01}} + \ldots, \qquad (\text{П12})$$

где $\vec{\rho}_l$ и $\vec{\rho}_t$ – продольная и поперечная по отношению к $\vec{R}_{01}$ составляющие $\vec{\rho} = \vec{\rho}_l + \vec{\rho}_t$, что означает $\vec{\rho}_l\vec{R}_{01} = \rho_l R_{01}$, $\vec{\rho}_t\vec{R}_{01} = 0$.

Условием малости сферической поправки в (П12) является требование

$$k\frac{\rho_t^2}{R_{01}} \ll 1. \qquad (\text{П13})$$

При интегрировании в (35) векторы $\vec{R}'_{01}$, $\vec{R}_{01}$ и $\vec{i}_z$ лежат в одной плоскости, так что $\rho_t = \rho\cos\theta_{01}$, $\rho_l = \rho\sin\theta_{01}$.

Поэтому из (П13) получаем

$$\rho \ll \sqrt{\frac{\lambda R_{01}}{2\pi}} \frac{1}{\cos\theta_{01}}, \qquad (\text{П14})$$

что полностью совпадает с (П11).

Таким образом, малость “перевального” расстояния $\sqrt{\Omega}\left|\hat{s}_{\mu}\right|$ для точки $r_{1\mu}$ означает, что она должна находится в одной зоне Френеля с перевальной точкой r_{1s}.

Литература

1. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. I. Флуктуации поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №4. – С. 399-409.
2. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. II. Средняя интенсивность и частотный спектр флуктуаций поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2008. – Т. 13, №1. – С. 92-98
3. Крюковський Л. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А., Растягаев Д. С. Волновые катастрофы-фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн (обзор) // Радиотехника и электроника. – 2006. –Т. 51, №10. – С. 1155-1192.
4. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1966. – 404 с.
5. Харкевич А. А. Спектры и анализ. – М.: Физматизд, 1962. – 236 с.
6. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. –Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 373 с.
7. Анютин А. П., Боровиков В. А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с особенностями внеэкспоненциального множителя: Препр. /АН СССР. ИРЭ; №42 (414). – Москва: 1984. – 53 с.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 547 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 831 с.

Розсіяння хвиль у ближній зоні статистично нерівної поверхні. III. Часова кореляційна функція та інтенсивність у випадку похилого зондування з однопозиційною локацією

А. С. Брюховецький

Отримано асимптотики багатократних швидкоосцилюючих інтегралів, що визначають кореляційну функцію та інтенсивність розсіяного поля з однопозиційною локацією статистично шорсткої поверхні. Для цього використано метод стаціонарної фази, що відповідає випадку ізольованих стаціонарних точок. Досліджено граничний перехід до відомого в літературі результату.

Wave Scattering in Near Zone of a Statistically Rough Surface. III. Time Correlation Function for the Case of Oblique Incidence for a One-Position Location

A. S. Bryukhovetski

The asymptotics are obtained of the multiple rapidly-oscillating integrals determining the correlation function and intensity of a field scattered by a statistically rough surface for a one-position location. For this purpose, the saddle-point method meeting the case of the isolated saddle-points is used. The transitions to the known in literature result is analyzed.