

## Численное решение задачи рассеяния электромагнитных волн незамкнутыми поверхностями вращения

О. И. Сухаревский, С. В. Нечитайло, И. О. Сухаревский<sup>1</sup>

*Харьковский университет воздушных сил им. Ивана Кожедуба,  
ул. Сумская, 77/79, г. Харьков, Украина*

*<sup>1</sup>Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,  
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина  
E-mail: i\_sukharevsky@gmail.com*

*Статья поступила в редакцию 27 декабря 2007 г.*

Предложен численный метод решения интегро-дифференциального уравнения задачи рассеяния электромагнитных волн незамкнутыми поверхностями вращения. В качестве иллюстрации метода приведен ряд данных, характеризующих рассеяние на диске, сферическом и параболическом экранах.

### Введение

В ряде задач прикладной электродинамики возникает необходимость в нахождении электромагнитных полей, рассеянных незамкнутыми экранами различной формы. В частности, это могут быть бесконечно тонкие идеально проводящие экраны, которыми аппроксимируются бортовые антенные системы (АС). Представляют интерес как задачи излучения таких систем, так и нахождение их вторичного излучения (в последнем случае АС рассматривается как пассивный рассеиватель).

При этом электрические размеры АС зачастую оказываются резонансными, т. е.  $k_0 a \sim 1$ , где  $k_0$  – волновое число в свободном пространстве,  $a$  – характерный размер экрана. В этой ситуации применение асимптотических (высокочастотных) методов расчета ( $k_0 a \gg 1$ ) – лучевых (геометрическая оптика, геометрическая теория дифракции) либо токовых (физическая оптика, физическая теория дифракции) – оказывается неприемлемым. Одним из возможных вариантов расчета здесь является сведение задачи к решению интеграль-

ных или интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ).

Последние несколько десятилетий весьма интенсивно развивались методы решения двумерных задач дифракции на незамкнутых экранах (см., например, [1-4]). В [1] были разработаны методы сведения задач к сингулярным (в случае Е-поляризации) и гиперсингулярным (в случае Н-поляризации) уравнениям с последующей их дискретизацией с помощью квадратурных формул специального вида. ИДУ, рассмотренное в [3], решалось прямым методом (путем аппроксимации решения отрезками ряда Фурье по косинусам кратных дуг), так как дифференцирование в нем проводилось лишь по дуге контура.

Среди немногочисленных работ, посвященных трехмерным задачам на незамкнутых экранах, следует отметить [5-16]. Сведение в [5, 7] указанной задачи к интегральным уравнениям (ИУ) второго рода имело важное теоретическое значение, однако численная реализация используемого метода оказалась затруднительной ввиду сложной структуры ядер ИУ, содержащих контурные интегралы.

В [9] были рассмотрены сумматорные уравнения, возникающие при решении задачи рассеяния на незамкнутых сферических экранах, и получено их строгое решение. Геометрия экрана при этом имеет принципиальное значение.

В работах [10, 11] был предложен численный метод расчета ИДУ трехмерной задачи дифракции на незамкнутых поверхностях произвольной формы, основанный на использовании кусочно-постоянной аппроксимации плотностей поверхностного тока на экране. Однако повышение точности расчета при таком подходе достигается путем уменьшения размеров элементов разбиения поверхности, что, в свою очередь, приводит к сближению точек наблюдения, которые помещаются в середину каждого элемента. Кроме того, не учитывается в явном виде поведение плотностей поверхностного тока вблизи кромок экрана (условие Майкснера). Все это может, по-видимому, приводить к неустойчивости решений получаемых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и к росту значений плотностей тока вблизи кромки при уменьшении диаметра разбиения.

В настоящей статье предлагается численно-аналитическое решение полученного (иным способом) ИДУ для дифракции на незамкнутых идеально проводящих экранах, представляющих собой поверхности вращения, при их произвольном облучении. Этот метод, по сути, является обобщением на трехмерный случай методики, использованной в [3, 4]. Решение полученного уравнения ищется в виде отрезков двойных рядов Фурье с множителями, отвечающими за выполнение условий Майкснера. Используются полученные специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Приводится ряд результатов для конечного параболоида вращения и сферического экрана (а также для их предельных случаев – экранов, близких к диску), модули составляющих плотности поверхностного тока, различные диаграммы эффективной поверхности рассеяния (ЭПР). Проводится сравнение полученных результатов с приближениями, найденными методом физической оптики.

Предложенный метод, вообще говоря, без особых корректив может быть применен для решения задач рассеяния выпуклыми незамкнутыми поверхностями произвольной формы.

## 1. Получение ИДУ задачи рассеяния для трехмерного незамкнутого экрана

Рассматривается возбуждение незамкнутого идеально проводящего бесконечно тонкого экрана  $S$ , с граничным контуром  $L$ , источником, расположенным вне него. Воспользуемся известным представлением для вектора электрической напряженности полного поля [17-19]:

$$\vec{E}(\vec{x}_0) - \vec{E}^0(\vec{x}_0) = \int_S \left[ i\omega\mu_0 \cdot g(\vec{x}, \vec{x}_0) \vec{j} - \frac{1}{i\omega\epsilon_0} (\vec{j} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} g(\vec{x}, \vec{x}_0) \right] ds, \quad (1.1)$$

где  $\vec{x}$  – точка интегрирования на поверхности  $S$ ;  $\vec{x}_0$  – точка наблюдения;  $\vec{E}^0$  – вектор напряженности первичного электрического поля в точке наблюдения;  $g(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_0|} e^{ik_0|\vec{x} - \vec{x}_0|}$ ;  $\vec{\nabla}$  – оператор Гамильтона;  $\vec{j} = (\vec{n} \times \vec{H})^+ - (\vec{n} \times \vec{H})^- = (\vec{H}^\perp)^+ - (\vec{H}^\perp)^-$  – плотность поверхностного тока на экране  $S$  (символом  $\perp$  обозначен повернутый на  $90^\circ$  тангенциальный к  $S$  вектор  $\vec{A}^T = \vec{A} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{A})$ );  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  – полное поле;  $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , а  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  – абсолютные проницаемости свободного пространства.

Предположим, что точка  $\vec{x}_0$  вначале находится вне поверхности  $S$  со стороны выбранного направления нормали, но вблизи нее. Пусть поверхность  $S$  описывается полярным уравнением в сферических координатах  $\vec{r} = \vec{r}_0(\theta, \varphi)$ .

Радиус-вектор точки, находящейся вблизи поверхности, может быть записан в виде:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \vec{r}_0(\theta, \varphi) + n \cdot \vec{n}(\theta, \varphi),$$

где  $n$  – расстояние от точки до поверхности. Заметим, что орт нормали  $\vec{n}$  выбран таким образом, что  $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{n})$  образуют правую тройку векторов.

Введем в рассмотрение тангенциальные операторы:

$$\vec{D} = \vec{\nabla} - \vec{n} \frac{\partial}{\partial n}, \quad \vec{D}_0 = \vec{\nabla}_0 - \vec{n}_0 \frac{\partial}{\partial n_0},$$

где  $\vec{\nabla}_0$  – оператор Гамильтона по переменной  $\vec{x}_0$ .

В сферических координатах

$$\vec{j} = j_\varphi \vec{e}_\varphi + j_\theta \vec{e}_\theta, \quad (1.2)$$

$$\vec{D} = \vec{e}_\theta \frac{1}{r_0(\theta, \varphi)} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_0(\theta, \varphi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

В дальнейшем будет необходимо устремить точку  $\vec{x}_0$  на поверхность, поэтому, имея в виду этот предельный переход, будем без ограничения общности полагать

$$\vec{D}_0 = \vec{e}_{\theta_0} \frac{1}{r_0(\theta_0, \varphi_0)} \frac{\partial}{\partial \theta_0} + \vec{e}_{\varphi_0} \frac{1}{r_0(\theta_0, \varphi_0) \sin \theta_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0}.$$

Так как  $\vec{j}$  – тангенциальный к поверхности  $S$  вектор, то

$$\int_S (\vec{j} \cdot \vec{\nabla} g) ds = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{D} g) ds = \int_S \vec{D}(\vec{j} g) ds - \int_S g(\vec{D} \cdot \vec{j}) ds. \quad (1.3)$$

Введем тангенциальные вектор  $\vec{j}^\perp = \vec{e}_\varphi j_\theta - \vec{e}_\theta j_\varphi$  и оператор  $\vec{D}^\perp = \vec{n} \times \vec{D}$ .

Покажем, что  $\int_S \vec{D}(\vec{j} g) ds = 0$ . Заметим, что  $\vec{D}(\vec{j} g) = \vec{D}^\perp(\vec{j}^\perp g)$ . Тогда в силу теоремы Стокса

$$\begin{aligned} \int_S \vec{D}(\vec{j} g) ds &= \int_S \vec{D}^\perp(\vec{j}^\perp g) ds = \int_L (g \vec{j}^\perp \cdot \vec{\tau}) dl = \\ &= \int_L g(\vec{n} \times \vec{j}) \vec{\tau} dl = \int_L g(\vec{v} \cdot \vec{j}) dl, \end{aligned}$$

где  $\vec{\tau}$  – орт, касательный к граничному контуру  $L$ , а  $\vec{v} = \vec{\tau} \times \vec{n}$  – единичный вектор, ортогональный контуру  $L$  и лежащий в касательной к  $S$  плоскости.

В окрестности граничного контура  $L$  имеем:  $\vec{j} = j_v \vec{v} + j_\tau \vec{\tau}$ . Учитывая, что  $\vec{v} \cdot \vec{\tau} \equiv 0$ , а  $j_v|_L \equiv 0$  в силу условия Майкснера,  $(\vec{v} \cdot \vec{j})|_L \equiv 0$ , а следовательно,  $\int_L g(\vec{v} \cdot \vec{j}) dl = 0$ , и значит рассматриваемый интеграл равен нулю, что и требовалось доказать.

Умножая слева векторно (1.1) на  $\vec{n}_0$  и используя (1.3), получим:

$$ik_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [\vec{n}_0 \times \vec{E}(x_0) - \vec{n}_0 \times \vec{E}^0(x_0)] = k_0^2 \vec{I}_1 - \vec{I}_2, \quad (1.4)$$

где  $\vec{I}_1 = \int_S g(\vec{n}_0 \times \vec{j}) ds$ ,  $\vec{I}_2 = (\vec{n}_0 \times \vec{D}_0) \int_S g(\vec{D} \cdot \vec{j}) ds$ .

Тогда, после ряда преобразований выражения для  $\vec{I}_2$  (см. п. 2.1), устремив точку на поверхность экрана, получим из (1.4) сингулярное ИДУ, которое, с учетом условия идеальной проводимости экрана  $S$  ( $\vec{n}_0 \times \vec{E}(x_0)|_S = 0$ ), примет следующий вид:

$$ik_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\vec{n}_0 \times \vec{E}^0(x_0)) = k_0^2 \cdot \vec{I}_1 - \vec{I}_2. \quad (1.5)$$

ИДУ (1.5) содержит производные искомой плотности тока  $\vec{j}$  лишь в тангенциальных к  $S$  направлениях, что позволяет применить для его решения прямые методы, основанные на представлении  $\vec{j}$  в виде линейной комбинации известных функций аргументов  $\theta, \varphi$  с подлежащими нахождению коэффициентами.

## 2. Метод решения ИДУ

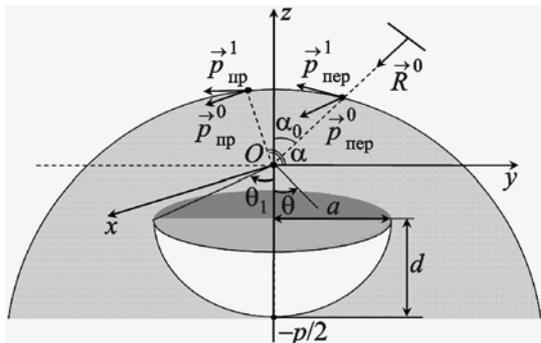
Решение ИДУ (1.5) конкретизируем для случая поверхности, представляющей собой параболоид вращения:

$$S: z + \frac{p}{2} = \frac{1}{2p}(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \quad (2.1)$$

где  $p$  – удвоенное фокусное расстояние,  $a$  – радиус апертуры. Центр системы координат расположен в фокусе параболоида, а ось  $z$  направлена вдоль его оси вращения. Геометрия модели изображена на рис. 1. Облучение проводится плоской электромагнитной волной, распространяющейся под углом  $\alpha_0$  к оси экрана. Расчеты проводились для двух поляризаций зондирующей волны: поляризации, перпендикулярной плоскости, проходящей через направление распространения  $\vec{R}^0 = (0, -\sin \alpha_0, -\cos \alpha_0)$  и ось экрана (вектор  $\vec{E}^0$  имеет направление орта  $\vec{p}_{\text{пер}}^0$ ), и поляризации, лежащей в этой плоскости и определяемой ортом  $\vec{p}_{\text{пер}}^1$ .

Учитывая, что  $|\vec{r}_0(\theta, \varphi)| = \frac{p}{1 + \cos \theta}$ ,  $(0 < \theta \leq \theta_1, 0 < \varphi \leq 2\pi)$ ,  $\theta_1 = \arctg \frac{a}{\frac{p}{2} - d}$ , компоненты радиус-вектора точки на поверхности  $S$

$$x_0 = p \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \cos \varphi, \quad y_0 = p \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \sin \varphi, \\ z_0 = -p \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}.$$



**Рис. 1.** Геометрия задачи:  $\vec{p}_{\text{пер}}^0, \vec{p}_{\text{пер}}^1$  – орты поляризации передатчика;  $\vec{p}_{\text{пр}}^0, \vec{p}_{\text{пр}}^1$  – орты поляризации приемника

При этом элемент площади поверхности имеет вид:

$$ds = \chi(\theta) d\theta d\varphi = 2p^2 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta d\varphi,$$

а орт нормали в точке наблюдения равен

$$\vec{n}_0 = \cos \frac{\theta_0}{2} \left( -\frac{\sin \theta_0}{1 + \cos \theta_0} \cos \varphi_0, -\frac{\sin \theta_0}{1 + \cos \theta_0} \sin \varphi_0, 1 \right).$$

Таким образом, необходимо разработать метод и предложить алгоритм решения ИДУ (1.5) с учетом конкретных выражений для входящих в него операторов, записанных в сферической системе координат, для поверхности  $S$ , представляющей собой конечный (вдоль оси вращения) параболоид резонансных размеров ( $k_0 a \sim 1$ ).

Известно [18], что составляющие плотности поверхностного тока, перпендикулярные кромке, ведут себя при приближении к ней, как  $\rho^{1/2}$ , а составляющие, параллельные кромке, как  $\rho^{1/2}$ , (в силу условий Майкснера). Здесь  $\rho$  – расстояние до кромки. Поэтому будем искать составляющие плотности поверхностного тока (1.2) в виде:

$$j_\theta = (\theta_1 - \theta)^{1/2} \cdot \hat{j}_\theta(\theta, \varphi), \quad (2.2)$$

$$j_\varphi = (\theta_1 - \theta)^{-1/2} \cdot \hat{j}_\varphi(\theta, \varphi), \quad (2.3)$$

где  $\theta_1$  – угол, соответствующий граничному контуру (рис. 1).

Функции  $\hat{j}_\theta(\theta, \varphi), \hat{j}_\varphi(\theta, \varphi)$  будем искать в виде отрезков двойных рядов Фурье:

$$\hat{j}_\theta(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \left( A_{lm}^{(1)} \cos(m\varphi) + A_{lm}^{(2)} \sin(m\varphi) \right) \times \\ \times \cos(\zeta_l \theta), \quad (0 < \theta \leq \theta_1, 0 < \varphi \leq 2\pi), \quad (2.4)$$

$$\hat{j}_\varphi(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \left( B_{lm}^{(1)} \cos(m\varphi) + B_{lm}^{(2)} \sin(m\varphi) \right) \times \cos(\zeta_l \theta), \quad (0 < \theta \leq \theta_1, 0 < \varphi \leq 2\pi), \quad (2.5)$$

где  $\zeta_l = \pi l / \theta_1$ , а  $A_{lm}^{(i)}, B_{lm}^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ) подлежат нахождению. Количество гармоник  $L, M$  выбирается из условия установления значений рассеянного поля, вычисленного с использованием полученных значений плотности поверхностного тока (2.4), (2.5).

Воспользовавшись представлениями для компонент плотности поверхностного тока и его производных, интеграл  $\vec{I}_1$  в (1.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{I}_1 = & \vec{e}_{\varphi_0} \sum_{l,m} \left\{ A_{lm}^{(1)} P_{11,1}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) + A_{lm}^{(2)} P_{11,2}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) + \right. \\ & \left. + B_{lm}^{(1)} Q_{11,1}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) + B_{lm}^{(2)} Q_{11,2}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) \right\} - \\ & - \vec{e}_{\theta_0} \sum_{l,m} \left\{ A_{lm}^{(1)} P_{12,1}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) + A_{lm}^{(2)} P_{12,2}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) + \right. \\ & \left. + B_{lm}^{(1)} Q_{12,1}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) + B_{lm}^{(2)} Q_{12,2}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) \right\}, \quad (2.6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_{1j,i}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) &= \int_S g(r) \Gamma_{lm}^{1j,i}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) \chi(\theta) d\theta d\varphi, \\ (i=1, 2; j=1, 2), \\ Q_{1j,i}^{lm}(\theta_0, \varphi_0) &= \int_S g(r) \Gamma_{lm}^{2j,i}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) \chi(\theta) d\theta d\varphi, \\ (i=1, 2; j=1, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{lm}^{1j,i}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) &= \begin{cases} (\vec{e}_{\theta_0} \cdot \vec{e}_\varphi), & j=1 \\ (\vec{e}_{\varphi_0} \cdot \vec{e}_\theta), & j=2 \end{cases} \times \\ \times (\theta_1 - \theta)^{1/2} \cos(v_l \theta) & \begin{cases} \cos(m\varphi), & i=1 \\ \sin(m\varphi), & i=2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{lm}^{2j,i}(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) &= \begin{cases} (\vec{e}_{\theta_0} \cdot \vec{e}_\varphi), & j=1 \\ (\vec{e}_{\varphi_0} \cdot \vec{e}_\theta), & j=2 \end{cases} \times \\ \times (\theta_1 - \theta)^{-1/2} \cos(v_l \theta) & \begin{cases} \cos(m\varphi), & i=1 \\ \sin(m\varphi), & i=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Второе слагаемое, входящее в (1.5), с учетом выражений (2.2), (2.3) может быть записано следующим образом:

$$\vec{I}_2 = \text{ctg} \frac{\theta_0}{2} (\vec{e}_{\varphi_0} \cdot \sin \theta_0 \cdot I_{21} - \vec{e}_{\theta_0} \cdot I_{22}), \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} I_{21} &= \frac{\partial}{\partial \theta_0} \int_S g(r) \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial j_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} \right) \gamma_1(\theta) d\theta d\varphi, \\ I_{22} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \int_S g(r) \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial j_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} \right) \gamma_1(\theta) d\theta d\varphi, \\ \gamma_1(\theta) &= \frac{\sin \theta}{2 \cos^3 \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Для  $\vec{I}_2$  (2.7) может быть получено выражение, аналогичное (2.6), линейно зависящее от коэффициентов Фурье компонент плотности тока.

### 2.1. Вычисление интегралов, входящих в $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ , и их производных по параметру

Расчет интегралов, входящих в  $\vec{I}_1$  и  $\vec{I}_2$ , сводится к вычислению интегралов вида

$$U^i(\theta_0, \varphi_0) = \int_S g(r) f(\theta) \begin{cases} \cos(m\varphi), & i=1 \\ \sin(m\varphi), & i=2 \end{cases} d\theta d\varphi$$

и их частных производных по параметрам

$$U_1^i(\theta_0, \varphi_0) = \frac{\partial U^i}{\partial \theta_0} \text{ и } U_2^i(\theta_0, \varphi_0) = \frac{\partial U^i}{\partial \varphi_0}, \quad (\theta_0, \varphi_0) \notin S,$$

$g(r) = \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r}$ ,  $f(\theta)$  – интегрируемая функция (возможно, имеющая особенность вида  $(\theta_1 - \theta)^{-1/2}$ ), а  $r$  – расстояние от точки наблюдения  $(\theta_0, \varphi_0)$  до точки интегрирования. Например, в случае, когда  $S$  – параболоид вращения (2.1):

$$r = \gamma(\theta, \theta_0) \left( \sin^2 \frac{\theta - \theta_0}{2} + \mu(\theta, \theta_0) \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)^{1/2},$$

где  $\gamma(\theta, \theta_0)$ ,  $\mu(\theta, \theta_0)$  – некоторые непрерывно-дифференцируемые функции.

Интегралы могут быть преобразованы следующим образом:

$$\begin{aligned} U^i(\theta_0, \varphi_0) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} g(r) f(\theta) \begin{cases} \cos(m\varphi), & i = 1 \\ \sin(m\varphi), & i = 2 \end{cases} d\theta d\varphi = \\ &= \begin{cases} \cos(m\varphi_0), & i = 1 \\ \sin(m\varphi_0), & i = 2 \end{cases} U_c(\theta_0), \end{aligned}$$

где

$$U_c(\theta_0) = \int_0^{2\pi} \cos(m\psi) d\psi \int_0^{\theta_1} g(r) f(\theta) d\theta. \quad (2.8)$$

Таким образом, нахождение рассматриваемых интегралов и их частных производных по параметру  $\varphi_0$  сводится к вычислению интеграла  $U_c(\theta_0)$ , заданного формулой (2.8), а частных производных по параметру  $\theta_0$  – к вычислению  $\frac{\partial U_c(\theta_0)}{\partial \theta_0}$ .

Пользуясь тем, что  $(\theta_0, \varphi_0) \notin S$ , внесем в  $\frac{\partial U_c(\theta_0)}{\partial \theta_0}$  оператор дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial \theta_0}$  под знак интеграла. Тогда внутренний интеграл после проведения несложных преобразований будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\psi; \theta_0) &= \int_0^{\theta_1} \frac{\partial g(\theta, \psi; \theta_0)}{\partial \theta_0} f(\theta) d\theta = \\ &= \delta(\theta_0) \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}} \frac{-t + \beta(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{\left( t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right)^{3/2}} R(t, \psi; \theta_0) dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $\alpha(\theta_0)$ ,  $\beta(\theta_0)$ ,  $\delta(\theta_0)$  – некоторые непрерывно-дифференцируемые функции, а  $R(t, \psi; \theta_0)$  –

функция, имеющая особенность по  $t$  не выше корневой на верхнем пределе. Далее, устремив точку наблюдения на экран,  $(\theta_0, \varphi_0) \rightarrow S$ , будем понимать интеграл (2.9) в точках  $\left\{ \psi : \sin \frac{\Psi}{2} = 0 \right\}$  в смысле главного значения по Коши.

Преобразуем интеграл (2.9):

$$\begin{aligned} \Phi(\psi; \theta_0) &= \delta(\theta_0) \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}} \frac{-t^2 + \beta(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2} t}{\left( t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right)^{3/2}} \times \\ &\times R_1(t, \psi; \theta_0) dt + S(\psi; \theta_0), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{где } R_1(t, \psi; \theta_0) &= \frac{R(t, \psi; \theta_0) - R(0, \psi; \theta_0)}{t}, \\ R_1(0, \psi; \theta_0) &= R'_\theta(0, \psi; \theta_0), \end{aligned}$$

$$S(\psi; \theta_0) = \delta(\theta_0) R(0, \psi; \theta_0) \times$$

$$\times \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}} \frac{-t + \beta(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{\left( t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right)^{3/2}} dt =$$

$$= s\left( \frac{\theta_1 - \theta_0}{2}, \psi; \theta_0 \right) - s\left( -\frac{\theta_0}{2}, \psi; \theta_0 \right),$$

$$s(t, \psi; \theta_0) = \delta(\theta_0) R(0, \psi; \theta_0) \times$$

$$\times \int \frac{-t + \beta(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{\left( t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right)^{3/2}} dt =$$

$$= \delta(\theta_0) R(0, \psi; \theta_0) \frac{\frac{\beta(\theta_0)}{\alpha(\theta_0)} t + 1}{\sqrt{t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}}.$$

Таким образом, вычисленную функцию  $S(\psi; \theta_0)$  следует понимать как главное значение соответствующего интеграла.

Первое слагаемое в (2.10) будем вычислять с помощью квадратурной формулы с

$$\text{сингулярным весом } \frac{-t^2 + \beta(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi t}{2}}{\left(t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}\right)^{3/2}},$$

полученной путем кусочно-постоянной аппроксимации функции  $R_1(t, \Psi; \theta_0)$ :

$$\Phi(\Psi; \theta_0) \approx \delta(\theta_0) \sum_{i=1}^N R_{i_i}(\Psi; \theta_0) (T(t_i, \Psi; \theta_0) - T(t_{i-1}, \Psi; \theta_0)) + S(\Psi; \theta_0), \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (2.11)$$

где  $R_{i_i}(\Psi; \theta_0) = R_1\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}, \Psi; \theta_0\right)$ ,  $1 \leq i \leq N$ ;  
 $t_i = t_0 + ih$ ,  $t_0 = -\frac{\theta_0}{2}$ ,  $h = \frac{\theta_1}{2N}$ ;

$$T(t, \Psi; \theta_0) = \int \frac{-t^2 + \beta(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi t}{2}}{\left(t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}\right)^{3/2}} dt =$$

$$= \frac{t}{\sqrt{t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}} - \ln \left( t + \sqrt{t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right) -$$

$$- \frac{\beta(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{\sqrt{t^2 + \alpha(\theta_0) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}}. \quad (2.12)$$

Заметим, что первое и третье слагаемые в (2.12) ограничены, а второе имеет лишь логарифмическую особенность. Поэтому внешнее интегрирование может проводиться, например, с помощью составной пятиточечной формулы Гаусса.

Внутренний интеграл в (2.8),  $H(\Psi) = \int_0^{\theta_1} g(r) f(\theta) d\theta$ , имеет особенность более слабую, чем интеграл в (2.9), и может быть вычислен с использованием формулы, подобной (2.11).

## 2.2. Дискретизация уравнения (1.5)

Принимая во внимание, что

$$\vec{e}_{\varphi_0} (\vec{n}_0 \times \vec{E}^0(\vec{x}_0)) = \vec{e}_{\theta_0} \cdot \vec{E}^0(x_0),$$

$$\vec{e}_{\theta_0} (\vec{n}_0 \times \vec{E}^0(\vec{x}_0)) = -\vec{e}_{\varphi_0} \cdot \vec{E}^0(x_0),$$

получим из (1.5) систему, состоящую из двух ИУ:

$$\begin{cases} \frac{ik_0}{120\pi} (\vec{e}_{\theta_0} \cdot \vec{E}^0(\vec{x}_0)) = k_0^2 (\vec{e}_{\varphi_0} \cdot \vec{I}_1) - (\vec{e}_{\varphi_0} \cdot \vec{I}_2), \\ -\frac{ik_0}{120\pi} (\vec{e}_{\varphi_0} \cdot \vec{E}^0(\vec{x}_0)) = k_0^2 (\vec{e}_{\theta_0} \cdot \vec{I}_1) - (\vec{e}_{\theta_0} \cdot \vec{I}_2). \end{cases} \quad (2.13)$$

Учитывая, что  $\vec{I}_1$  и  $\vec{I}_2$  могут быть линейно выражены через  $A_{lm}^{(i)}$ ,  $B_{lm}^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ), система (2.13) может быть рассмотрена как система двух линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от координат точки наблюдения  $(\theta_0, \varphi_0)$ . Выбирая число точек коллокации  $(\theta_{0i}, \varphi_{0j})$  большим  $4(L+1)(M+1)$  – числа неизвестных, получим переопределенную СЛАУ, которую будем решать методом наименьших квадратов.

Аналогичным образом может быть получен расчетный алгоритм для случая сферического экрана; в этом случае формулы будут иметь более простой вид.

## 2.3 Результаты численного моделирования

Для проверки адекватности предложенного метода был проведен ряд расчетов для поверхностей, представляющих собой незамкнутые экраны сферической и параболической формы, а также диск как предельный случай экрана параболической формы. На рис. 2 изображены диаграммы обратного вторичного излучения (ДОВИ) (корня из ЭПР

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \left| \frac{(\vec{P}_{\text{пер}}^i \cdot \vec{E}^{\text{расс}})}{(\vec{P}_{\text{пер}}^i \cdot \vec{E}^0)} \right|^2$$

на основных поляризациях) сферического незамкнутого экрана с радиусом апертуры  $a = \lambda$  (длина волны

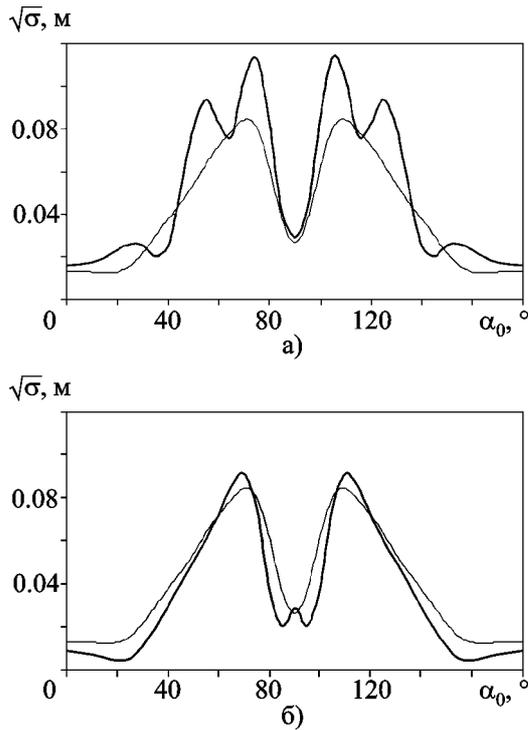


Рис. 2. ДОВИ сферического экрана: а) – поляризация  $\vec{p}_{\text{пер}}^0$ ; б) – поляризация  $\vec{p}_{\text{пер}}^1$

$\lambda = 3$  см) и высотой  $d = 0.5\lambda$  ( $0^\circ \leq \alpha_0 \leq 180^\circ$ ), полученные при количестве гармоник  $L = 3$ ,  $M = 5$  в (2.4), (2.5). Рис. 2, а иллюстрирует зависимость от угла  $\alpha_0$  для орта поляризации  $\vec{p}_{\text{пер}}^0$  (см. рис. 1), а рис. 2, б – для орта  $\vec{p}_{\text{пер}}^1$ . На рисунке для сравнения приведены результаты моделирования, полученные с помощью метода физической оптики (тонкая линия). Хорошее совпадение кривых на рис. 2, б объясняется незначительным вкладом краевых участков рассеяния в суммарное рассеянное поле при поляризации  $\vec{p}_{\text{пер}}^1$ . В случае поляризации  $\vec{p}_{\text{пер}}^0$  (рис. 2, а) вклад краевых участков рассеяния значителен, что выражается в повышении среднего уровня диаграммы и появлении дополнительных всплесков при углах  $\alpha_0 \approx 55; 75; 105; 125^\circ$ . Провал в ДОВИ при осевом зондировании обусловлен противофазным сложением отраженных сигналов от зон Френеля на поверхности экрана.

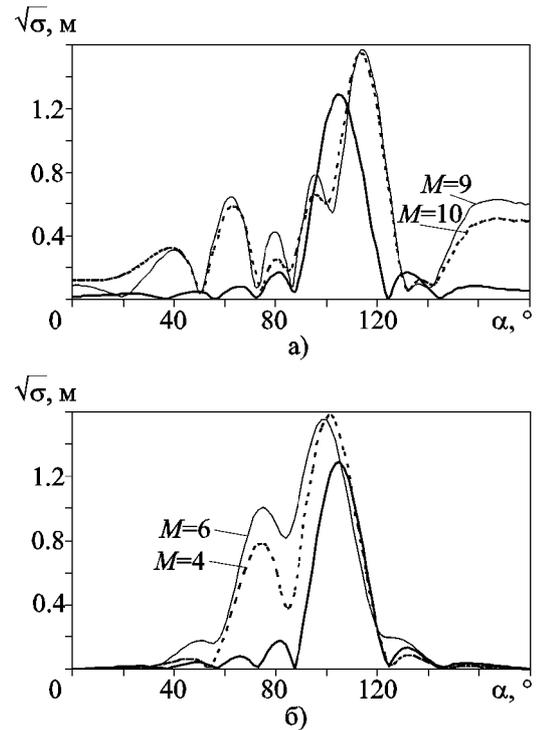
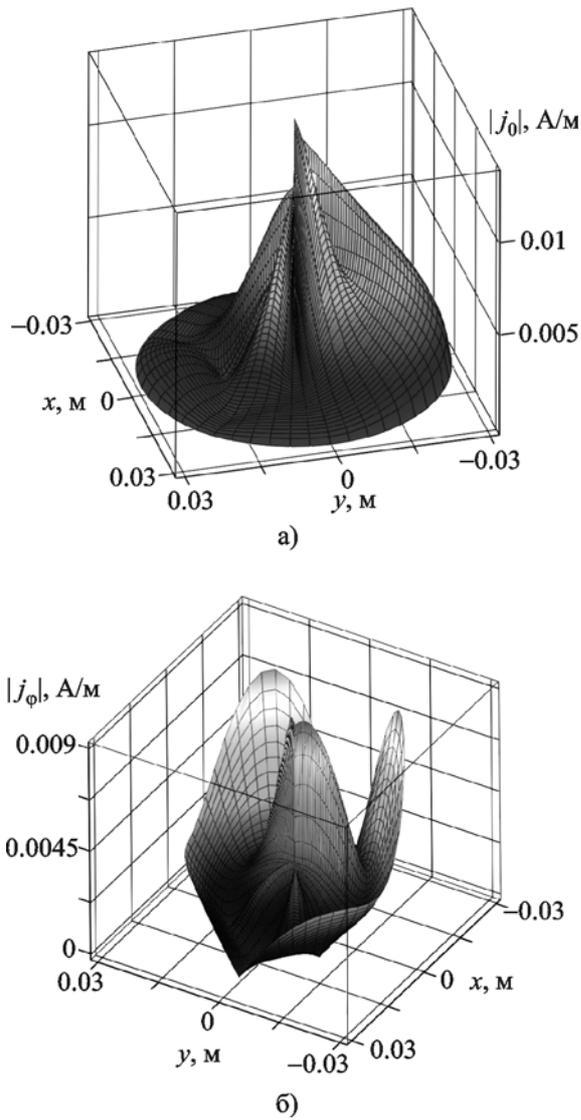


Рис. 3. ДР диска: а) – поляризации  $\vec{p}_{\text{пер}}^0$ ,  $\vec{p}_{\text{пер}}^0$ ; б) – поляризации  $\vec{p}_{\text{пер}}^1$ ,  $\vec{p}_{\text{пер}}^1$

Рис. 3 иллюстрирует внутреннюю сходимость метода (по числу гармоник) на основании диаграмм рассеяния (ДР) для диска радиуса  $a = 2\lambda$ , полученного в результате “сплющивания” параболического экрана ( $d \approx 0.002\lambda$ ), вычисленных при разных  $M$ . Облучение проводилось для угла  $\alpha_0 = 15^\circ$ . Прием осуществлялся при поляризации  $\vec{p}_{\text{пер}}^0$  (рис. 3, а) и  $\vec{p}_{\text{пер}}^1$  (рис. 3, б). Сплошной жирной линией на рис. 3 изображена зависимость, полученная методом физической оптики. Заметим, что, как и в случае обратного рассеяния, имеют место всплески, порожденные краевыми участками рассеяния. В ситуации, изображенной на рис. 3, а, ДР носят более выраженный осциллирующий характер, что вызвано интерференцией полей, рассеянных краевыми участками рассеяния. Так как  $d \ll \lambda$ , оказывается достаточным положить  $L = 1$ . Количество гармоник  $M$ , необходимых для установления рассчитываемых зависимостей в слу-

чае, представленном на рис. 3, б, заметно меньше, чем для случая, приведенного на рис. 3, а. Это также обусловлено вкладами кромочных участков рассеяния диска.

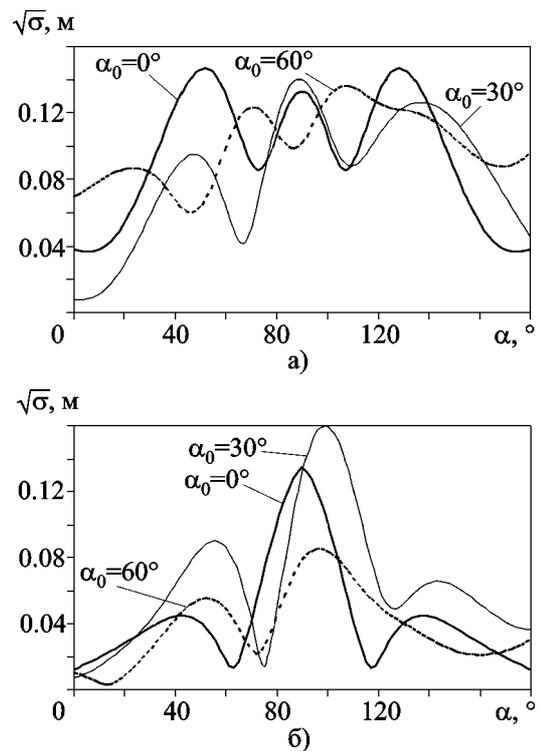
Метод, изложенный в статье, позволяет получить аналитические выражения для составляющих плотности поверхностного тока (2.2), (2.3). В качестве примера расчета по этим формулам на рис. 4 приведены зависи-



**Рис. 4.** Амплитуды компонент плотностей поверхностного тока для параболического экрана ( $L = 3, M = 5$ ): а)  $|j_\theta|$ ; б)  $|j_\phi|$

мости  $|j_\theta|, |j_\phi|$  от поверхностных координат  $\theta, \phi$  для случая параболоида с параметрами  $a = \lambda, d = 0.5\lambda$  при облучении под углом  $\alpha_0 = 30^\circ$  и поляризации  $\vec{p}_{пер}^1 = \vec{p}_{пр}^1$ . Как это и следует из формул,  $|j_\theta|$  обращается в ноль на кромке, а  $|j_\phi|$  стремится к бесконечности при приближении к ней.

На рис. 5 изображены ДР рассмотренного параболического экрана при разных углах падения  $\alpha_0$  зондирующей волны, передающей поляризации  $\vec{p}_{пер}^0$  и приемной поляризации  $\vec{p}_{пр}^0$  (рис. 5, а); передающей поляризации  $\vec{p}_{пер}^1$  и приемной поляризации  $\vec{p}_{пр}^1$  (рис. 5, б). Зависимости на обоих рисунках носят ярко выраженный резонансный характер. Так же как и в случае диска, графики на рис. 5, а осциллируют сильнее. Увеличение угла  $\alpha_0$  приводит к сглаживанию лепестковой картины ДР.



**Рис. 5.** ДР параболического экрана: а) – поляризации  $\vec{p}_{пер}^0, \vec{p}_{пр}^0$ ; б) – поляризации  $\vec{p}_{пер}^1, \vec{p}_{пр}^1$

## Заключение

Разработанный метод численного решения задачи рассеяния произвольной электромагнитной волны конечными незамкнутыми поверхностями вращения позволяет эффективно рассчитывать плотность поверхностного тока и рассеянные поля. Метод основан на сведении ИДУ относительно плотности поверхностного тока и его тангенциальных производных к СЛАУ относительно коэффициентов разложения составляющих тока в двойные ряды Фурье. При этом используются полученные в работе специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.

Приводятся результаты расчетов ДР и ДОРИ некоторых типов незамкнутых экранов. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о сходимости метода и эффективности его применения для объектов малых и резонансных размеров.

## Литература

1. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145 с.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
3. Сухаревский О. И. Электродинамический расчет модели двухзеркальной антенны со строгим учетом взаимодействия между зеркалами // Радиотехника. – 1982. – Вып. 60. – С. 41-47.
4. Sukharevsky O. I., Kukobko S. V., and Sazonov A. Z. Volume Integral Equation Analysis of a Two-Dimensional Radome With a Sharp Nose // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2005. – Vol. AP-53. – P. 1500-1506.
5. Повзнер А. Я., Сухаревский И. В. Интегральные уравнения второго рода для задач дифракции на бесконечно тонком экране // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127, №2. – С. 291-294.
6. Фельд Я. Н., Сухаревский И. В. Об интегральных уравнениях задач дифракции на незамкнутых экранах // Радиотехника и электроника. – 1967. – Т. 7, №10. – С. 1713-1720.
7. Фельд Я. Н., Сухаревский И. В. О сведении задач дифракции на незамкнутых поверхностях к интегральным уравнениям второго рода // Радиотехника и электроника. – 1966. – Т. 11, №7. – С. 1159-1168.
8. Фельд Я. Н., Сухаревский И. В. Применение нерезонансных функций Грина к построению интегральных уравнений задач дифракции на незамкнутых экранах // Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14, №8. – С. 1362-1368.
9. Виноградов С. С., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. К теории рассеяния волн на незамкнутых экранах сферической формы // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256, №6. – С. 712-716.
10. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на произвольных незамкнутых поверхностях // ДАН СССР. – 1984. – Т. 276, №1. – С. 96-100.
11. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. – М.: МГУ, 1987. – 167 с.
12. Rao S. M., Wilton D. R., and Glisson A. W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1982. – Vol. AP-30, No. 5. – P. 409-418.
13. James R. M. On the use of F.S./F.F.T.'s as Global Basis Functions in the Solution of Boundary Integral Equations for EM Scattering // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1994. – Vol. AP-42, No. 9. – P. 213-219.
14. Trowbridge B. Integral Equations in Electromagnetics // Int. J. Numer. Model.: – 1996. – Vol. 9, No. 3. – P. 978-984.
15. Bergman J. R. and Moreira F. J. S. An Omnidirectional ADE Reflector Antenna // Microw. Opt. Tech. Lett. – 2004. – Vol. 40, No. 2. – P. 345-349.
16. Pino A. G., Marcos A., Acuna A., and Lopez O.R. An Omnidirectional Dual-Shaped Reflector Antenna // Microw. Opt. Tech. Lett. – 2000. – Vol. 27, No. 12. – P. 1703-1711.
17. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
18. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
19. Silver S. Microwave Antenna Theory and Design // MIT Radiation Laboratory Series; No. 12. – New York: McGraw-Hill, 1949. – 391 p.

**Чисельний розв'язок задачі розсіювання  
електромагнітних хвиль  
незамкненими поверхнями обертання**

**О. І. Сухаревський, С. В. Нечитайло,  
І. О. Сухаревський**

Пропонується чисельний метод розв'язку інтегро-диференціального рівняння задачі розсіювання електромагнітних хвиль незамкненими поверхнями обертання. Метод ілюстровано низкою даних, що характеризують розсіювання на диску, сферичному та параболічному екранах.

**A Numerical Method for Solution  
of Electromagnetic Wave Scattering  
by Open Surfaces of Rotation**

**O. I. Sukharevsky, S. V. Nechitaylo,  
and I. O. Sukharevsky**

A Numerical method for solution of integro-differential equation of electromagnetic wave scattering by open surfaces of revolution is suggested. The method is illustrated by the data characterising the scattering by flat, spherical and parabolic screens.