

## Вигнер-анализ модельных сигналов с особенностями

О. В. Вишнивецкий, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор<sup>1</sup>

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61166, Украина  
E-mail: Oleg-Lazorenko@yandex.ru*

*<sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4 г. Харьков, 61077, Украина,  
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 14 марта 2008 г.*

Изучена целесообразность использования преобразования Вигнера (ПВ) для анализа сигналов с особенностями. Проведено сравнение результатов ПВ модельных сигналов с особенностями с результатами, полученными с помощью спектрограммы Фурье (СФ), непревывного (НВП) и аналитического (АВП) вейвлет-преобразований. Показаны преимущества и недостатки ПВ в сравнении со СФ, НВП и АВП при обработке таких сигналов. Преимуществом ПВ является хорошее время-частотное разрешение, а недостатками – нелокальность характера функции спектральной плотности и возникновение интерференции при анализе многокомпонентных сигналов. Результаты численных расчетов представлены в специальном формате. Вигнер-анализ сигналов с особенностями рекомендуется проводить одновременно с анализом этих сигналов с помощью СФ, НВП и АВП, что позволяет получить более полную информацию о время-частотном содержании исследуемых сигналов.

### Введение

Все более широкое применение новых видов сигналов (например, сверхширокополосных, фрактальных, и др.) в различных областях науки и техники требует использования новых математических методов для их обработки [1-3]. Традиционные методы, основанные на преобразовании Фурье, не позволяют достаточно точно выявлять наличие и положение локальных особенностей сигналов вследствие неограниченности базисных функций и недостаточного время-частотного разрешения. Первый недостаток может быть устранен посредством применения вейвлет-анализа, хотя и в этом случае сохраняется определенная доля субъективизма, так как полученный результат зависит от конкретной использованной базисной функции – вейвлета. Возможности вейвлет-анализа для выявления

различных особенностей сигналов подробно описаны в [4, 5]. Для преодоления трудностей, связанных со вторым недостатком, представляется целесообразным использовать преобразование Вигнера (ПВ), которое имеет хорошее разрешение на время-частотной плоскости и позволяет эффективно выявлять особенности время-частотной структуры сигналов (см, например, [6-9]).

Целью настоящей работы является рассмотрение возможностей, достоинств и недостатков ПВ при анализе различных модельных сигналов с особенностями, которые встречаются при обработке экспериментально полученных временных рядов.

Добавим, что для корректного истолкования результатов применения ПВ к реальным сигналам, которые отличаются нестационарностью и шумоподобным характером, целесообразно сначала создать специальный банк

результатов ПВ для своего рода эталонных сигналов, в том числе эталонных сигналов с особенностями. Другими эталонными сигналами были простейшие сигналы, сигналы на основе атомарных функций и нелинейные сигналы, рассмотренные в [9, 10].

### 1. Основные понятия и соотношения

Для проведения анализа будем использовать модели сигналов с особенностями, приведенные в [4, 5]:

1) бесконечно короткий импульс ( $\delta$ -функция Дирака),

$$s_1(t) = A\delta(t - t_0);$$

2) импульс конечной ширины,

$$s_2(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon], \\ A/(2\varepsilon), & t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon], \end{cases}$$

где  $A$  и  $\varepsilon$  – амплитуда и полуширина импульса соответственно (при  $\varepsilon \rightarrow 0$  эта функция превращается в  $\delta$ -функцию);

3) наложение импульсной помехи на гармонический сигнал,

$$s_3(t) = A\delta(t - t_0) + B \sin \omega_0 t;$$

4) резкий скачок амплитуды,

$$s_4(t) = A\Theta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ A, & t \geq t_0, \end{cases}$$

где  $\Theta(t)$  – функция Хэвисайда;

5) резкий скачок фазы гармонического сигнала,

$$s_5(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & t < t_0, \\ A \sin(\omega_0 t + \Delta\varphi), & t \geq t_0; \end{cases}$$

6) резкий скачок частоты гармонического сигнала,

$$s_6(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & t < t_0, \\ A \sin[\omega_1(t - t_0) + \omega_0 t_0 (1 - F(\omega_0, \omega_1))], & t \geq t_0, \end{cases}$$

где  $F(\omega_0, \omega_1) = 1 - \frac{1}{\omega_0 t_0} \arccos\left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \cos \omega_0 t_0\right)$ ;  
7) излом,

$$s_7(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ A(t - t_0), & t_0 \leq t \leq t_1, \\ A(t_1 - t_0), & t > t_1; \end{cases}$$

8) производная  $\delta$ -функции,

$$s_8(t) = A\delta'(t - t_0);$$

9) сумма производной  $\delta$ -функции и гармонического сигнала,

$$s_9(t) = A\delta'(t - t_0) + B \sin \omega_0 t;$$

10) вертикальный перегиб,

$$s_{10}(t) = A\sqrt[3]{t - t_0};$$

11) шпиль,

$$s_{11}(t) = A\sqrt{|t - t_0|};$$

12) наложение шпилья на гармонический сигнал,

$$s_{12}(t) = A\sqrt{|t - t_0|} + B \sin \omega_0 t.$$

Преобразование Вигнера, как известно, задается соотношением [6-8]:

$$P_V f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\tau + \frac{t}{2}\right) s^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt,$$

где  $P_V f(\omega, \tau)$  – функция спектральной плотности (ФСП) ПВ, знак “\*” означает операцию комплексного сопряжения.

Результаты применения ПВ к модельным сигналам с особенностями будем сравнивать с результатами, полученными с помощью spectroграммы Фурье (СФ), которая записывается в виде [7, 8]:

$$P_S f(\omega, \tau) = |Sf(\omega, \tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t)w(t-\tau)\exp(-i\omega t)dt \right|^2,$$

где  $P_S f(\omega, \tau)$  – ФСП СФ,  $w(t-\tau)$  – оконная функция динамического (оконого) преобразования Фурье.

Кроме анализа самих ФСП ПВ и ФСП СФ, будем использовать также их скелетоны – линии локальных экстремумов модуля ФСП, (скелетон состоит из отдельных хребтов), и энергограммы – распределения энергии сигнала по частотам,

$$E_V f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_V f(\omega, \tau) d\tau,$$

$$E_S f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_S f(\omega, \tau) d\tau,$$

а также среднеквадратичные отклонения ФСП:

$$\sigma_V(\omega) = \left[ \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [P_V f(\omega, \tau) - \langle P_V f(\omega, \tau) \rangle]^2 d\tau \right]^{1/2},$$

$$\sigma_S(\omega) = \left[ \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [P_S f(\omega, \tau) - \langle P_S f(\omega, \tau) \rangle]^2 d\tau \right]^{1/2},$$

где

$$\langle P_V f(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times$$

$$\times \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} P_V f(\omega, \tau) d\omega d\tau,$$

$$\langle P_S f(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times$$

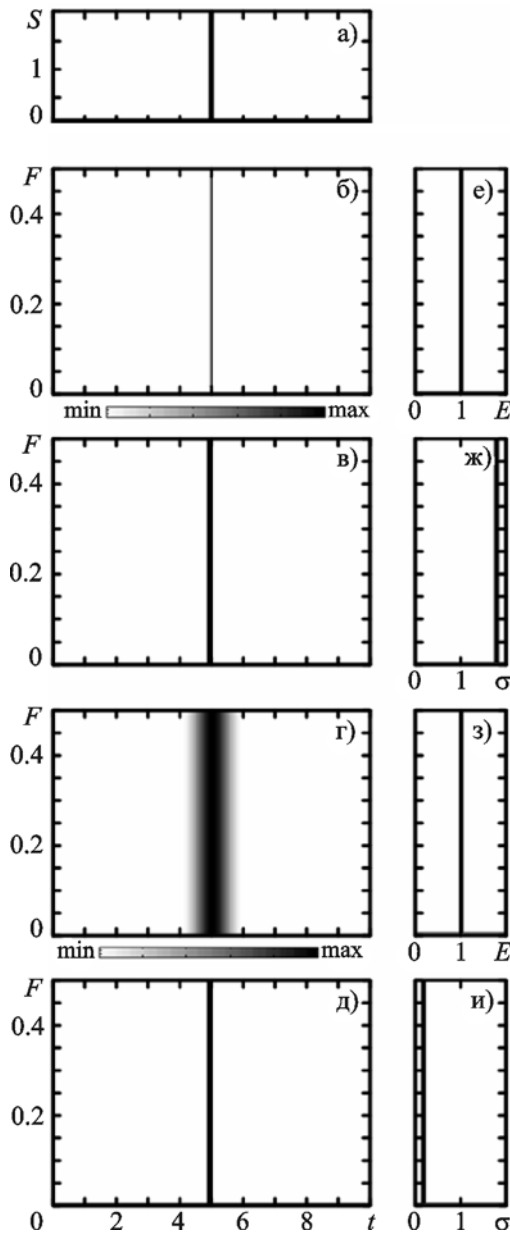
$$\times \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} P_S f(\omega, \tau) d\omega d\tau.$$

Здесь  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $\omega$  и  $\tau$ , ограничивающие область локализации ФСП ПВ  $P_V f(\omega, \tau)$  и ФСП СФ  $P_S f(\omega, \tau)$  соответственно.

## 2. Результаты численного моделирования

Результаты анализа удобно представлять в специальном формате, который был разработан авторами и уже успешно применялся ранее (см., например, [10]). На каждом рисунке сверху вниз в левой колонке представлены сигнал во временной области, ФСП и скелетоны ПВ и СФ соответственно. В правой колонке напротив ФСП ПВ и ФСП СФ расположены их энергограммы, а напротив скелетонов – соответствующие среднеквадратичные отклонения. На рисунках ФСП представлены в градациях серого цвета, причем более темный тон соответствует большему значению функции. Вычисления проводились при помощи системы компьютерной математики Matlab 7.X [11-13]. При вычислении СФ использовалась оконная функция Хемминга шириной  $N/4$ , где  $N$  – количество отсчетов сигнала. Рассмотрим полученные результаты подробнее.

На рис. 1 приведены результаты анализа модели сигнала  $s_1(t)$ . Здесь ФСП ПВ (рис. 1, б) имеет вид прямой узкой вертикальной линии в момент времени, когда появляется  $\delta$ -функция. При этом ФСП СФ (рис. 1, г) оказывается значительно шире во временной области, чем сам



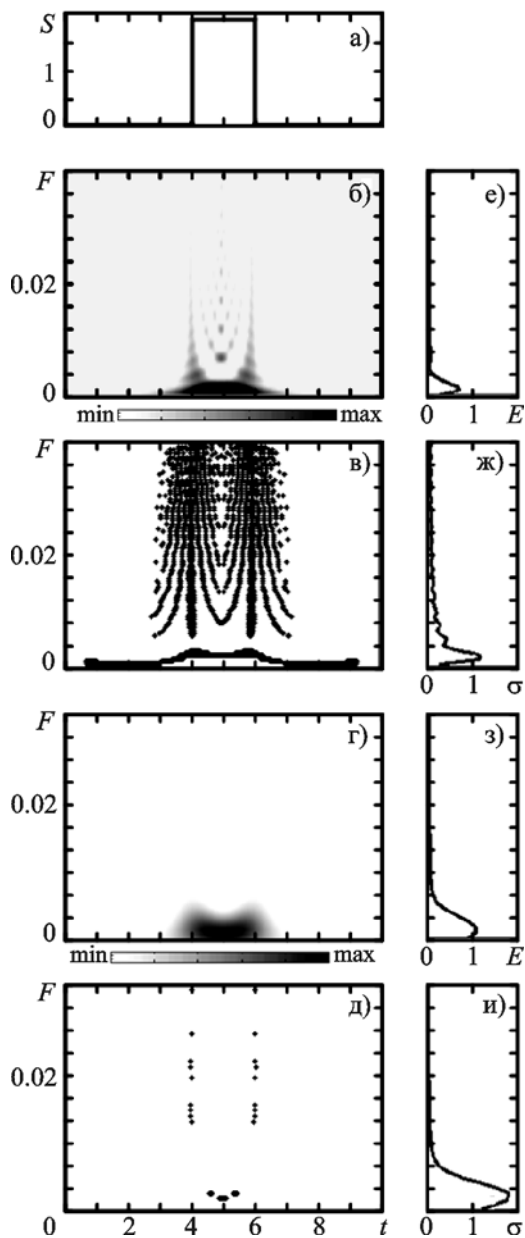
**Рис. 1.** Анализ  $\delta$ -функции Дирака: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

сигнал. Ее ширина определяется шириной оконной функции. Тем не менее по виду скелетона ФСП СФ (рис. 1, д) можно определить, что ФСП СФ имеет единственный максимум на оси частот. Этот максимум соответствует времени появления сигнала.

Анализ модели сигнала  $s_2(t)$  представлен на рис. 2. Здесь на ФСП ПВ (рис. 2, б) отчетливо просматривается локальное образование в низкочастотной области, соответствующее наличию сигнала, а также два вертикальных пика, которые отвечают началу и окончанию импульса. Между вертикальными пиками на ФСП ПВ присутствуют интерференционные максимумы. Картина ФСП СФ (рис. 2, г) для этой модели оказывается несколько размытой, без интерференционных максимумов и без вертикальных пиков. На скелетоне ФСП ПВ (рис. 2, в) также хорошо видны вертикальные линии в моменты времени, когда сигнал претерпевает резкий скачок, тогда как на скелетоне ФСП СФ (рис. 2, д) эти линии просматриваются плохо. Отметим, что на рис. 2, г полностью отсутствуют следы интерференции. Непрерывное вейвлет преобразование (НВП) для данной модели позволяет точно определить моменты времени, когда сигнал претерпевает скачки амплитуды [4]. Однако утверждать, что он представляет собой именно импульс конечной ширины, а не, например, сумму двух  $\delta$ -функций Дирака, можно только при изучении локального образования на ФСП ПВ (рис. 2, б).

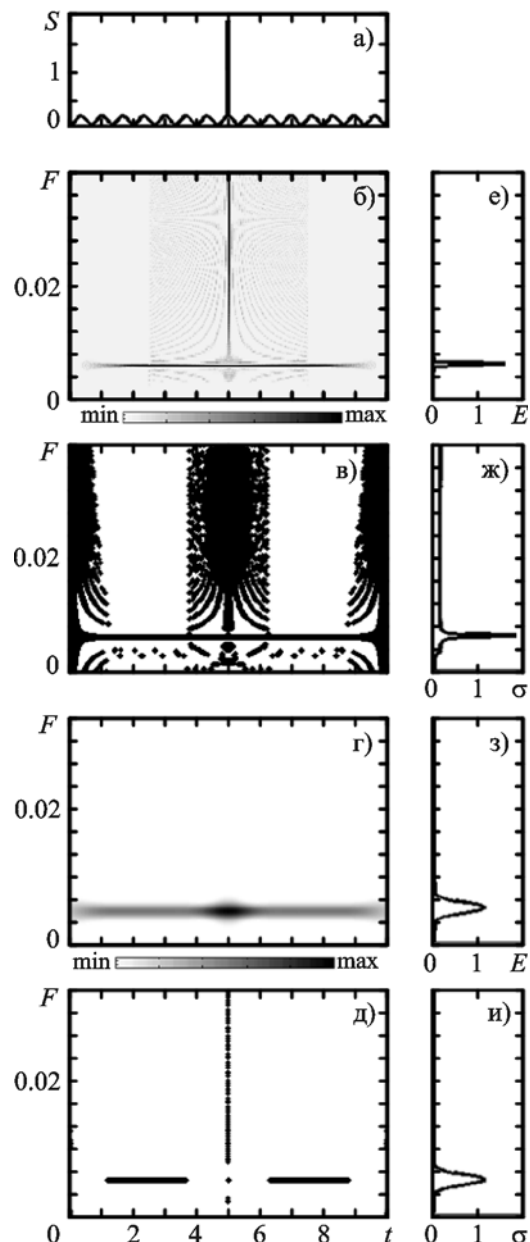
Результаты анализа модели сигнала  $s_3(t)$  приведены на рис. 3. Картина ФСП ПВ (рис. 3, б) представляет собой две пересекающиеся под прямым углом линии на время-частотной плоскости, вблизи которых присутствуют слабо выраженные полосы интерференции. При этом вертикальная линия соответствует  $\delta$ -функции Дирака (см. рис. 1), а горизонтальная – гармоническому колебанию (рис. 4). Выявление время-частотной структуры такого сигнала при помощи ФСП СФ (рис. 3, г) и ее хребтов (рис. 3, д) оказывается затруднительным, так как на плоскости ФСП СФ (рис. 3, г) вертикальная линия вообще отсутствует, а на ее хребтах (рис. 3, д) горизонтальная линия прерывается.

Рассмотрим результаты анализа модели сигнала  $s_4(t)$ , представленные на рис. 5. Эта модель интересна в первую очередь тем, что представляет собой предельный случай модели ударной волны. Здесь на ФСП ПВ



**Рис. 2.** Анализ импульса конечной ширины: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

(рис. 5, б) в момент скачка амплитуды сигнала наблюдается вертикальный пик, который также ярко выражен и на ее скелетоне (рис. 5, в). На ФСП СФ (рис. 5, г) и ее скелетоне (рис. 5, д)

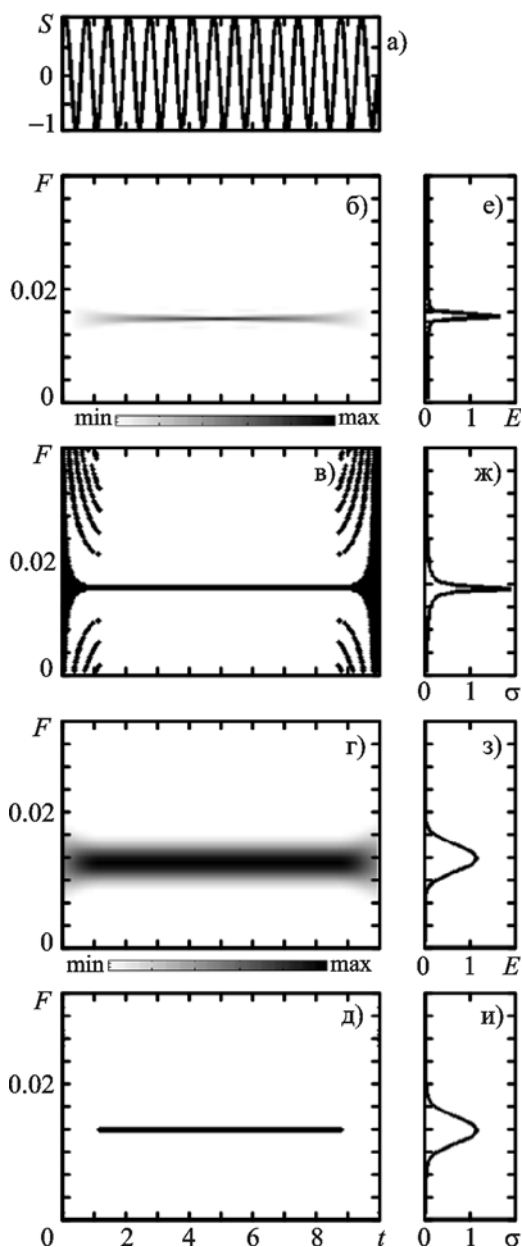


**Рис. 3.** Анализ суммы импульсной помехи и гармонического сигнала: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

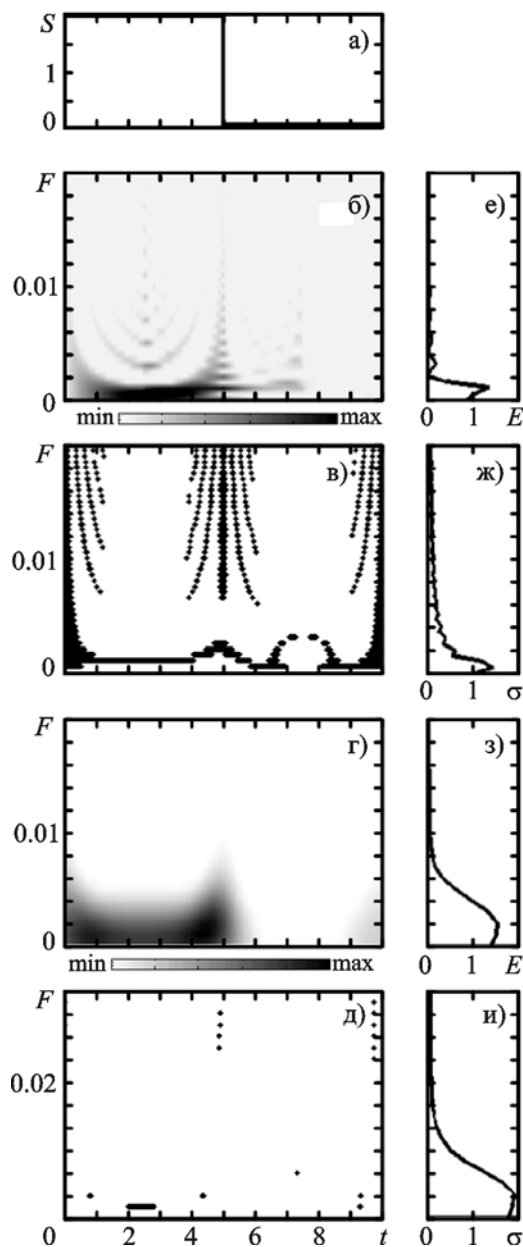
эта особенность выражена слабее. Более подробно исследования нелинейных волновых процессов, и в частности ударных волн, с помощью ПВ описаны в работе [10].

На рис. 4 и рис. 6-9 показаны результаты анализа модели сигнала  $s_5(t)$ . При этом рис. 4 соответствует гармоническому колебанию без скачка фазы, а рис. 6-9 – гармоническим коле-

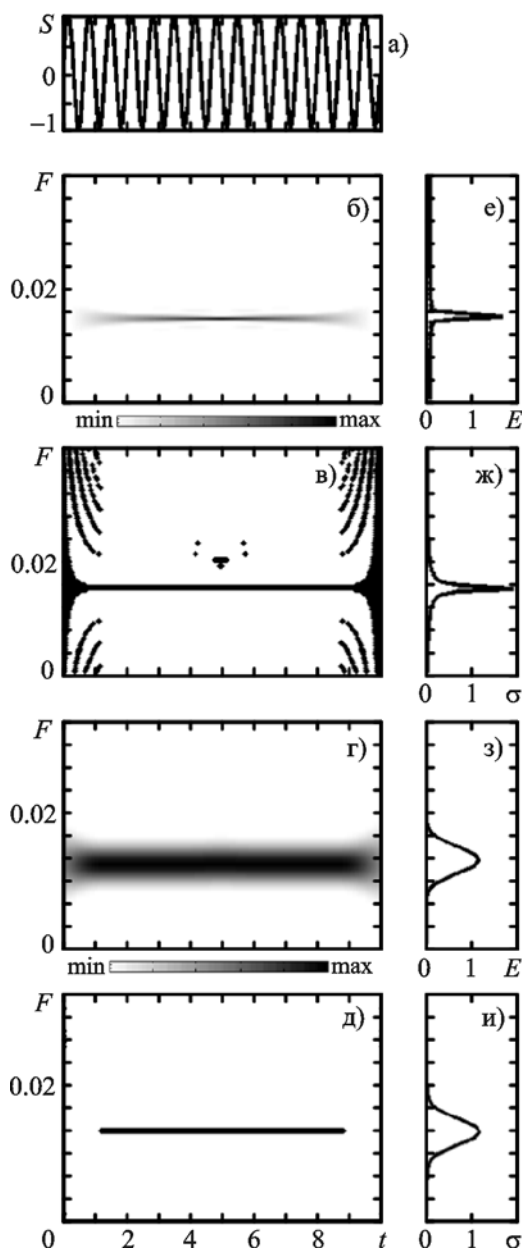
баниям со значениями скачка фазы соответственно  $\pi/64$ ,  $\pi/16$ ,  $\pi/8$  и  $\pi/4$ . Здесь, как и следовало ожидать, ФСП СФ (см. рис. 4 и рис. 6-9, г) оказывается шире в вертикальном



**Рис. 4.** Анализ гармонического сигнала без скачка фазы: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднев квадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднев квадратичное отклонение ФСП СФ

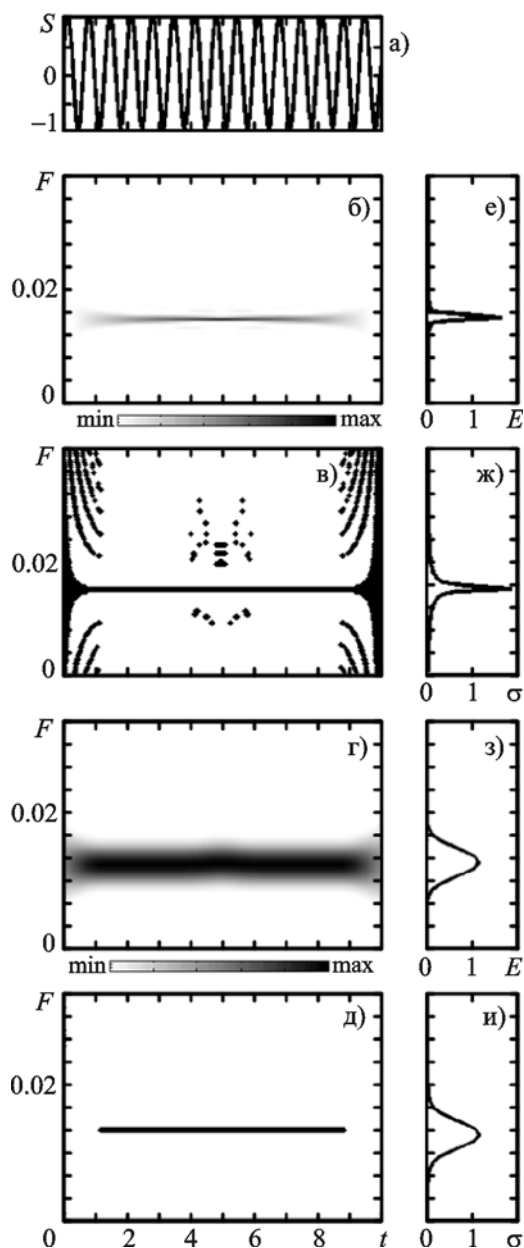


**Рис. 5.** Анализ резкого скачка амплитуды: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднев квадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднев квадратичное отклонение ФСП СФ



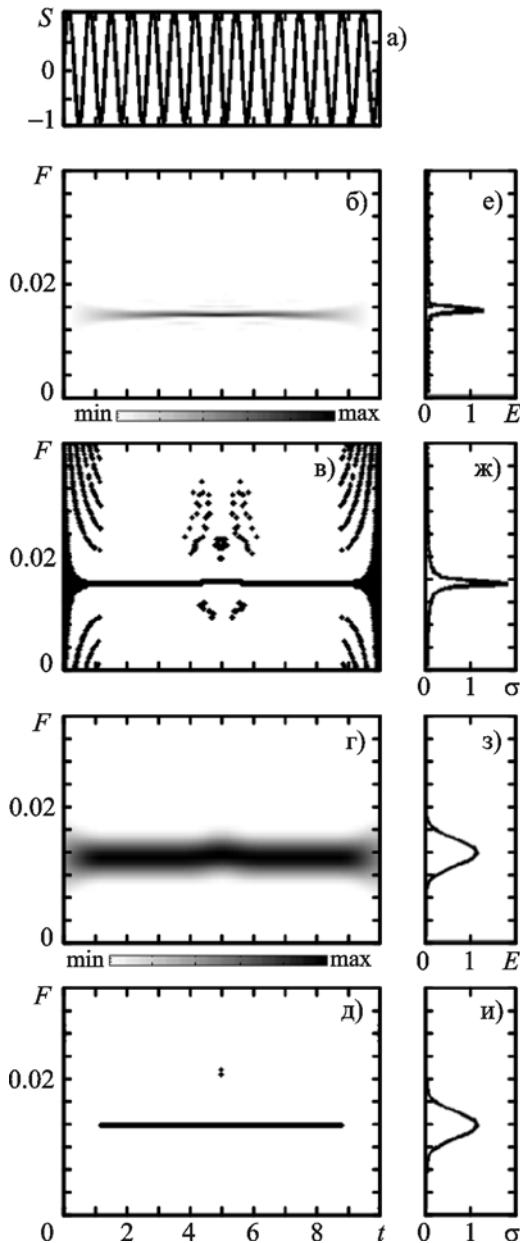
**Рис. 6.** Анализ гармонического сигнала со значением скачка фазы  $\Delta\varphi = \pi/64$ : а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

направлении по сравнению с ФСП ПВ (рис. 4 и рис. 6-9, б). Важно отметить, что при помощи хребтов ФСП ПВ можно обнаружить скачок фазы гармонического колебания уже при



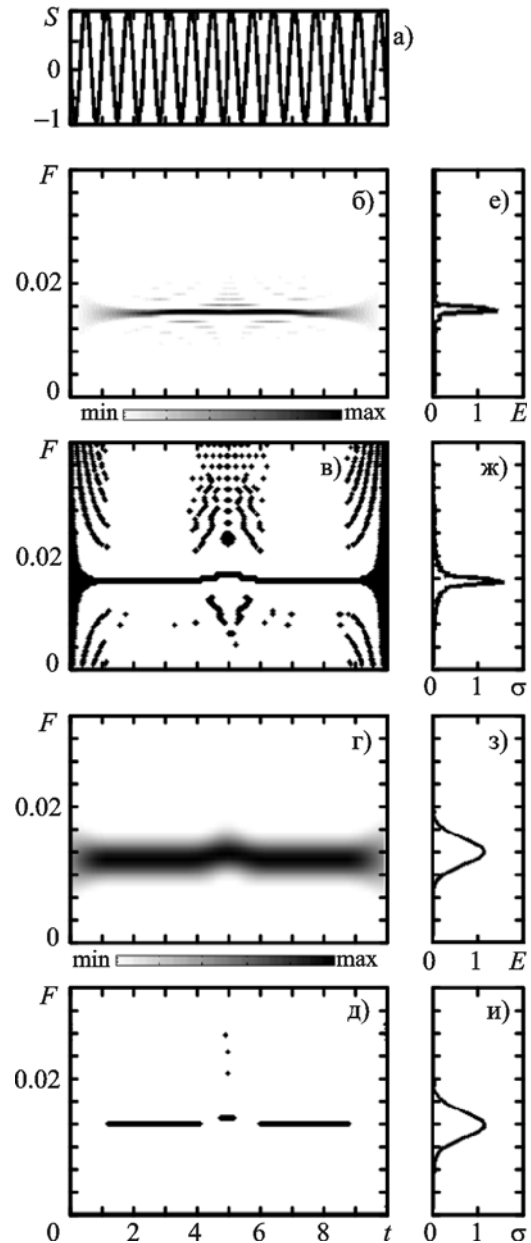
**Рис. 7.** Анализ гармонического сигнала со значением скачка фазы  $\Delta\varphi = \pi/16$ : а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

$\Delta\varphi = \pi/64$  (см. рис. 6, в). Этот результат не хуже результата, который дает для таких же условий аналитическое вейвлет-преобразование (АВП) [5]. В то же время изменения в



**Рис. 8.** Анализ гармонического сигнала со значением скачка фазы  $\Delta\varphi = \pi/8$ : а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

ФСП СФ и ее хребтах начинают проявляться только при  $\Delta\varphi \geq \pi/8$  (см. рис. 6-9, д). Обнаружение этой особенности на картине скелетона ФСП ПВ (рис. 6-9, в) несколько затруднено



**Рис. 9.** Анализ гармонического сигнала со значением скачка фазы  $\Delta\varphi = \pi/4$ : а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

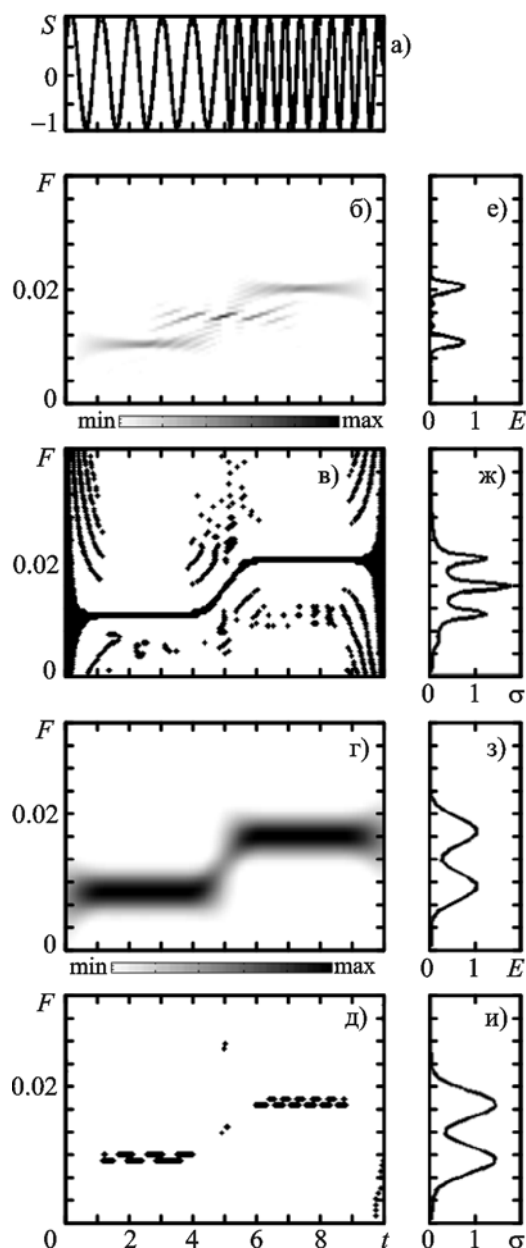
наличием интерференции. Ввиду того что хребты, отвечающие за скачок фазы, наблюдаются над горизонтальной линией (см. рис. 6-9, в), можно сделать вывод, что скачок произошел



в сторону увеличения фазы. Момент времени, когда произошел скачок фазы, более точно можно определить при помощи АВП [5]. Выраженность упомянутых хребтов возрастает с увеличением  $\Delta\varphi$ .

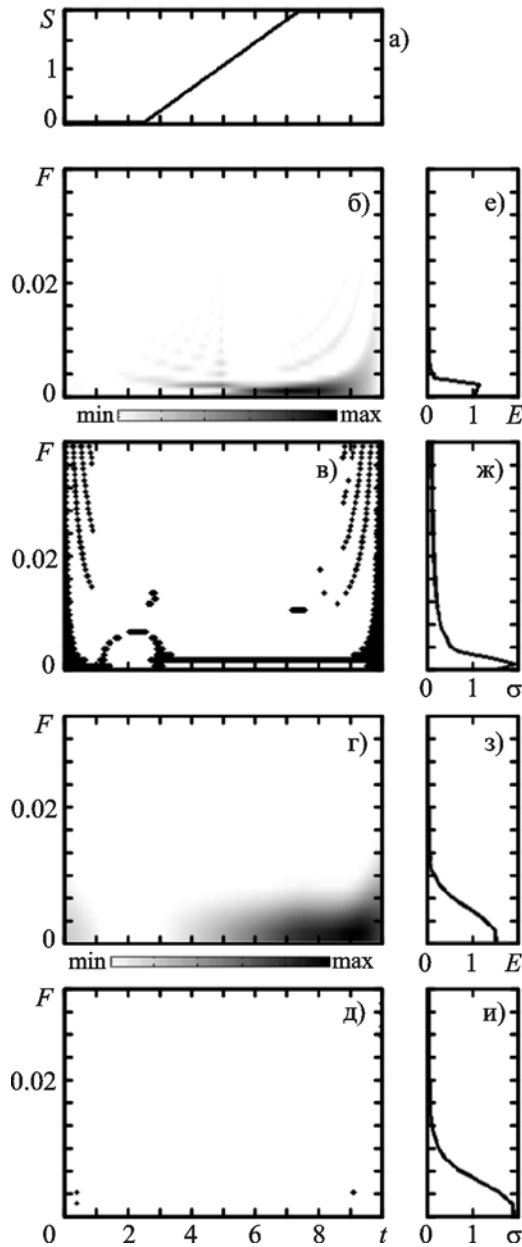
Результаты анализа модели сигнала  $s_6(t)$  представлены на рис. 10. Здесь изменение частоты гармонического колебания происходит без скачка фазы, что позволяет отделить рассматриваемый эффект от предыдущего (рис. 6-9). На плоскости ФСП ПВ (рис. 10, б) присутствуют две горизонтальные линии, соответствующие гармоническим колебаниям разной частоты, а между ними – полосы интерференционной природы. На скелетоне ФСП ПВ (рис. 10, в) отчетливо виден переход от одной частоты к другой. При этом, как и у предыдущей модели, картина хребтов ФСП ПВ зашумлена краевыми эффектами. Важно отметить, что при интерпретации скелетона ПВ в данном случае следует проявлять осторожность, поскольку на нем появляется наклонная линия, характерная для линейного чирпа (чирпом часто называют частотно-модулированный сигнал), тогда как частота здесь изменяется не линейно, а скачкообразно. На энергограмме (рис. 10, е) присутствуют два пика, соответствующие частотным составляющим спектров двух синусоид, и отсутствует пик, отвечающий за интерференцию. Это объясняется тем, что ФСП ПВ может принимать отрицательные значения, в результате чего интерференционные максимумы и минимумы, складываясь, взаимно уничтожаются. Благодаря осцилляциям ФСП ПВ, ее среднеквадратичное отклонение (рис. 10, ж) имеет больший максимум на той частоте, где наблюдается интерференция, т. е. посередине между частотными составляющими самого сигнала.

Обратимся к анализу модели сигнала  $s_7(t)$  (рис. 11). Результат оказывается несколько похожим на тот, что наблюдается для ударных волн, и в частности для модели  $f_4(t)$ . Вследствие плавного увеличения сигнала центральный пик ФСП ПВ (рис. 11, б) приходится на более низкие частоты по сравнению, например, с центральным пиком ФСП ПВ функции Хэвисайда (см. рис. 5, б). На скелетоне ФСП



**Рис. 10.** Анализ резкого скачка частоты гармонического сигнала: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

ПВ (рис. 11, в), как и на скелетоне ФСП ПВ идеальной ударной волны (см. рис. 5, в), присутствует характерная арка слева внизу. Кроме того, в начале и в конце излома видны



**Рис. 11.** Анализ излома: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

горизонтальные черточки, соответствующие скачкам производной. К сожалению, точно определить моменты времени, в которые сигнал претерпевает излом, при помощи ПВ ока-

зывается очень трудно, а при помощи СФ – невозможно. Вейвлет-анализ, наоборот, дает возможность достаточно точно найти эти моменты времени, но не позволяет определить, возрастает со временем амплитуда сигнала или убывает [4], поскольку вейвлет-преобразование константы и линейной функции всегда равно нулю (см, например, [14, 15]).

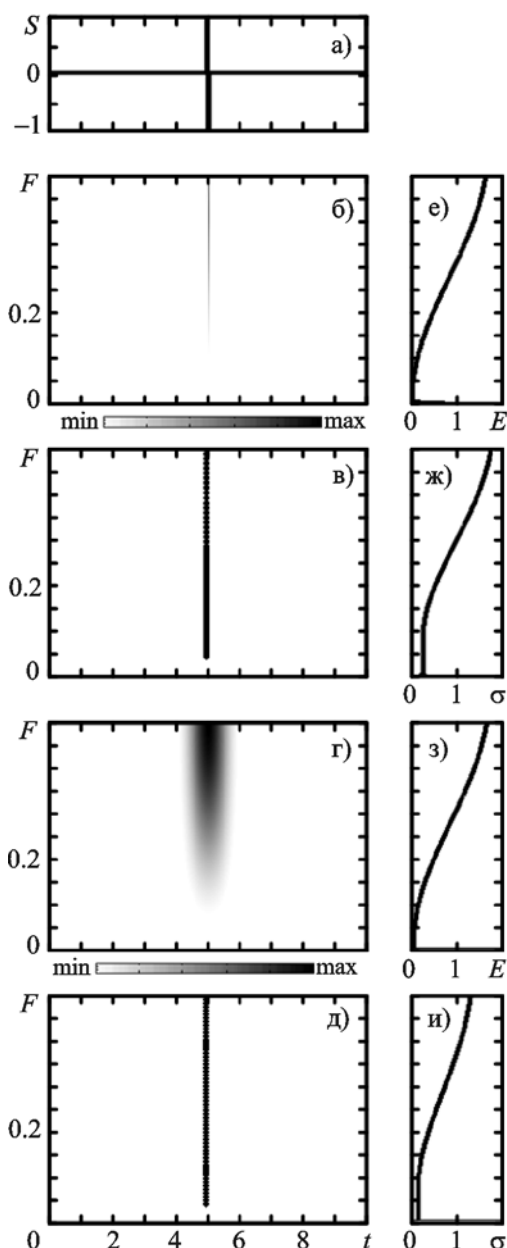
На рис. 12 представлен анализ модели сигнала  $s_8(t)$ . Она является предельным случаем СШП сигнала. Результаты анализа этой модели схожи с результатами анализа самой  $\delta$ -функции Дирака (рис. 1). Отличия заключаются в том, что как ФСП ПВ (рис. 12, б), так и ФСП СФ (рис. 12, г) стремятся к нулю в области низких частот, так как у этого сигнала отсутствует постоянная составляющая.

Результаты анализа модели сигнала  $s_9(t)$  показаны на рис. 13. Выяснить, что на гармонический сигнал накладывается не  $\delta$ -функция Дирака, а ее производная можно по виду ФСП ПВ (рис. 13, б), а также по виду скелетона ФСП СФ (рис. 13, д). На этих рисунках вертикальная линия не достигает нулевого значения частоты.

Анализ модели сигнала  $s_{10}(t)$  представлен на рис. 14. Обращает на себя внимание то, что на ФСП ПВ (рис. 14, б) в момент времени, когда происходит перегиб, наблюдается вертикальный пик, который просматривается также на скелетоне ФСП ПВ (рис. 14, в). На ФСП СФ (рис. 14, г) этот эффект выражен слабо, а на ее скелетоне (рис. 14, д) – практически отсутствует.

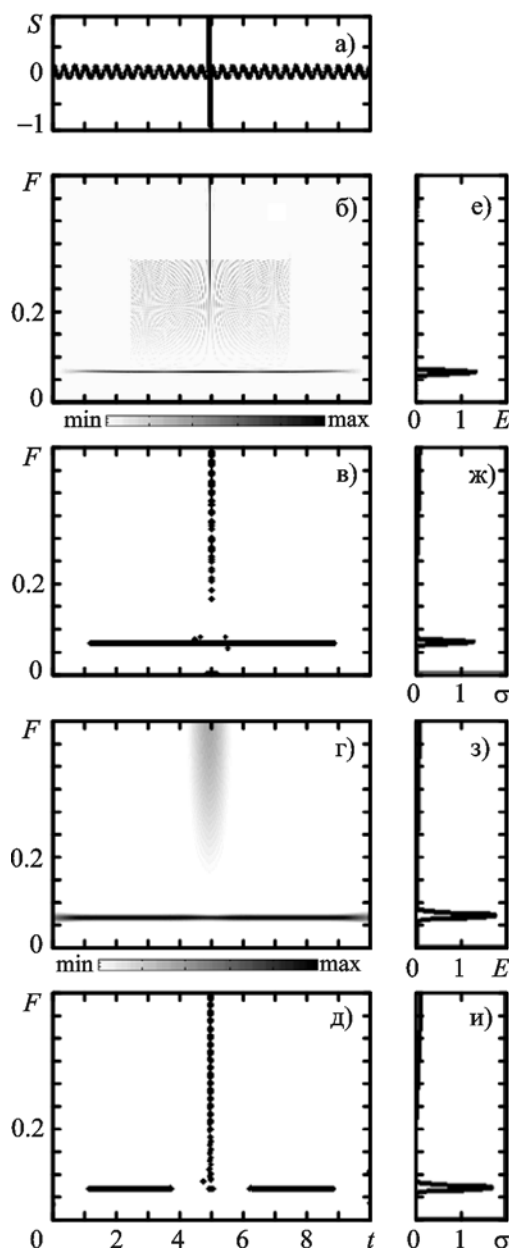
На рис. 15 приведены результаты анализа модели сигнала  $s_{11}(t)$ . На ФСП ПВ (рис. 15, б) просматривается локальное образование в низкочастотной области с небольшим вертикальным пиком. При этом ФСП СФ (рис. 15, г) оказывается схожей с ФСП ПВ, но более размытой. Кроме того, на скелетоне ФСП ПВ (рис. 15, в) присутствуют максимумы, отвечающие за резкий скачок производной сигнала.

Рассмотрим результаты анализа модели сигнала  $s_{12}(t)$  (рис. 16). Здесь на ФСП ПВ, ее скелетоне, а также на ФСП СФ (рис. 16, б-г) отчетливо видна горизонтальная линия, соот-



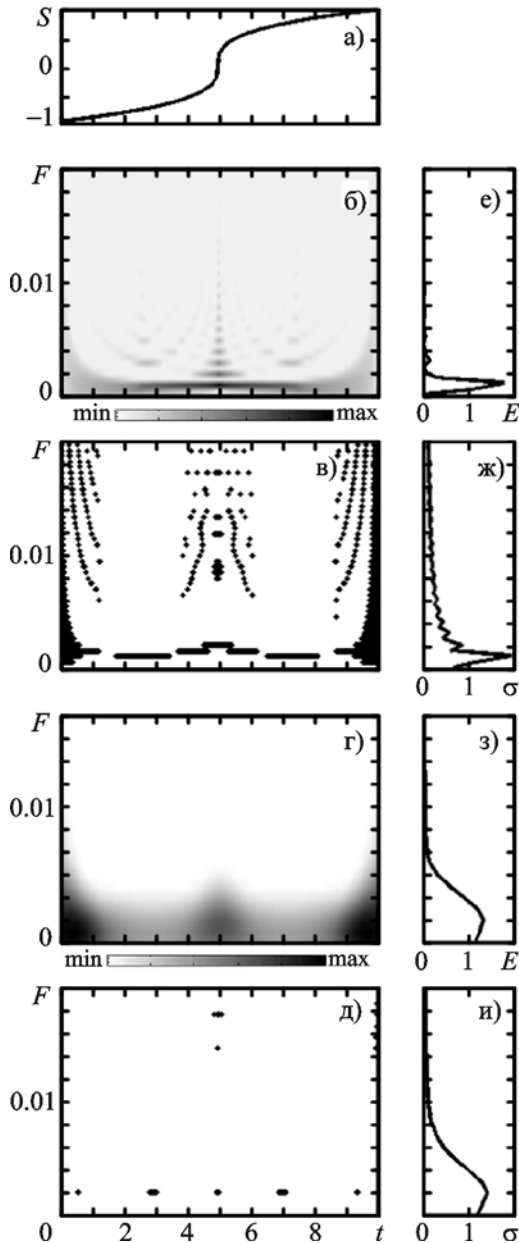
**Рис. 12.** Анализ производной  $\delta$ -функции Дирака: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

ветствующая гармоническому сигналу. При этом в низкочастотной области на этих рисунках присутствует локальное образование, которое указывает на наличие шпилья. На ФСП



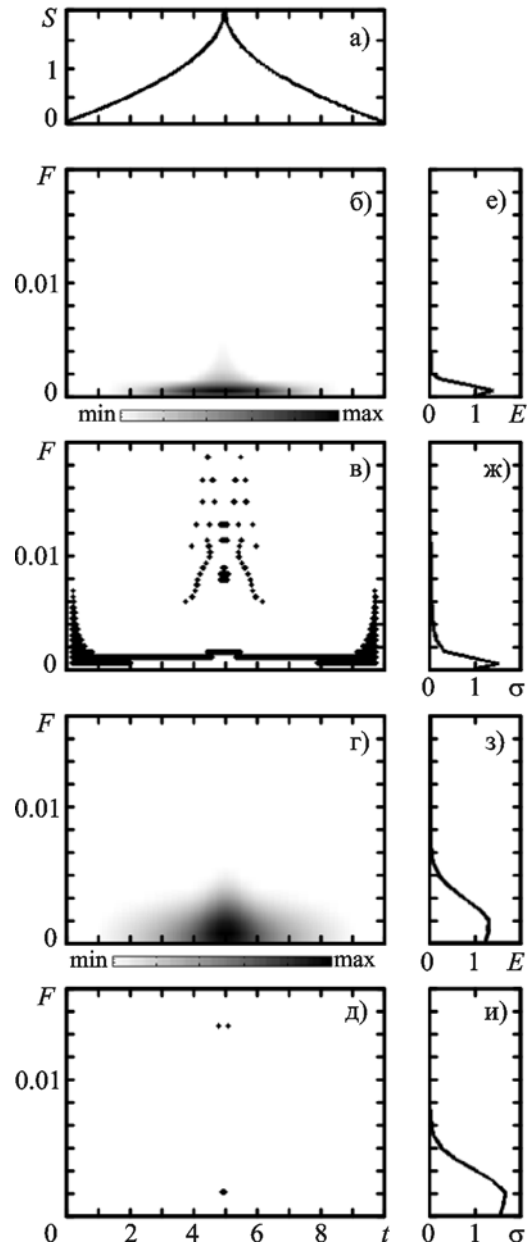
**Рис. 13.** Анализ суммы производной  $\delta$ -функции Дирака и гармонического сигнала: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

ПВ (рис. 16, б) между этими двумя объектами наблюдаются следы интерференции. При этом на энергограмме ФСП ПВ (рис. 16, е) видны только два пика. Третий пик, как и на энерго-



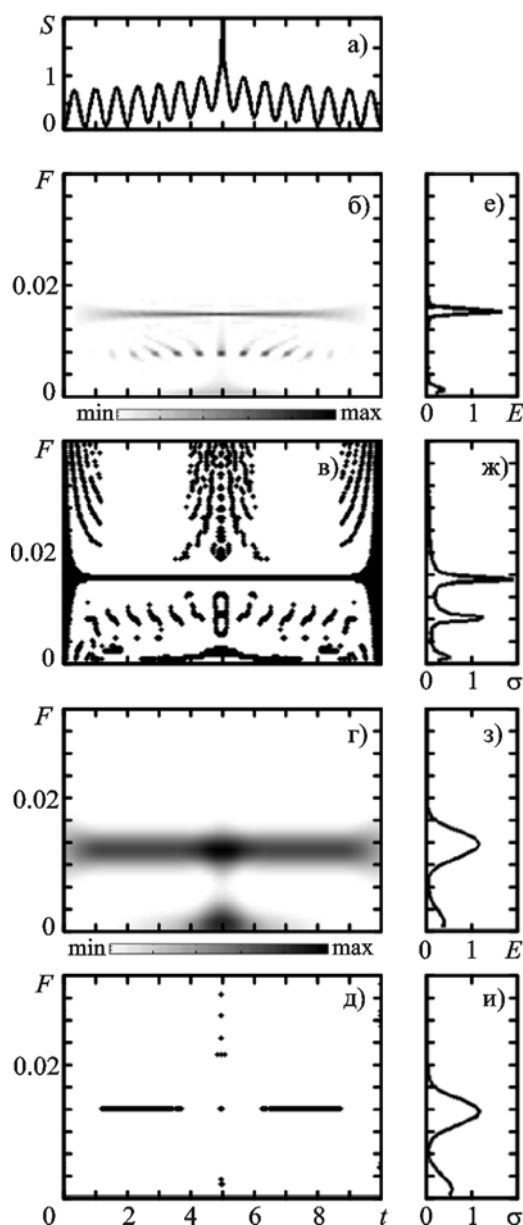
**Рис. 14.** Анализ вертикального перегиба: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

грамме ФСП ПВ (рис. 10, е), отсутствует вследствие взаимного уничтожения интерференционных максимумов и минимумов при их сложении. На скелетоне ФСП ПВ (рис. 16, в)



**Рис. 15.** Анализ шпилья: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

наблюдается вертикальный пик, соответствующий положению шпилья во временной области, который на скелетоне ФСП СФ (рис. 16, д) просматривается хуже.



**Рис. 16.** Анализ суммы шпилья и гармонического сигнала: а) – сигнал во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – скелетон ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – скелетон ФСП СФ, е) – энергограмма ФСП ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма ФСП СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

### 3. Обсуждение результатов

Как и следовало ожидать, разрешение у ПВ на время-частотной плоскости оказывается значительно лучше, чем у СФ. Однако интерпрета-

цию полученных данных затрудняет основной недостаток ПВ – наличие интерференции, возникающей между компонентами сигналов. Ее удается отсеять при помощи СФ, а в некоторых случаях – при помощи энергограммы (см., например, рис. 10, е и рис. 16, е). Недостатком ПВ является также нелокальность его ФСП. Из-за этого любая локальная особенность сигнала оказывает влияние на всю ФСП, а не только на ее часть. Основным методом борьбы с этим недостатком ПВ – введение в преобразование весовых оконных функций во временной и частотной областях. Эта идея реализована в псевдопреобразовании Вигнера (ППВ) и сглаженном псевдопреобразовании Вигнера (СППВ) [11]. Разумеется, время-частотное разрешение ППВ и СППВ по сравнению с разрешением ПВ несколько ухудшается.

В целом ПВ позволяет выявлять время-частотную структуру различных сигналов с особенностями. При этом для получения большего количества достоверной информации о сигнале желательно сравнивать результаты не только со СФ, но и с результатами НВП и АВП. При помощи НВП можно уточнить моменты времени, когда происходит скачок амплитуды, а при помощи АВП обнаружить время появления таких особенностей сигналов, как скачок фазы, излом и вертикальный перегиб. Однако НВП, а также АВП не позволяют различать сигналы, которые на некоторых промежутках времени либо не изменяются, либо изменяются равномерно. Это можно осуществить с меньшей точностью при помощи СФ и с большей точностью при помощи ПВ.

Несмотря на указанные недостатки, ПВ оказывается полезным для исследования сигналов с особенностями, которые часто встречаются при описании различных природных или искусственных процессов. Рекомендуется совместное использование ПВ, СФ, НВП и АВП, например, в рамках системного спектрального анализа, разработанного авторами [16].

### Выводы

1. Проведен вигнер-анализ ряда модельных сигналов с особенностями, таких, как скачки амплитуды, скачки фазы, перегибы и т. п. Положено начало созданию банка ре-

зультатов применения ПВ для наиболее характерных сигналов с особенностями.

Результаты численных расчетов представлены в специальном формате.

2. Проведено сравнение результатов ПВ модельных сигналов с особенностями с результатами применения СФ, НВП и АВП к этим сигналам. Выявлены преимущества и недостатки ПВ в сравнении со СФ, НВП и АВП при обработке сигналов с особенностями. Основным преимуществом ПВ является хорошее время-частотное разрешение, основными недостатками – нелокальный характер ФСП и наличие интерференции в случае анализа многокомпонентных сигналов.

3. Рекомендовано проводить вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями одновременно с анализом этих сигналов при помощи СФ, а также НВП и АВП. Это позволяет получить более полную информацию о время-частотном содержании исследуемых сигналов.

4. Результаты ПВ модельных сигналов с особенностями дают возможность специалистам более полно и корректно интерпретировать результаты анализа реальных сигналов с особенностями различной природы.

## Литература

1. Ultra Wideband Wireless Communication / Ed. by H. Arslan, Z. N. Chen, M.-G. Di Benedetto – Chichester: Wiley, 2006. – 500 p.
2. UWB. Theory and Applications. / Ed. by I. Oppermann, M. Namalainen and J. Iinatti – Chichester: Wiley, 2004. – 223 p.
3. Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. – М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.
4. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями. 1. Непрерывное вейвлет-преобразование // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №2. – С. 182-204.
5. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями. 2. Аналитическое и дискретное вейвлет-преобразование // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №3. – С. 278-294.
6. Wigner E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev. – 1932. – Vol. 40. – P. 749-759.
7. Коэн Л. Время-частотные распределения: Обзор // ТИИЭР. – 1989. – Т. 77, № 16. – С. 72-120.

8. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
9. Вишнинецкий О. В., Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Преобразование Вигнера и атомарные функции в цифровой обработке сигналов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2006. – Т. 11, №6. – С. 26-38.
10. Вишнинецкий О. В., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Анализ нелинейных волновых процессов при помощи преобразования Вигнера // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №3. – С. 295-310.
11. Auger F., Flandrin P., Goncalves P., Lemoine O. Time-Frequency Toolbox Reference Guide. – Newston: Rice University, 2005. – 180 p.
12. Дьяконов В. П. MATLAB 6: учебный курс. – С.-Пб.: Питер, 2001. – 592 с.
13. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – С.-Пб.: Питер, 2002. – 608 с.
14. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 400 с.
15. Чуи К. Введение в вейвлеты. / Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
16. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Системный спектральный анализ сигналов: теоретические основы и практические применения // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, № 2. – С. 162-181.

## Вігнер-аналіз модельних сигналів з особливостями

**О. В. Вишнівецький, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор**

Досліджено доцільність використання перетворення Вігнера (ПВ) для аналізу сигналів з особливостями. Виконано порівняння результатів ПВ модельних сигналів з особливостями з результатами, отриманими за допомогою спектрограми Фур'є (СФ), безперервного (БВП) та аналітичного (АВП) вейвлет-перетворень. Показано переваги та недоліки ПВ у порівнянні з СФ, БВП та АВП у обробці таких сигналів. Перевагою ПВ є добре часово-частотне розрізнення, а недоліками – нелокальність характеру функції спектральної щільності та поява інтерференції у аналізі багатоконентних сигналів. Результати числових розрахунків надаються у спеціальному форматі. Вігнер-аналіз сигналів з особливостями рекомендовано виконувати одночасно з аналізом цих сигналів за допомогою СФ, БВП та АВП, що дозволяє отримати повнішу інформацію про часо-частотний зміст досліджуваних сигналів.

## **The Wigner-Analysis of the Model Signals with Peculiarities**

**O. V. Vishnivetsky, O. V. Lazorenko,  
and L. F. Chernogor**

Advisability of the Wigner transform (WiT) usage for analysis of the signals with peculiarities are investigated. The results obtained by WiT application to the analysis of the model signals with peculiarities are compared with those obtained using the Fourier spectrogram (FS), continuous (CWT) and analytical (AWT) wavelet transforms for analysis of those signals. The WiT advantages and disadvantages vs. those of FS, CWT and AWT for such signal processing are shown. The WiT advantage is a good time-frequency resolution. While a non-local nature of the spectral density function and interference appearance during the multi-component signal analysis can be regarded as their disadvantages. The results of numerical calculations in a special data format are given. The Wigner-analysis of the signals with peculiarities is advised to be used simultaneously with FS, CWT and AWT application that allows getting more comprehensive information about the time-frequency content of the analyzed signals.