Радиофизика и радиоастрономия, 2008, т. 13, №1, с. 92-98

УДК 621.371.162

Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. II. Средняя интенсивность и частотный спектр флуктуаций поля

А. С. Брюховецкий

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: ire@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 21 июня 2007 г.

Определены средняя интенсивность и частотный спектр флуктуаций волнового поля, рассеянного в ближней зоне статистически неровной поверхностью. Основу расчетов составляет асимптотическое разложение флуктуационного поля, полученное в первой части работы. Исследованы предельные переходы к известным частным случаям.

Целью второй части работы поставим определение средней интенсивности и частотного спектра флуктуационного поля на основе его интегрального представления, полученного в первой части [1].

Исходя из формулы (68) [1] запишем среднюю интенсивность флуктуаций поля в виде ($*$ – знак комплексного сопряжения):

$$\left\langle \left| u\left(\vec{R}_2\right)\right|^2 \right\rangle \equiv \left\langle u\left(\vec{R}_2\right) u^*\left(\vec{R}_2\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int\limits_S \int\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1 \mathrm{d}^2\vec{r}_1{}' \frac{1}{R'_{01} R_{01} R'_{12} R_{12}} \times$$

$$\times \exp\left\{ik\left[R'_{01} - R_{01} + R'_{12} - R_{12}\right]\right\} \left\langle J^*_{01} J'_{01}\right\rangle J^*_{12} J'_{12}\Big|_{z_1 = z'_1 = 0}, \tag{1}$$

где всюду в штрихованных величинах совершены замены $\vec{r}_1 \to \vec{r}_1{}'$, $z_1 \to z'_1$. Напомним, что

$$R_{01}\big|_{z_1=0} = \sqrt{r_{01}^2 + (z_1 - z_0)^2}\Big|_{z_1=0}, \quad \vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0,$$

$$R_{12}\big|_{z_1=0} = \sqrt{r_{12}{}^2 + (z_2 - z_1)^2}\Big|_{z_1=0}, \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

а $(\vec{r}_0, z_0)$, $(\vec{r}_1, z_1)$, $(\vec{r}_2, z_2)$ – координаты точек источника рассеяния и наблюдения соответственно; J_{01} и J_{12} определены формулами (69), (70) в [1].

Обозначим $\vec{\rho} = \vec{r}_{01}{}' - \vec{r}_{01}$, тогда в приближении френелевской дифракции, сохраняя в отличие от [2] (с. 104) квадратичные по ρ члены разложений и выбрав начало координат $\vec{r}_0 = 0$ (при этом $\vec{r}_{01} = \vec{r}_1$, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 = \vec{D}$), получим:

$$R'_{01}\big|_{z_1=0} = \sqrt{(\vec{r}_1 + \vec{\rho})^2 + z_0^2} \approx R_{01} + \vec{\rho}\vec{\alpha}_\perp +$$

$$+ \frac{\rho^2 - (\vec{\rho}\vec{\alpha}_\perp)^2}{2R_{01}} + \ldots\Big|_{z_1=0},$$

$$R'_{12}\big|_{z_1=0} = \sqrt{(\vec{D} - \vec{r}_1 - \vec{\rho})^2 + z_2^2} \approx R_{12} - \vec{\rho}\vec{\beta}_\perp +$$

$$+ \frac{\rho^2 - (\vec{\rho}\vec{\beta}_\perp)^2}{2R_{12}} + \ldots\Big|_{z_1=0}.$$

Здесь $\vec{\alpha}_{\perp} = \dfrac{\vec{r}_1}{R_{01}}$, $\vec{\beta}_{\perp} = \dfrac{\vec{D} - \vec{r}_1}{R_{12}}$.

При этом

$$R_{01} - R'_{01} + R_{12} - R'_{12} = (\vec{\beta}_{\perp} - \vec{\alpha}_{\perp})\vec{\rho} + \\ + A\rho_x^2 + B\rho_y^2 + C\rho_x\rho_y, \tag{2}$$

$\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y)$, где ρ_x, ρ_y – компоненты вектора $\vec{\rho}$ в плоскости S, и $\vec{\alpha}_{\perp} = (\alpha_x, \alpha_y)$, $\vec{\beta}_{\perp} = (\beta_x, \beta_y)$.

В равенстве (2) введены сокращенные обозначения для вещественных величин:

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{01}} + \frac{1}{R_{12}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_x{}^2}{R_{01}} + \frac{\beta_x{}^2}{R_{12}}\right) < 0,$$

$$B = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{01}} + \frac{1}{R_{12}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_y{}^2}{R_{01}} + \frac{\beta_y{}^2}{R_{12}}\right) < 0,$$

$$C = \frac{\alpha_x\alpha_y}{R_{01}} + \frac{\beta_x\beta_y}{R_{12}} \leqslant 0.$$

При этом экспонента в интеграле (1) выглядит следующим образом:

$$\exp\left\{-ik(R_{01} - R'_{01} + R_{12} - R'_{12})\right\} = \\ = \exp\left\{-ik(\vec{\beta}_{\perp} - \vec{\alpha}_{\perp})\vec{\rho}\right\} \cdot M(\vec{\rho}), \tag{3}$$

где экспонента $M(\vec{\rho})$ может быть представлена разложением Фурье

$$M(\vec{\rho}) = \exp\left\{-ik\left(A\rho_x^2 + B\rho_y^2 + C\rho_x\rho_y\right)\right\} = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_y e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \tilde{M}(\vec{q}), \tag{4}$$

$$\tilde{M}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\rho_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\rho_y e^{i\vec{q}\vec{\rho}} M(\vec{\rho}). \tag{5}$$

Вычисления приводят к результату:

$$\tilde{M}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\gamma_1\gamma_2}{k\sqrt{|B|\left|A - \dfrac{C^2}{4B}\right|}} e^{\frac{i}{4kB}q_y^2 + \frac{i}{4k}\frac{\left(q_x - q_y\frac{C}{2B}\right)^2}{A - \frac{C^2}{4B}}}, \tag{6}$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} B}$, $\gamma_2 = \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\left(A - \frac{C^2}{4B}\right)}$.

Если в (6) величина $B \to 0$ либо $A - \dfrac{C^2}{4B} \to 0$, то соответствующая часть выражения переходит в δ-функцию.

Представим случайные возвышения, которые входят в величины J^*_{01} и J'_{01} (см. [1], формулы (69), (70)), фурье-разложением

$$\zeta(\vec{r}_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\chi}_1 \tilde{\zeta}(\vec{\chi}_1) e^{i\vec{\chi}_1\vec{r}_1}, \tag{7}$$

и аналогично $\zeta(\vec{r}'_1) = \zeta(\vec{r}_1 + \vec{\rho})$. Перейдя затем в (1) к интегрированию по $\vec{r}_1$, $\vec{\rho}$ вместо $\vec{r}_1$, $\vec{r}'_1$, получим

$$\left\langle \left| u\left(\vec{R}_2\right) \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} \iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\rho} \frac{J'_{12}J^*_{12}}{R_{01}R^*_{01}R^*_{12}R_{12}} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\chi}_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{\chi}'_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{q} \left\langle \tilde{\zeta}^*(\vec{\chi}_1)\tilde{\zeta}(\vec{\chi}'_1) \right\rangle \times \\ \times \tilde{J}'_{01}(\vec{\chi}'_1)\tilde{J}^*_{01}(\vec{\chi}_1) \cdot \tilde{M}(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho} + i\vec{\chi}'_1\vec{\rho} - ik(\vec{\beta}_{\perp} - \vec{\alpha}_{\perp})\vec{\rho}} e^{-i(\vec{\chi}_1 - \vec{\chi}'_1)\vec{r}_1}. \tag{8}$$

В формуле (8) предполагается, как обычно, что радиус корреляции много меньше размеров рассеивающей поверхности, а потому интегрирование по $\vec{\rho}$ ведется в бесконечных пределах. Асимптотические методы вычислений типа метода стационарной фазы позволяют пренебречь разницей ρ в выражениях для штрихованных величин R'_{01}, R'_{12}, ... в отличие от нештрихованных. Будем считать, кроме того, поле неровностей однородным, поэтому в силу теоремы Винера–Хинчина

$$\left\langle \tilde{\zeta}^*(\vec{\chi}_1)\tilde{\zeta}(\vec{\chi}_1')\right\rangle = \sigma^2\tilde{W}(\vec{\chi}_1)\delta(\vec{\chi}_1-\vec{\chi}_1'), \qquad (9)$$

где $\sigma^2\tilde{W}(\vec{\chi}_1)$ – пространственный энергетический спектр неровностей.

С учетом (9) и того, что результат интегрирования по $\vec{\rho}$ дает $(2\pi)^2\delta\left[\vec{\chi}_1'-\vec{q}-k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)\right]$, формула (8) приобретает вид

$$\left\langle\left|u\left(\vec{R}_2\right)\right|^2\right\rangle = \frac{\sigma^2}{4}\iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1\frac{|J_{12}|^2}{R_{01}^2R_{12}^2}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}^2\vec{q}\left|\tilde{J}_{01}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)+\vec{q}\right]\right|^2\times$$
$$\times\tilde{W}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)+\vec{q}\right]\tilde{M}(\vec{q}). \qquad (10)$$

$\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1)$ получается из величины J_{01} заменой в ней $\nabla_1\zeta_1$ на $i\vec{\chi}_1$ и ζ_1 на 1.

Перейдем во внутреннем интеграле по $\vec{q}$ к безразмерному волновому числу $\vec{q}^\circ=\vec{q}/k$, $\mathrm{d}^2\vec{q}=k^2\mathrm{d}^2\vec{q}^\circ$, и обозначим его

$$I_q=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}q_x^\circ \mathrm{d}q_y^\circ e^{iGf(\vec{q}^\circ)}F(\vec{q}^\circ), \qquad (11)$$

где $G=kR\gg 1$, $R=\dfrac{1}{2}\dfrac{R_{01}R_{12}}{R_{01}+R_{12}}$ – среднее геометрическое R_{01} и R_{12},

$$f(\vec{q}^\circ)=\frac{q_y^{\circ 2}}{4RB}+\frac{\left(q_x^\circ-\dfrac{q_y^\circ C}{2B}\right)^2}{4R\left(A-\dfrac{C^2}{4B}\right)},$$

$$F(\vec{q}^\circ)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{2k\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{4|B|\left|A-\dfrac{C^2}{4B}\right|}}\times$$

$$\times\left|\tilde{J}_{01}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)+k\vec{q}^\circ\right]\right|^2\tilde{W}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)+k\vec{q}^\circ\right].$$

Для вычисления (11) применим асимптотический метод стационарной фазы. Сделаем преобразование, якобиан которого равен 1:

$$\xi_1=q_x^\circ-\frac{q_y^\circ C}{2B}, \qquad \xi_2=q_y^\circ,$$

$$I_q=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi_2 e^{iGf(\vec{\xi})}F(\vec{\xi}), \qquad (12)$$

где $f(\vec{\xi})=\dfrac{\xi_2^2}{4RB}+\dfrac{B}{R(4AB-C^2)}\xi_1^2.$

Стационарная точка для $f(\vec{\xi})$ равна $\vec{\xi}_s=0.$

Значение гессиана в стационарной точке

$$\left|\det\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_{is}\partial\xi_{js}}\right|=\left|R\cdot 4B\left(A-\frac{C^2}{4B}\right)\right|^{-1},$$

а знаки собственных значений гессиана d_1, d_2 равны

$$\operatorname{sgn} d_1=\operatorname{sgn}\left(A-\frac{C^2}{4B}\right), \qquad \operatorname{sgn} d_2=\operatorname{sgn} B.$$

В результате главный член асимптотики, вычисленный методом стационарной фазы [3] (с. 529), равен

$$I_q=\left|\tilde{J}_{01}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)\right]\right|^2\tilde{W}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)\right]. \qquad (13)$$

Подстановка (13) в (10) приводит к окончательному результату

$$\left\langle\left|u\left(\vec{R}_2\right)\right|^2\right\rangle=\frac{\sigma^2}{4}\iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1\frac{|J_{12}|^2}{R_{01}^2R_{12}^2}\times$$
$$\times\left|\tilde{J}_{01}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)\right]\right|^2\tilde{W}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp-\vec{\alpha}_\perp\right)\right]. \qquad (14)$$

Проанализируем поведение подинтегрального выражения (14) в предельных случаях, при больших и малых углах скольжения ψ'_{01}, ψ'_{12}. Напомним, что $\psi'_{01}=\dfrac{\pi}{2}-\theta'_{01}$, $\psi'_{12}=\dfrac{\pi}{2}-\theta'_{12}$, причем $\cos\theta'_{01}=\dfrac{z_0}{R_{01}}$, $\cos\theta'_{12}=\dfrac{z_2}{R_{12}}$. Если $\psi_{Br}\sim|\eta|$ – угол Брюстера и $\psi'_{01}\gg\psi_{Br}$, $\psi'_{12}\gg\psi_{Br}$, то коэффициенты отражения Френеля $V'_{01}\to 1$, $V'_{12}\to 1$ в формулах

$$\tilde{J}_{01}\left[k\left(\vec{\beta}_{\perp}-\vec{\alpha}\right)\right]=$$
$$=\left[-k\vec{\alpha}_{\perp}\vec{\chi}_1+k^2\alpha_z^2\right](1+V'_{01})+k^2\alpha_z\eta_0(1-V'_{01})+$$
$$+\left[-k\vec{\alpha}_{\perp}\vec{\chi}_1+k^2\alpha_z^2+k^2\alpha_z\eta_0\right](1-V'_{01})W'_{01}\Big|_{\vec{\chi}_1=k\left(\vec{\beta}_{\perp}-\vec{\alpha}_{\perp}\right)}, \qquad (15)$$

$$J_{12}=(1+V'_{12})+(1-V'_{12})W'_{12}, \qquad (16)$$

где W'_{01}, W'_{12} – множители ослабления (см. [1]).

В результате, замечая, что $\alpha_z^2+\alpha_{\perp}^2\equiv 1$, получим:

$$\tilde{J}_{01}\approx 2k^2\left[1-\vec{\beta}_{\perp}\vec{\alpha}_{\perp}\right],$$
$$J_{12}\approx 2.$$

При этом формула (14) принимает вид

$$\left\langle\left|u\left(\vec{R}_2\right)\right|^2\right\rangle=4k^4\sigma^2\iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1\,\frac{1}{R_{01}^2R_{12}^2}\times$$
$$\times\left(1-\vec{\beta}_{\perp}\vec{\alpha}_{\perp}\right)^2\tilde{W}\left[k\left(\vec{\beta}_{\perp}-\vec{\alpha}_{\perp}\right)\right]. \qquad (17)$$

Формула (17) полностью совпадает с формулой (11) в [2] (с. 105) для жесткой поверхности, если учесть связь $\tilde{W}(\vec{\chi}_1)$ с корреляционной функцией.

Для скользящего распространения $\psi'_{01}\ll\psi_{Br}$, $\psi'_{12}\ll\psi_{Br}$ имеем $V'_{01},V'_{12}\to -1$, $\alpha_z\to 0$, $J_{12}\to 2W'_{12}$, $\tilde{J}_{01}\to 2k^2\left(1-\vec{\beta}_{\perp}\vec{\alpha}_{\perp}\right)W'_{01}$, и формула (14) принимает вид

$$\left\langle\left|u\left(\vec{R}_2\right)\right|^2\right\rangle=4k^4\sigma^2\iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1\,\frac{1}{R_{01}^2R_{12}^2}\left(1-\vec{\beta}_{\perp}\vec{\alpha}_{\perp}\right)^2\times$$
$$\times W'_{01}W'_{12}\tilde{W}\left[k\left(\vec{\beta}_{\perp}-\vec{\alpha}_{\perp}\right)\right]. \qquad (18)$$

Переход к “мягкой” поверхности в формуле (14) не может быть реализован, поскольку он предполагает другой тип граничных условий $\left(|\eta_0|\to\infty\right)$ и соответственно другой тип коэффициентов отражения.

Энергетический частотный спектр флуктуационного поля

Будем рассматривать рассеяние на колеблющейся случайной поверхности $z=\zeta(\vec{r},t)$. В предположении квазистационарности таких колебаний $\Omega\ll\omega_0$, где $\Omega\sim\left|\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right|\Big/|\zeta|$, флуктуационное поле описывается по-прежнему формулой (68) из [1], где вместо $\zeta(\vec{r}_1)$ следует подставить $\zeta(\vec{r}_1,t)$ и рассматривать здесь t как параметр,

$$u\left(\vec{R}_2,t\right)=-\frac{e^{-i\omega_0 t}}{4\pi}\iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}\,\frac{e^{ik(R_{01}+R_{12})}}{R_{01}R_{12}}J_{01}J_{12}\Big|_{z_1=0}. \qquad (19)$$

В формуле (19) в явном виде записан опущенный ранее временной множитель $e^{-i\omega_0 t}$. Множители J_{01}, J_{12} определены формулами (69) и (70) из [1], причем в первой из них вместо $\zeta_1=\zeta(\vec{r}_1)$ стоит теперь $\zeta_1=\zeta(\vec{r}_1,t)$.

Образуем временную корреляционную функцию

$$B(\tau)=\left\langle u\left(\vec{R}_2,t+\tau\right)u^*\left(\vec{R}_2,t\right)\right\rangle=$$
$$=\frac{e^{-i\omega_0\tau}}{(4\pi)^2}\iint\limits_S\iint\limits_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1\mathrm{d}^2\vec{r}'_1\frac{J_{12}^*J'_{12}}{R_{01}R'_{01}R_{12}R'_{12}}\times$$
$$\times\left\langle J_{01}^*J'_{01}\right\rangle e^{-ik(R_{01}-R'_{01}+R_{12}-R'_{12})}\Big|_{z_1=z'_1=0}. \qquad (20)$$

Эта формула отличается от подобной формулы (1) для средней интенсивности множителем $e^{-i\omega_0\tau}$ и сдвижкой по времени величины $\zeta(\vec{r}_1', t+\tau)$, содержащейся в J_{01}'. Остальные штрихованные величины те же, что и в (1).

Представим теперь $\zeta(\vec{r}_1, t)$ фурье-разложением

$$\zeta(\vec{r}_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1 \sum_{j=\pm} \tilde{\zeta}_j(\vec{\chi}_1) e^{i(\vec{\chi}_1\vec{r}_1 - \omega_1 t)} \delta(\omega_1 - \omega_j), \tag{21}$$

где $\omega_j = \Omega_j(\vec{\chi}_1)$ – частоты дисперсионного уравнения колебаний поверхности. Подставив (21) в выражение для J_{01}', J_{01}^*, получим

$$\left\langle J_{01}^* J_{01}' \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1' \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1' \sum_{j=\pm}\sum_{j'=\pm} \tilde{J}_{01}^*(\vec{\chi}_1) \tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1') \times$$

$$\times e^{-i(\vec{\chi}_1 - \vec{\chi}_1')\vec{r}_1} e^{i\vec{\chi}_1'\vec{\rho}} e^{i(\omega_1 - \omega_1')t - i\omega_1'\tau} \times$$

$$\times \left\langle \tilde{\zeta}_j^*(\vec{\chi}_1) \tilde{\zeta}_j(\vec{\chi}_1') \right\rangle \delta(\omega_1 - \omega_j) \delta(\omega_1' - \omega_{j'}). \tag{22}$$

Величины $\tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1')$ и $\tilde{J}_{01}^*(\vec{\chi}_1)$ определены формулой (15).

Будем считать случайное поле неровностей однородным и стационарным, вследствие чего по теореме Винера–Хинчина для коррелятора спектральных амплитуд [4] имеем соотношение

$$\left\langle \tilde{\zeta}_j^*(\vec{\chi}_1) \tilde{\zeta}_{j'}(\vec{\chi}_1') \right\rangle = \frac{\sigma^2}{2} \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \delta_{jj'} \delta(\vec{\chi}_1 - \vec{\chi}_1'). \tag{23}$$

Поэтому

$$\left\langle J_{01}^* J_{01}' \right\rangle = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1 \sum_{j=\pm} \left| \tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1) \right|^2 \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) e^{i(\vec{\chi}_1\vec{\rho} - \omega_j\tau)}. \tag{24}$$

Подставим (24) в (22), а (22) в (20):

$$B(\tau) = \frac{e^{-i\omega_0\tau}}{(4\pi)^2} \frac{\sigma^2}{2} \times$$

$$\times \iint_S d^2\vec{r}_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\rho} \frac{e^{-ik(\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp)\vec{\rho}}}{R_{01}^2 R_{12}^2} e^{-ik(A\rho_x^2 + B\rho_y^2 + C\rho_x\rho_y)} \times$$

$$\times |J_{12}|^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1 \sum_{j=\pm} \left| \tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1) \right|^2 \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) e^{i(\vec{\chi}_1\vec{\rho} - \omega_j\tau)}. \tag{25}$$

Воспользовавшись фурье-разложением (4)–(6) для $M(\vec{\rho})$, получим

$$B(\tau) = \frac{e^{-i\omega_0\tau}}{4} \frac{\sigma^2}{2} \iint_S d^2\vec{r}_1 \frac{|J_{12}|^2}{R_{01}^2 R_{12}^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1 \tilde{M}\left[\vec{\chi}_1 - k\left(\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right)\right] \sum_{j=\pm} \left| \tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1) \right|^2 \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) e^{-i\omega_j\tau}. \tag{26}$$

Определим частотный спектр:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \tag{27}$$

$$S(\omega) \equiv S(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{\sigma^2}{8} \iint_S d^2\vec{r}_1 \frac{|J_{12}|^2}{R_{01}^2 R_{12}^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\vec{\chi}_1 \tilde{M}\left[\vec{\chi}_1 - k\left(\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right)\right] \times$$

$$\times \sum_{j=\pm} \left| \tilde{J}_{01}(\vec{\chi}_1) \right|^2 \tilde{W}_j(\vec{\chi}_1) \delta(\Delta\omega - \omega_j), \tag{28}$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

Формула (28) имеет много общего с формулой (10) для средней интенсивности, что становится особенно наглядным при замене переменной

$$\vec{\chi}_1 \to k\left(\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right) + \vec{q}.$$

Существенным отличием (28) от (10) является присутствие $\delta\left[\Delta\omega - \omega_j(\vec{\chi}_1)\right]$ под знаком интеграла. Это обязывает произвести в первую очередь интегрирование по волновым числам $\vec{\chi}_1$, входящим в аргумент δ-функции, вне зависимости от быстроты изменений остальной части подынтегрального выражения.

В общем случае анализ спектра (28) является сложной задачей, поэтому ограничимся здесь наиболее простыми частными случаями.

Будем рассматривать конкретный вид колебаний поверхности – гравитационные волны на глубокой жидкости, для которых закон дисперсии имеет вид

$$\omega_j = j\sqrt{g\chi_1}, \qquad (j = \pm),$$

g – ускорение силы тяжести.

Начнем с ситуации, когда можно пренебречь квадратичными членами $\sim k\rho^2/R$ в экспоненте $M(\vec{\rho})$ (формула (4)). Это означает, что можно положить $A, B, C \to 0$, при этом из формулы (5) следует $\tilde{M}(\vec{q}) = \delta(\vec{q})$, и корреляционная функция выглядит следующим образом:

$$B(\tau) = \frac{e^{-i\omega_0\tau}}{4}\frac{\sigma^2}{2}\iint_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1 \frac{|J_{12}|^2}{R_{01}^2 R_{12}^2} \times$$
$$\times \sum_{j=\pm}\left|\tilde{J}_{01}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right)\right]\right|^2 \tilde{W}_j\left[k\left(\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right)\right] e^{-i\omega_{1j}\tau}. \tag{30}$$

А выражение для спектра имеет вид

$$S(\omega) \equiv S(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{\sigma^2}{8}\iint_S \mathrm{d}^2\vec{r}_1 \frac{|J_{12}|^2}{R_{01}^2 R_{12}^2} \times$$
$$\times \sum_{j=\pm}\left|\tilde{J}_{01}\left[k\left(\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right)\right]\right|^2 \tilde{W}_j\left[k\left(\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right)\right]\delta[\Delta\omega - \omega_j], \tag{31}$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, а $\omega_j = j\sqrt{gk\left|\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right|}$, $j = \pm$.

В случае, когда углы скольжения на трассах $\vec{R}_{01}$ и $\vec{R}_{12}$ много больше угла Брюстера, формула (31) переходит в формулу (1б) из [2] (с. 139).

Из формулы (31) следует, что спектр формируется определенными точками рассеяния возле частоты ω_0 в полосе частот

$$\Delta\omega = \pm\sqrt{gk\left|\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right|_{\max}}. \tag{32}$$

В самом общем случае (бесконечная рассеивающая поверхность S) для различных точек рассеяния возможны изменения в интервале

$$0 \le \left|\vec{\beta}_\perp - \vec{\alpha}_\perp\right| \le 2. \tag{33}$$

Для S конечных размеров диапазон возможных изменений может быть гораздо меньше и определяется конкретной геометрией задачи. Строго говоря, исходная формула (1) в [1] получена в предположении, что поверхность S – бесконечная плоскость. Поэтому применение следующих из нее результатов для S конечных, больших по сравнению с длиной волны, размеров следует рассматривать как коротковолновую асимптотику краевой задачи для уравнения Гельмгольца ([5], глава I).

Особый интерес представляет случай обратного рассеяния $\left(\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{01}, \vec{\beta}_\perp = -\vec{\alpha}_\perp\right)$, когда

$$\Delta\omega = \pm\sqrt{2gk\left|\vec{\alpha}_\perp\right|}. \tag{34}$$

Очевидно, что рассеяние на данной частоте обеспечивается точками поверхности, для которых $\left|\vec{\alpha}_\perp\right| = \mathrm{const}$, независимо от азимутального угла. Диапазон возможных изменений угла падения обеспечивает ширину полосы спектра.

Для абсолютно вырожденного случая скользящего падения $(z_0 = 0)$ угол падения (и рассеяния) постоянен и равен $\pi/2$, при этом $|\vec{\alpha}_\perp| = 1$, и все точки рассеяния дают один и тот же сдвиг частоты

$$\Delta\omega = \pm\sqrt{2gk}. \qquad (35)$$

При этом аргумент функции $\delta\left[\Delta\omega \pm \sqrt{2gk}\,\right]$ не зависит от $\vec{r}_1$ и ее можно вынести за знак интеграла в формуле, следующей из (31) при $\vec{\beta}_\perp = -\vec{\alpha}_\perp$. Спектр флуктуаций поля состоит в этом случае из двух бесконечно узких (вследствие допущенной ранее математической идеализации) линий.

Во всех остальных случаях аргумент δ-функции зависит от точки рассеяния $\vec{r}_1$, и вынесение ее из под знака интегрирования, как это сделано авторами [2] в формуле (2) на с. 139, является недопустимым.

Влияние кривизны фазовых фронтов падающего и рассеянного полей существенно на расстояниях R_{01}, R_{12}, где фаза $M(\vec{\rho})$ намного больше единицы. Спектр (28) в этом случае определяется двухкратным интегрированием по точкам рассеивающей поверхности и двухкратным интегрированием по волновым векторам пространственного спектра неровностей этой поверхности.

Выполнение интегрирования по волновым векторам является достаточно сложной задачей даже в частном случае обратного рассеяния, и в настоящей статье нами рассматриваться не будет, равно как и общий случай произвольной геометрии рассеяния. Такое рассмотрение может составить предмет отдельного исследования.

Таким образом, полученные в I и II частях результаты позволяют описать рассеяние в ближней зоне поверхности как на уровне флуктуаций волнового поля, так и на уровне средней интенсивности флуктуации и ее частотного спектра. Их дальнейший анализ будет способствовать более детальному пониманию явлений рассеяния волн.

Литература

1. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. I. Флуктуации поля. // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №4. – С. 399-409.
2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
3. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 547 с.
4. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 373 с.
5. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А. Краевые и угловые катастрофы в задачах дифракции и распространения волн. – Казань: КАИ, 1988. – 200 с.

Розсіяння хвиль у ближній зоні статистично нерівної поверхні. II. Середня інтенсивність і частотний спектр флуктуацій поля

А. С. Брюховецький

Визначено середню інтенсивність та частотний спектр флуктуацій хвилевого поля, розсіяного у ближній зоні статистично нерівною поверхнею. Основу розрахунків становить асимптотичне розкладання флуктуаційного поля, одержане у першій частині роботи. Досліджено граничні переходи до відомих окремих випадків.

Wave Scattering in Near Zone of a Statistically Rough Surface. II. Average Intensity and Frequency Spectrum of Field Fluctuations

A. S. Bryukhovetski

The average intensity and the frequency spectrum of field fluctuations in the near zone of a statistically rough surface are determined. The calculations are based on the asimptotic expansions of the fluctuating field derived in the first section of the paper. The passages to the limit for the known special cases are investigated.